

# Strömungslehre 3

- Kompressible Strömungen
- Grundgleichungen für Newtonsche Fluide
- Numerische Strömungsberechnung
- Aufgaben
- Anhang

# Inhaltsverzeichnis

## Übersicht

- Kompressible Strömungen
  - Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases
  - Grundgleichungen
  - Rohrströmung
  - Ausströmvorgänge
- Grundgleichungen für Newtonsche Fluide
  - Lokale Massenbilanz
  - Lokale Impulsbilanz
  - Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten
  - Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen
    - Eindimensionale Beispiele
    - Laminare Gerinneströmung
    - Wirbelgleichung
- Numerische Strömungsberechnung
  - Diskretisierung
  - Modellierung der Turbulenz
  - Das Simulationsprogramm Femlab
  - Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung
  - Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel
- Aufgaben
  - Aufgabe 1
    - Lösung von Aufgabe 1
  - Aufgabe 2
    - Lösung von Aufgabe 2
  - Aufgabe 3
    - Lösung von Aufgabe 3
  - Aufgabe 4
    - Lösung von Aufgabe 4
  - Aufgabe 5
    - Lösung von Aufgabe 5
  - Aufgabe 6
    - Lösung von Aufgabe 6
- Anhang
  - Literatur
  - Nachweise
  - Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

# Kompressible Strömungen

- Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases
- Grundgleichungen
- Rohrströmung
- Ausströmvorgänge

# Thermodynamische Eigenschaften des idealen Gases

- Zustandsgleichungen:
  - thermisch
    - $p = R_i \rho T$
  - kalorisch
    - $du = c_V dT$
  - $c_V$  von  $T$  unabhängig (perfektes Gas) →
    - $u = c_V T$  (bei geeignetem Nullpunkt für  $u$ )

- Isentrope Zustandsänderung:
  - keine Wärmeübertragung
  - Isentropengleichungen

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const}$$

- $\frac{p^{\kappa-1}}{T^\kappa} = \text{const}$

- Adiabatenkoeffizient
  - $\kappa := c_p/c_V$
- außerdem beim idealen Gas
  - $c_p - c_V = R_i$
  - $\Rightarrow c_p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i$

- Enthalpie:
  - definiert als
    - $H := U + p V$
  - spezifische Enthalpie mit Gasgleichung

$$\begin{aligned} h &= u + p/\rho \\ &= u + R_i T \end{aligned}$$

- für perfektes Gas

$$\begin{aligned} h &= c_V T + (c_p - c_V) T \\ &= c_p T \end{aligned}$$

- Schallgeschwindigkeit  $a$ :
  - Schall: schnelle Druckänderung, adiabatisch
  - Schallgeschwindigkeit allgemein gegeben durch

- $a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$

○ Isentropengleichung beim idealen Gas →

- $a = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R_i T}$

○ Machzahl

- $Ma := w / a$

# Grundgleichungen

- Kontinuitätsgleichung:
  - Masse-Zustrom in Zeit  $dt$  durch Stromröhre des Querschnitts  $A_1$ 
    - $dm_1 = \rho_1 * A_1 * w_1 dt$
  - Abstrom am anderen Ende, Querschnitt  $A_2$ 
    - $dm_2 = \rho_2 * A_2 * w_2 dt$
  - stationär  $\rightarrow$ 
    - $dm_1 = dm_2$
    - $\Rightarrow A_1 * \rho_1 * w_1 = A_2 * \rho_2 * w_2$
- Energiegleichung:
  - keine explizite Energiezufuhr
  - Berücksichtigung der Reibung als innere Energie  $\rightarrow$ 
    - $gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}w^2 + u = \text{const.}$
  - beim idealen Gas
    - $\frac{p}{\rho} = R_i T = (c_p - c_v)T$
  - beim perfekten Gas wegen  $u = c_v T$  daher
    - $gz + c_p T + w^2/2 = \text{const.}$
  - oder mit der Enthalpie
    - $gz + h + w^2/2 = \text{const.}$

# Rohrströmung

- Druckabfall am Rohr:

- mit Rohrreibungszahl  $\lambda$

- $$dp = -\lambda \frac{dl}{2d} \rho \bar{w}^2$$

- Gasgleichung

- $$\frac{\rho T}{p} = \text{const.}$$

- $$\Rightarrow \rho = \rho_1 \cdot \frac{p}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T}$$

- Kontinuitätsgleichung + konstanter Rohrquerschnitt  $\rightarrow$

- $$\bar{w} \rho = \text{const.}$$

- $$\Rightarrow \bar{w} = \bar{w}_1 \cdot \frac{\rho_1}{\rho}$$
- $$= \bar{w}_1 \cdot \frac{p_1}{p} \cdot \frac{T}{T_1}$$

- damit Druckabfall

- $$dp = -\lambda \frac{\rho_1 p_1 \bar{w}_1^2 T}{2dT_1 p} dl$$

- Druckabfall bei isothermer Strömung:

- langsame Strömung durch nichtisolierte Rohrleitung  $\rightarrow$

- $T = \text{const}$

- z.B. Ferngasleitung

- $\rho$  ändert sich  $\rightarrow$

- $\bar{w}$  ändert sich

- $v$  ändert sich

- $Re$  ändert sich

- $\lambda$  ändert sich

- Gleichung für Druckabfall nur numerisch lösbar

- Integration einfach für Näherung:  $\lambda = \text{const} \rightarrow$

- $$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 - 1 = -2\lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2dp_1} l$$

- Druckabfall bei adiabatischer Strömung:

- thermisch isoliertes Rohr  $\rightarrow$

- $$T = T_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

- z.B. Fernwärmeleitung (Dampf)

- Integration für  $\lambda = \text{const} \rightarrow$

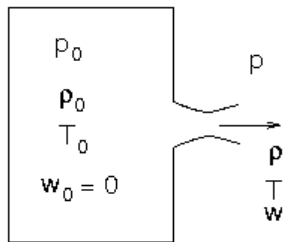
$$\bullet \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{(\kappa+1)/\kappa} - 1 = -\frac{\kappa+1}{\kappa} \lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2dp_1} l$$

- Aufgaben:
  - Aufgabe 1

# Ausströmvorgänge

- Ausströmen aus einem Kessel:

- adiabates Ausströmen von perfektem Gas



- Anfangsgeschwindigkeit  $w_0 = 0$
- Ausgangsdruck  $p$  gegeben
- Dichte und Temperatur mit Adiabatengleichung

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa}$$

- $$\frac{T}{T_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}$$

- Geschwindigkeit nach dem Energiesatz

$$c_p T + \frac{1}{2} w^2 = \text{const.}$$

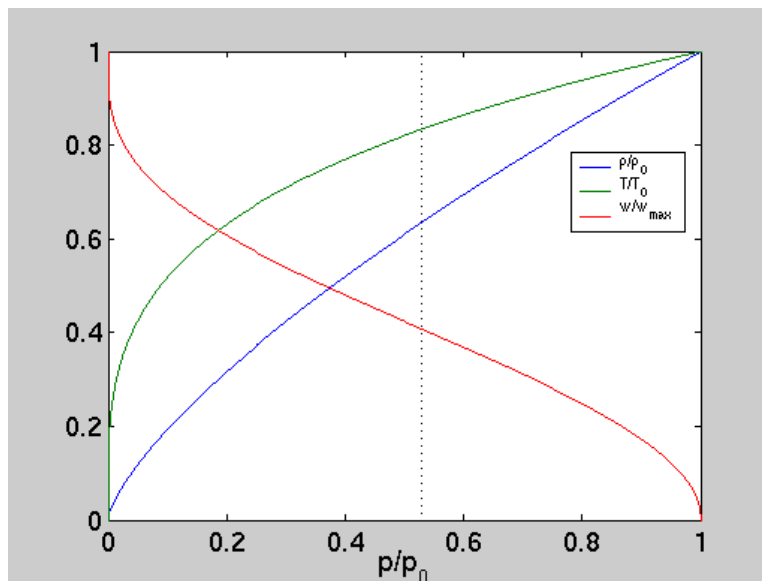
- $$\Rightarrow w = \sqrt{2c_p(T_0 - T)}$$

- Maximalgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} w_{max} &= \sqrt{2c_p T_0} \\ \Rightarrow \frac{w}{w_{max}} &= \sqrt{1 - \frac{T}{T_0}} \\ &= \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}} \end{aligned}$$

-

- graphisch für Luft ( $\kappa = 1.4$ )

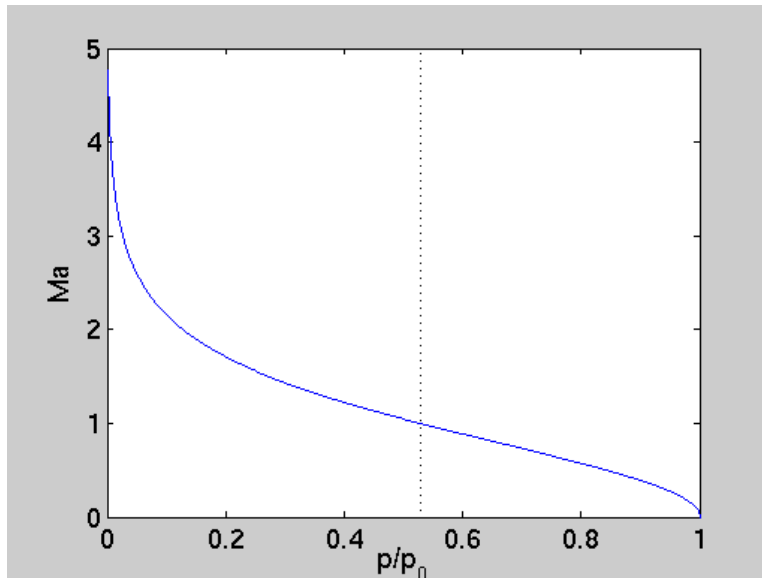


- Machzahl:

- in Abhängigkeit von p

$$\begin{aligned}
 Ma &= \frac{w}{a} = \frac{w}{w_{max}} \cdot \frac{w_{max}}{a} \\
 &= \frac{w}{w_{max}} \cdot \frac{\sqrt{2c_p T_0}}{\sqrt{\kappa R_i T}} \\
 &= \sqrt{1 - \frac{T}{T_0}} \cdot \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1} \frac{T_0}{T}} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T} - 1} \\
 &= \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} \cdot \sqrt{\left(\frac{p_0}{p}\right)^{(\kappa-1)/\kappa} - 1}
 \end{aligned}$$

- graphisch für  $\kappa = 1.4$



- Strömung "näherungsweise inkompressibel" für

- $Ma < 0.3$
- $\rightarrow p/p_0 > 0.93$
- $\rightarrow \rho/\rho_0 > 0.95$
- Dichteänderung kleiner 5%

- kritischer Druck  $p^*$  bei  $Ma = 1 \rightarrow$

- $$\frac{p^*}{p_0} = \left( \frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\kappa/(\kappa-1)}$$

- Werte der anderen Größen beim kritischen Druck sofort durch Einsetzen
- bei Luft

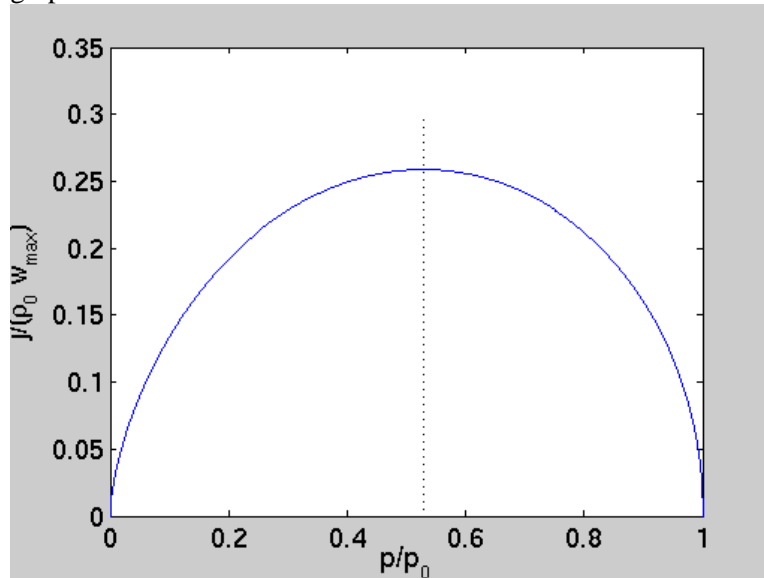
|                 |       |
|-----------------|-------|
| $p^*/p_0$       | 0.528 |
| $\rho^*/\rho_0$ | 0.634 |
| $T^*/T_0$       | 0.833 |
| $w^*/w_{max}$   | 0.408 |

- Massenstromdichte  $j$ :

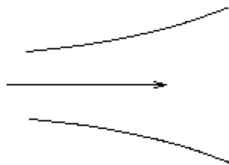
- Masse pro Zeit und Querschnittsfläche
- gegeben durch
  - $j = \rho w$
- Abhängigkeit vom Druck

- $$\frac{j}{\rho_0 w_{max}} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\kappa} \sqrt{1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(\kappa-1)/\kappa}}$$

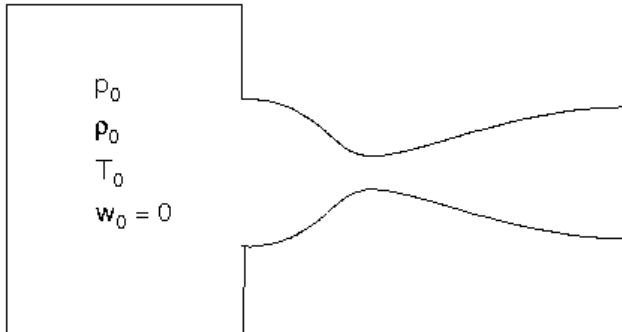
- graphisch



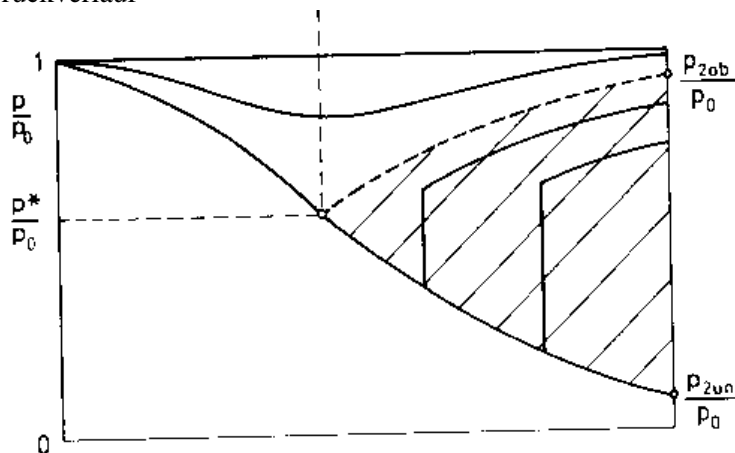
- Maximum bei  $p^*/p_0$ , also  $Ma = 1$
- für Luft
  - $j^*/(\rho_0 w_{\max}) = 0.259$
- Strömung bei veränderlichem Querschnitt:
  - Kontinuitätsgleichung →
    - $j A = \text{const.}$
  - Querschnitt wächst → Stromdichte sinkt und umgekehrt
  - wegen Maximum von  $j(p)$  verschiedenes Verhalten für  $Ma > 1$  bzw.  $Ma < 1$
  - z.B. bei wachsendem Querschnitt



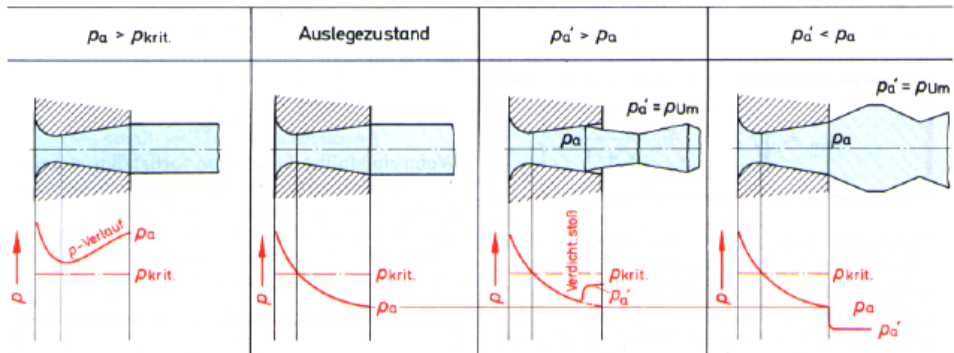
- Unterschallströmung ( $Ma < 1$ )
  - Stromdichte sinkt
  - → Druck steigt
  - → Dichte und Temperatur steigen
  - → Geschwindigkeit sinkt
- Überschallströmung ( $Ma > 1$ )
  - Stromdichte sinkt
  - → Druck sinkt
  - → Dichte und Temperatur sinken
  - → Geschwindigkeit steigt
- Lavaldüse:
  - zur Erzeugung einer Überschallströmung, etwa in Dampfturbinen oder Strahltriebwerken



- Funktionsweise
  - erst Verengung → Geschwindigkeit steigt
  - dünnste Stelle:  $w = a$  ( $Ma = 1$ )
  - Verbreiterung →  $w$  steigt weiter
- Druckverlauf



- Außendruck  $p_2 > p_{2,ob}$ 
  - → reine Unterschallströmung (Venturirohr)
- Außendruck  $p_2 = p_{2,un}$ 
  - → kritischer Druck an engster Stelle (\*)
  - → Überschallströmung entsteht
- Außendruck  $p_2 < p_{2,un}$ 
  - Druck bei (\*) auch nur  $p^*$
  - Stromdichte bleibt konstant (sinkt nicht ab)
  - Nachexpansion am Düsenende
- Zwischenbereich  $p_{2,ob} > p_2 > p_{2,un}$ 
  - Verdichtungsstoß, nicht adiabatisch
- zusammengefasst



- Aufgaben:
  - Aufgabe 2

# Grundgleichungen für Newtonsche Fluide

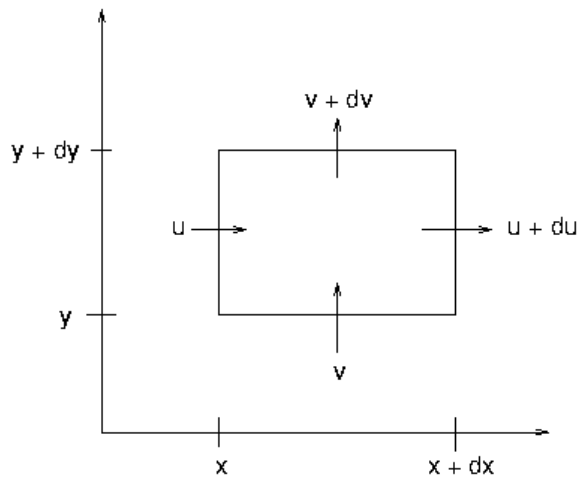
- Bewegungsgleichungen für Fluide:
  - Grundgesetze der Bewegung (wie  $F = ma$ )
  - partielle Differentialgleichungen
  - Herleitung aus Bilanzen für kleines (differentielles) Kontrollvolumen
- Einschränkungen im folgenden:
  - Newtonsches Reibungsgesetz
  - inkompressibel
  - stationär
  - zweidimensional

- $$\vec{w}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$$

- Lokale Massenbilanz
- Lokale Impulsbilanz
- Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten
- Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

# Lokale Massenbilanz

- Kontrollvolumen:
  - Längen  $dx$ ,  $dy$  und  $b$  (feste Höhe)



- kleine Geschwindigkeitsänderungen

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

- Gesamtmasse im Kontrollvolumen:
  - ändert sich durch Ein- und Ausströmen der Fluidteilchen

- $d\dot{m} = \rho \vec{w} d\vec{A}$

- Skalarprodukt: Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zur Fläche zählt
- Vorzeichen: Einströmen positiv, Ausströmen negativ
- Bilanz für das Kontrollvolumen

$$\begin{aligned} d\dot{m} &= \rho u b dy - \rho(u + du) b dy + \rho v b dx - \rho(v + dv) b dx \\ &= -\rho(du dy + dv dx) b \\ &= -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) b dx dy \end{aligned}$$

- Inkompressible Strömung:
  - Masse im Kontrollvolumen konstant  $\rightarrow d\dot{m} = 0$
  - damit Kontinuitätsgleichung

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{KG})$

# Lokale Impulsbilanz

- Gesamtimpuls im Kontrollvolumen:
  - ändert sich durch Ein- und Ausströmen der Fluidteilchen

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= d\dot{m}\vec{w} \\ &= \rho(\vec{w} \cdot d\vec{A})\vec{w} \end{aligned}$$

- in Komponenten

$$\begin{aligned} d\dot{p}_x &= \rho u(\vec{w} \cdot d\vec{A}) \\ &= \rho v(\vec{w} \cdot d\vec{A}) \end{aligned}$$

- auftretende Kräfte

- Volumenkraft  $F_K$
- Druckkraft  $F_p$
- Reibungskraft  $F_R$

- Impulsänderung = Summe der angreifenden Kräfte

$$d\dot{p} = d\vec{F}_K + d\vec{F}_p + d\vec{F}_R$$

- Impulsänderung:

- x-Komponente

$$\begin{aligned} d\dot{p}_x &= \rho u(-ubdy) \\ &+ \rho u(-vbdx) \\ &+ \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)\left(u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right)bdy \\ &+ \rho\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\left(v + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)bdx \end{aligned}$$

- Vernachlässigen von Termen höherer Ordnung

$$\begin{aligned} d\dot{p}_x &= \rho \left( 2u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) bdx dy \\ &= \rho bdx dy \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \\ &= \rho bdx dy \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

- wegen der Kontinuitätsgleichung

- analog y-Komponente

$$d\dot{p}_y = \rho bdx dy \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

- Volumenkraft  $F_K$ :

- proportional zum Volumen
- beim Kontrollvolumen

- $d\vec{F}_K = \vec{k} dx dy b$
- z.B. für Schwerkraft (unten = -y-Richtung)
  - $k_x = 0$
  - $k_y = -\rho g$
- Druckkraft  $F_p$ :
  - bei kleiner Fläche  $d\vec{A}$ 
    - $d\vec{F}_p = p d\vec{A}$
  - x-Komponente beim Kontrollvolumen
 
$$dF_{p,x} = pbdy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right)bdy$$
    - $= -\frac{\partial p}{\partial x} b dx dy$
  - analog y-Komponente
    - $dF_{p,y} = -\frac{\partial p}{\partial y} b dx dy$
- Reibungskraft  $F_R$ :
  - betrachten reine Schichtströmung  $u = u(y), v = 0$
  - damit x-Komponente von  $F_R$ 

$$dF_{R,x} = \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right) b dx - \tau b dx$$
    - $= \frac{\partial \tau}{\partial y} b dx dy$
  - für Newtonsches Fluid somit
 
$$\tau = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$
    - $\Rightarrow dF_{R,x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b dx dy$
  - bei beliebiger Strömung zusätzlich Normalspannungen
  - dafür erhält man (mit einiger Mühe)
 
$$dF_{R,x} = \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) b dx dy$$

$$dF_{R,y} = \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) b dx dy$$
    -
- Navier-Stokes-Gleichungen:
  - ergeben sich sofort beim Zusammensetzen aller Teile

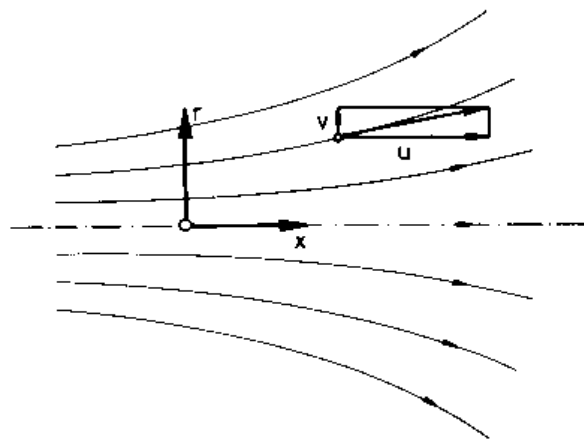
$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS1})$$

$$\bullet \quad \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{NS2})$$

- zusammen mit Kontinuitätsgleichung 3 Gleichungen für u, v, p
- wesentlich: Randbedingungen (z.B. Haftbedingung an Wänden)
- nichtlinear → analytisch (meistens) nicht lösbar
- numerische Lösung z.T. sehr aufwändig

# Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten

- Rotationssymmetrische Strömung:
  - z.B. für Rohre
  - Koordinaten
    - x längs des Rohrs
    - r senkrecht zum Rohr
    - $\phi$  Drehung längs Rohrumfang



- Komponenten der Geschwindigkeit
  - u in x-Richtung
  - v in r-Richtung
  - keine Bewegung in  $\phi$ -Richtung
- Rotationssymmetrie  $\rightarrow$  alle Größen unabhängig von  $\phi$
- Gleichungen für u, v, p:
  - dreidimensionale Gleichungen in Zylinderkoordinaten umrechnen
  - Unabhängigkeit von  $\phi$  ausnutzen
  - Ergebnis

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right) = k_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v^2}{r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right)$$

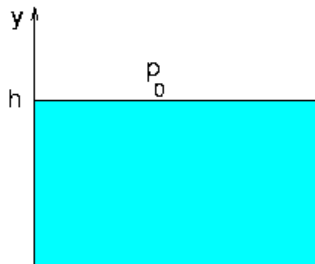
# Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen

- Eindimensionale Beispiele
- Laminare Gerinneströmung
- Wirbelgleichung

# Eindimensionale Beispiele

- Ruhende Flüssigkeit im Schwerfeld:

- Geometrie



- keine Strömung  $\rightarrow u = v = 0$

- Schwerkraft

- $k_y = -\rho g$

- Gleichung NS1  $\rightarrow$

- $\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow p = p(y)$

- Gleichung NS2  $\rightarrow$

- $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$

- Integrieren  $\rightarrow$

- $p(y) = -\rho g y + C$

- Randbedingung  $p(h) = p_0 \rightarrow$

- $p(y) = p_0 + \rho g (h - y)$

- hydrostatischer Druck

- Reibungsloser Stromfaden:

- keine Reibung  $\rightarrow \eta = 0$

- keine Volumenkräfte  $\rightarrow k = 0$

- Stromröhre in x-Richtung  $\rightarrow u = u(x)$

- damit wird Gleichung NS1

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

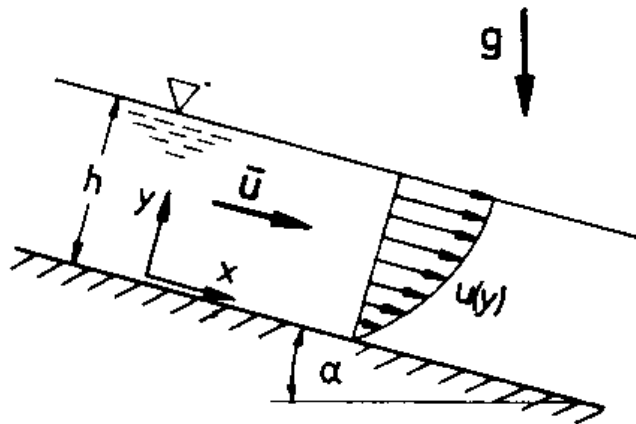
$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + p \right) = 0$$

- $\Rightarrow \frac{1}{2} \rho u^2 + p = \text{const.}$

- Bernoulli-Gleichung

# Laminare Gerinneströmung

- Strömung im Kanal:
  - Neigungswinkel  $\alpha$
  - konstante Wassertiefe  $h$
  - Breite  $b \gg h \rightarrow$  Seitenwände vernachlässigbar
  - Koordinaten
    - $x$  längs des Gefälles
    - $y$  senkrecht zum Gefälle



- Schwerkraft
  - $k_x = \rho g \sin \alpha$
  - $k_y = -\rho g \cos \alpha$
- Höhenprofil der Geschwindigkeit:
  - keine Variation in der Breite
  - unabhängig von  $x$  (ausgebildete Strömung)
    - $\rightarrow$  Ableitungen nach  $x$  verschwinden
    - $\rightarrow$  partielle Ableitung nach  $y =$  gewöhnliche Ableitung
  - Kontinuitätsgleichung  $\rightarrow$ 
    - $dv/dy = 0$
    - $\rightarrow v = \text{const.}$
    - $v = 0$  am Boden
    - $\rightarrow v = 0$  überall
  - wegen  $v = 0$  wird NS2
    - $dp/dy = -\rho g \cos \alpha$
  - Lösung (wie beim hydrostatischen Druck)
    - $p = p_0 + \rho g (h - y) \cos \alpha$
  - aus NS1 wird

- $$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{k_x}{\eta} = -\frac{\rho g}{\eta} \sin \alpha =: -B$$

- Integration →
  - $du/dy = -B y + C_1$
- Randbedingung:
  - keine Reibung an der Oberfläche (Luftreibung und Oberflächenwellen vernachlässigt)
  - $\rightarrow \tau(y=h) = 0$
  - $\rightarrow du/dy(y=h) = 0$
  - $\rightarrow du/dy = B (h - y)$
- nochmals integrieren und Haftbedingung  $u(0) = 0 \rightarrow$ 
  - $u = B y (h - y/2)$
- Geschwindigkeit an der Oberfläche maximal
  - $u_{\max} = u(h) = h^2 B/2$
- Reibungszahl  $\lambda$ :
  - aus Gleichgewicht zwischen Druckabfall und Reibungsverlust an der Wand folgte
    - $$\tau_W = \frac{\lambda \bar{w}^2 \rho}{8}$$
    - $$\Rightarrow \lambda = \frac{8\tau_W}{\rho \bar{w}^2}$$
  - Schubspannung am Boden
    - $$\tau_W = \eta \left( \frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \eta B h$$
  - mittlere Geschwindigkeit
    - $$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy = \frac{1}{3} B h^2$$
  - damit
    - $$\lambda = \frac{72 \eta}{\rho B h^3}$$
- $\lambda$  als Funktion von Re:
  - Reynoldszahl bei offener Strömung war
    - $$Re = \frac{\rho \bar{u} d_h}{\eta}$$
  - dazu hydraulischer Durchmesser
    - $$d_h = \frac{4A}{U} = \frac{4bh}{2h + b}$$
    - $$\approx 4h \quad (b \gg h)$$
  - damit
    - $$Re = \frac{4\rho B h^3}{3\eta}$$
  - somit

- $\lambda = \frac{96}{\text{Re}}$ 
  - ähnlich zum Hagen-Poiseuille-Gesetz der Rohrströmung
- Aufgaben:
  - Aufgabe 3

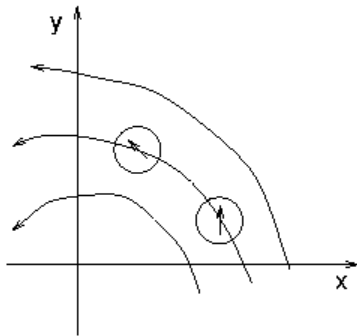
# Wirbelgleichung

- Drehung  $\omega$ :

- Definition

- $$\omega := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- anschaulich: Drehgeschwindigkeit eines kleinen Teilchens in der Strömung



- z.B. bei starrer Drehung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit

- $$\vec{w} = \omega_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- $$\Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \omega_0 (1 - (-1)) = \omega_0$$

- genauere Herleitung aus Zerlegung der Strömung in kleinen Verzerrungs- und Drehanteil (s. Anhang)

- Eulersche Bewegungsgleichungen:

- reibungslose Strömung ( $\eta = 0$ )
- keine Volumenkräfte ( $k_x = k_y = 0$ )
- damit aus NS1 und NS2

- $$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (\text{EU1})$$

- $$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{EU2})$$

- Wirbeltransportgleichung:

- Druck aus den Euler-Gleichungen eliminieren
  - EU1 nach y ableiten, EU2 nach x ableiten,
  - beides subtrahieren  $\rightarrow$

- $$\frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

- Klammern = 0 wegen Kontinuitätsgleichung
- Definition von  $\omega$  einsetzen  $\rightarrow$

$$\bullet \quad u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

• Helmholtz'scher Wirbelsatz:

- Änderung der Wirbelstärke  $\omega$  längs einer Stromlinie

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\partial \omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial \omega}{\partial x} u dt + \frac{\partial \omega}{\partial y} v dt \end{aligned}$$

$$\bullet \quad = 0$$

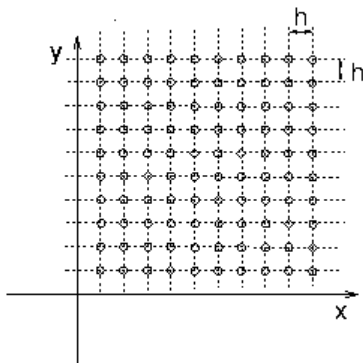
- wegen der Wirbeltransportgleichung
- für reibungslose stationäre Strömung folgt
  - Drehung der Fluidteilchen längs ihrer Bahn ist konstant
- Spezialfall
  - homogene Anströmung bleibt wirbelfrei
- Aufgaben:
  - Aufgabe 4

# Numerische Strömungsberechnung

- Diskretisierung
- Modellierung der Turbulenz
- Das Simulationsprogramm Femlab
- Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung
- Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel

# Diskretisierung

- Grundprinzip zur Lösung der Bewegungsgleichungen:
  - kontinuierlicher Raum  $(x,y) \rightarrow$  Gitter  $(x_i, y_i)$  (endlich viele Punkte)
  - Differentialgleichung  $L(u) = 0 \rightarrow$  algebraische Gleichung  $A(u_i) = 0$
  - Lösung liefert Näherungswerte an Gitterpunkten
  - Zwischenwerte durch Interpolation (FDM, FVM) oder Ansatzfunktionen (FEM)
- Finite-Differenzen-Methode (FDM):
  - Raum zerlegt in gleichmäßiges Gitter, kleine Gitterweite  $h$

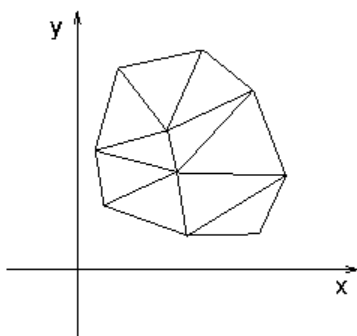


- Ableitungen ersetzt durch Differenzen aus Taylor-Entwicklung, z.B.

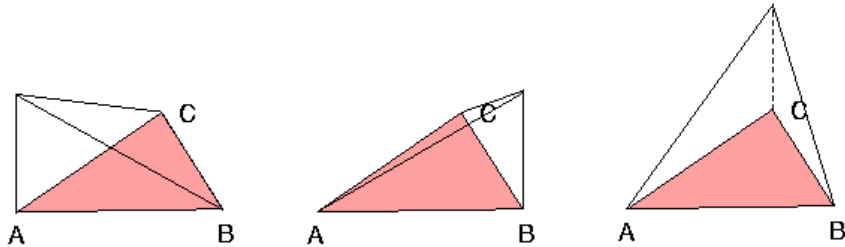
$$u(x+h, y) = u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)h + \mathcal{O}(h^2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(x) \approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h}$$

- $\Rightarrow$
- algebraische Gleichungen numerisch lösen
- Vorteile von FDM
  - relativ einfache Programmierung
  - mathematisch gut zu analysieren
- Nachteile von FDM
  - schwierig an komplizierte Geometrie anzupassen
  - gleiche Genauigkeit im ganzen Raum
- Finite-Elemente-Methode (FEM):
  - Raum zerlegt in kleine Teilvolumina  $V_i$  (Elemente)



- einfache Basisfunktionen  $N_i(x,y)$  in den Elementen (meist linear)



- Ansatz: Lösung ist Linearkombination der Basisfunktionen

$$u(x, y) = \sum_i c_i N_i(x, y)$$

- 
- Einsetzen von  $u$  in Differentialgleichung  $\rightarrow$  Fehlerterm  $R$ 
  - $L(u) = R$
- Koeffizienten  $c_i$  finden, so dass  $R$  "im Mittel möglichst klein"

- gewichtete Mittelwerte des Fehlers sollen verschwinden
- Gewichtsfunktionen = Basisfunktionen  $N_i$
- $\int R N_k dx dy = 0 \quad k = 1, 2, 3, \dots$

- bei gegebener Differentialgleichung und Basisfunktion
  - $R$  als Funktion der Koeffizienten  $c_i$  bekannt
  - Integrale über die (einfachen)  $N_i$  bekannt
  - $\rightarrow$  (riesiges) lineares Gleichungssystem für  $c_i$
  - dafür viele gute numerische Verfahren

- Vorteile von FEM

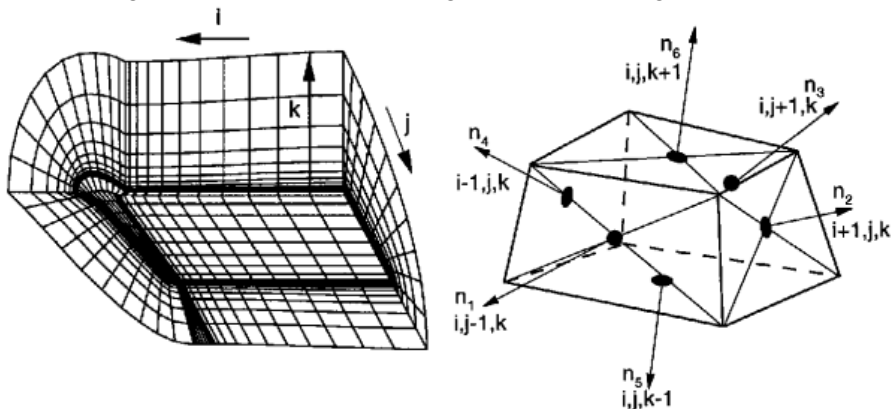
- verschiedene Formen für Grundelemente möglich
- sehr gut anpassbar an beliebige Geometrie
- Verfeinerung an kritischen Stellen problemlos

- Nachteile von FEM

- Erhaltungssätze nicht respektiert

- Finite-Volumen-Methode (FVM):

- Raum zerlegt in Zellen (meist viereckig in 2d, sechsseitig in 3d)



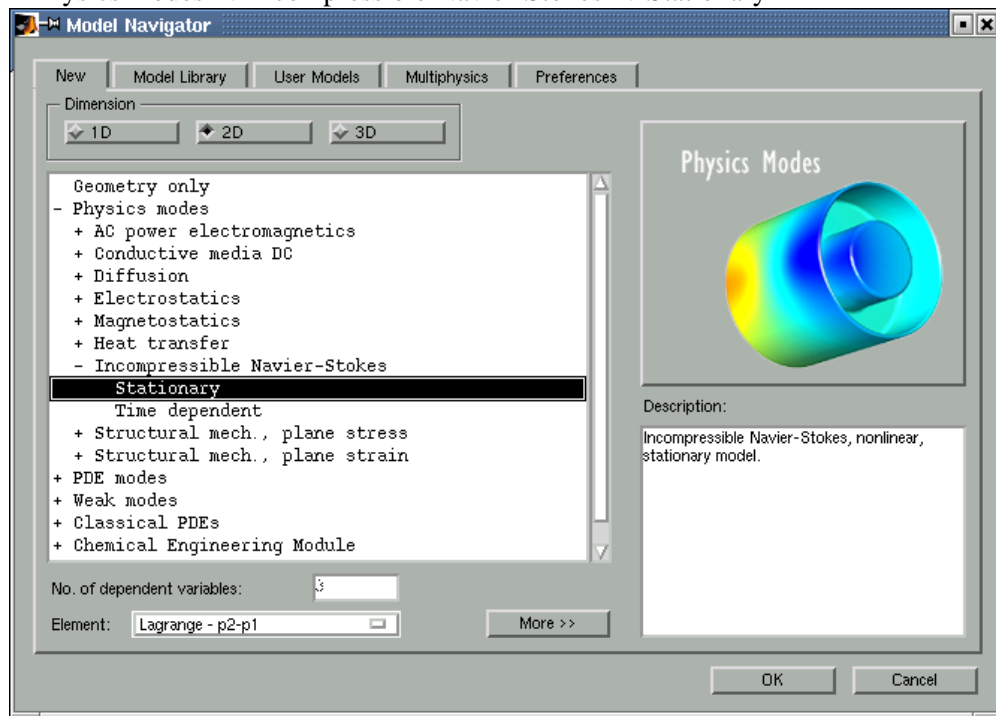
- Werte definiert in den Mittelpunkten der Zellen
- Ableitungen und Werte an Zellenoberflächen mit Interpolation und Taylor (ähnlich FDM)
- Bilanzgleichungen für Masse und Impuls für jede Zelle → algebraische Gleichungen für die Werte an Zellen-Mittelpunkten
- Zeitabhängigkeit: Integration über die Zeit mit Standard-Verfahren (z.B. Runge-Kutta)
- Vorteile von FVM
  - Erhaltungssätze erfüllt selbst bei geringer Rechengenauigkeit
  - gut anpassbar an beliebige Geometrie
  - Verfeinerung an kritischen Stellen möglich
- Nachteile von FVM
  - nicht ganz so flexible Zellen wie bei FEM
  - mathematisch noch nicht so weit analysiert wie FDM und FEM

# Modellierung der Turbulenz

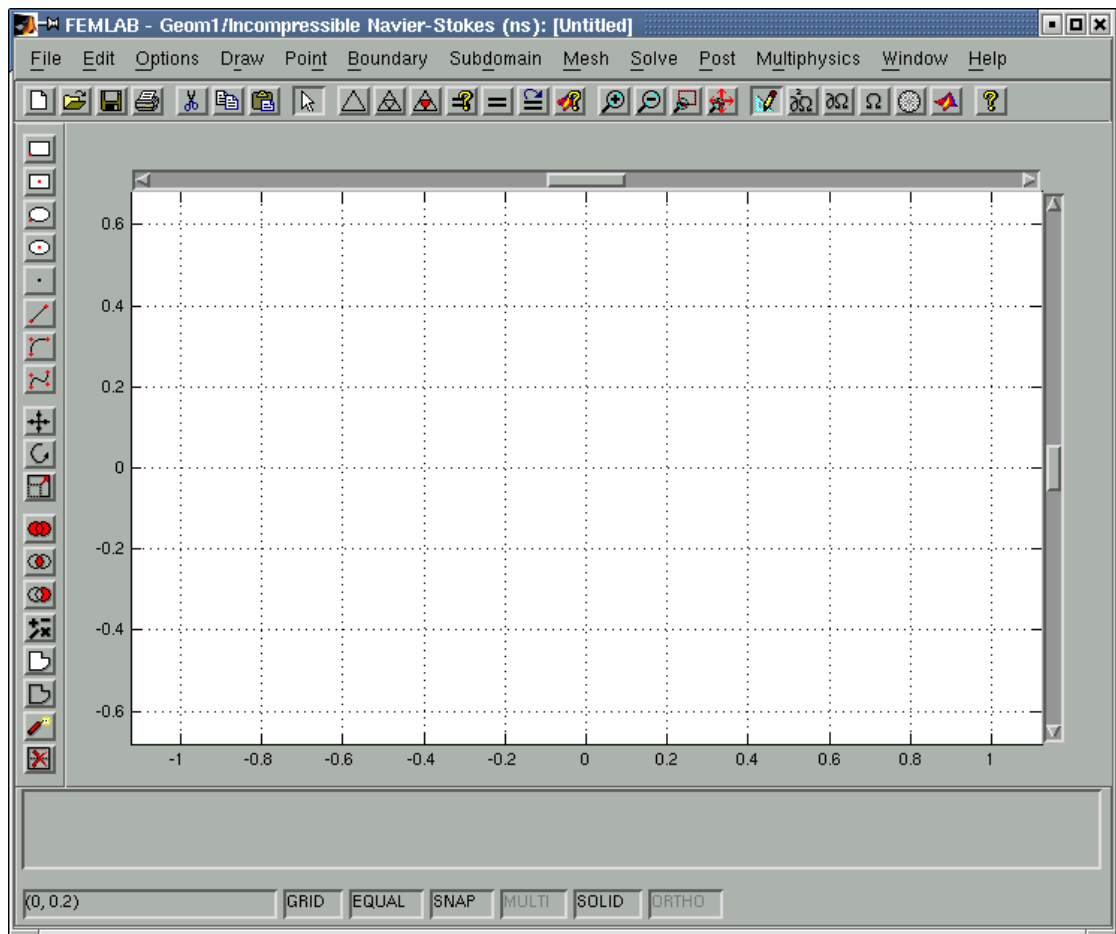
- Grundproblem:
  - viele kleine Wirbel und ggf. Grenzschichten bei turbulenter Strömung
  - beeinflussen mittleres Strömungsfeld
  - sehr hohe Raum- und Zeitauflösung für Numerik nötig →
    - riesiger Speicher- und Rechenbedarf
    - selbst mit heutigen Superrechnern oft nicht machbar
- Lösungsansatz:
  - Aufteilen der Größen in Mittelwerte und kleine Schwankungen (Turbulenzanteil)
  - Mittelwerte beschrieben durch Navier-Stokes-Gleichungen + zusätzliche Turbulenzterme
  - Turbulenz wirkt wie zusätzliche Schubspannung  $\tau_t$
  - Turbulenzterme durch empirische Ansätze modellieren
- Turbulente Viskosität  $\eta_t$ :
  - häufige Grundannahme (Boussinesq):
    - $\eta_t$  ähnlich wie bei Newtonschem Fluid
    - $$\tau_t = \eta_t \frac{\partial u}{\partial y}$$
  - ergibt z.B. zusätzlichen Term in NS1
    - $$\eta_t \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$
  - $\eta_t$  abhängig von allen Mittelwerten (u, v, p,  $\rho$  etc.)
  - Form von  $\eta_t$  aus empirischen Modellen (Turbulenzmodelle)
  - gelten i.a. nur für spezielle Bereiche
  - Konsequenz für die Numerik
    - noch kompliziertere Gleichungen
    - geringere Raum- und Zeitauflösung nötig
    - → mit heutigen Rechnern häufig zufriedenstellende Ergebnisse in akzeptabler Zeit
  - aber: gute Kenntnisse (Gültigkeitsbereiche etc.) beim Anwender unverzichtbar!
- k- $\epsilon$ -Modell:
  - beschreibt  $\eta_t$  mit kinetischer Energie k und Dissipationsrate  $\epsilon$  der Turbulenz
  - k und  $\epsilon$  selbst beschrieben durch komplizierte Differentialgleichungen mit u, v, p etc.
  - in vielen Anwendungsfällen sehr gute Genauigkeit
  - modifizierte Versionen für spezielle Situationen
- Aufgaben:
  - Aufgabe 5

# Das Simulationsprogramm Femlab

- Eigenschaften:
  - flexibles Programm zur Simulation partieller Differentialgleichungen (PDEs)
  - Hersteller Comsol (deutsche Vertretung)
  - basiert auf Matlab von The MathWorks Inc. (deutsche Vertretung)
  - verwendet FEM zur Lösung
  - viele vordefinierte PDEs für verschiedene Anwendungsbereiche
  - erlaubt Definition eigener PDEs
  - fertige Turbulenzmodelle im Chemical Engineering Module
- Vorgehensweise:
  - Definition der Geometrie (Draw Mode)
  - Festlegen der Randbedingungen (Boundary Mode)
  - Eingabe von Materialkoeffizienten und Anfangsbedingungen (Subdomain Mode)
  - Erzeugen des Gitters (Mesh Mode)
  - Lösen der Gleichungen (Solve Mode)
  - Darstellen der Ergebnisse (Post Mode)
- Starten einer Strömungs-Simulation:
  - Aufruf femlab in Matlab liefert Auswahlfenster
    - Auswahl der Dimension (z.B. 2d)
    - Auswahl der Grundgleichungen (jeweils durch Doppelklick):  
Physics modes → Incompressible Navier-Stokes → Stationary

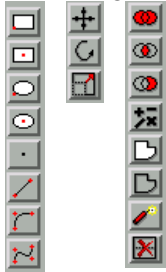


- graphische Oberfläche von Femlab erscheint

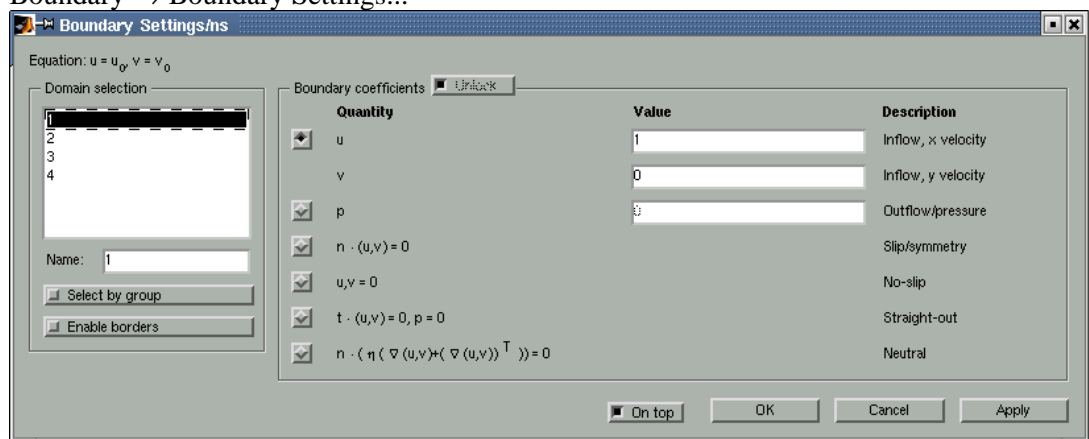


- Grundfunktionen der Oberfläche:
  - Toolbar-Leiste mit wichtigen Funktionen
  - Datei-Funktionen
    -
  - Cut-and-Paste, Auswahl
    -
  - Anzeigebereich (Lupenfunktion)
    -
  - Auswahl des Modes
    -
  - umfangreiche Online-Hilfe
- Definition der Geometrie (Draw Mode):
  - Zeichenobjekte rasten (normalerweise) an Gitterpunkten ein
  - dazu Achsen und Gitter wählen
    - Options → Axis/Grid Settings
    - xmin/xmax/ymin/ymax: dargesteller Bereich
    - X/Y spacing: Abstände der Gitterlinien
    - Extra X/Y: zusätzliche Gitterlinien

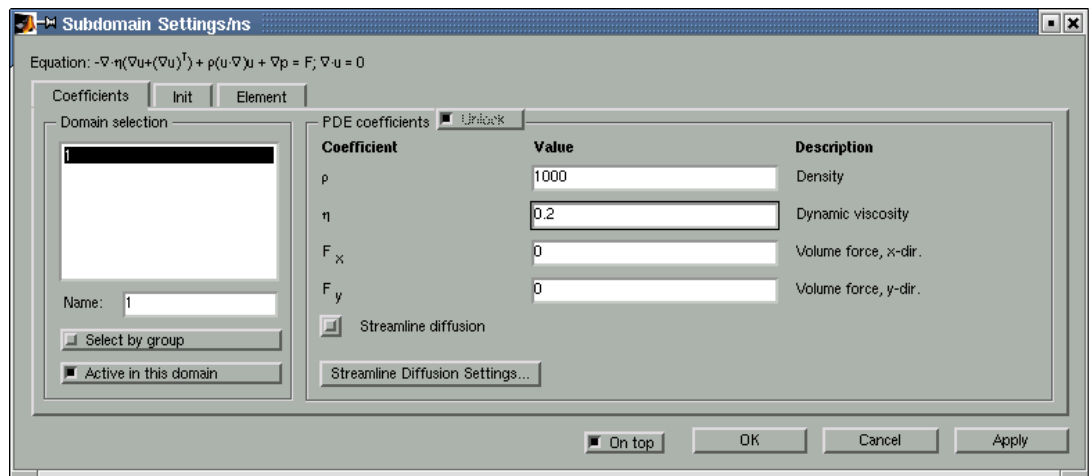
- Werkzeugleiste links





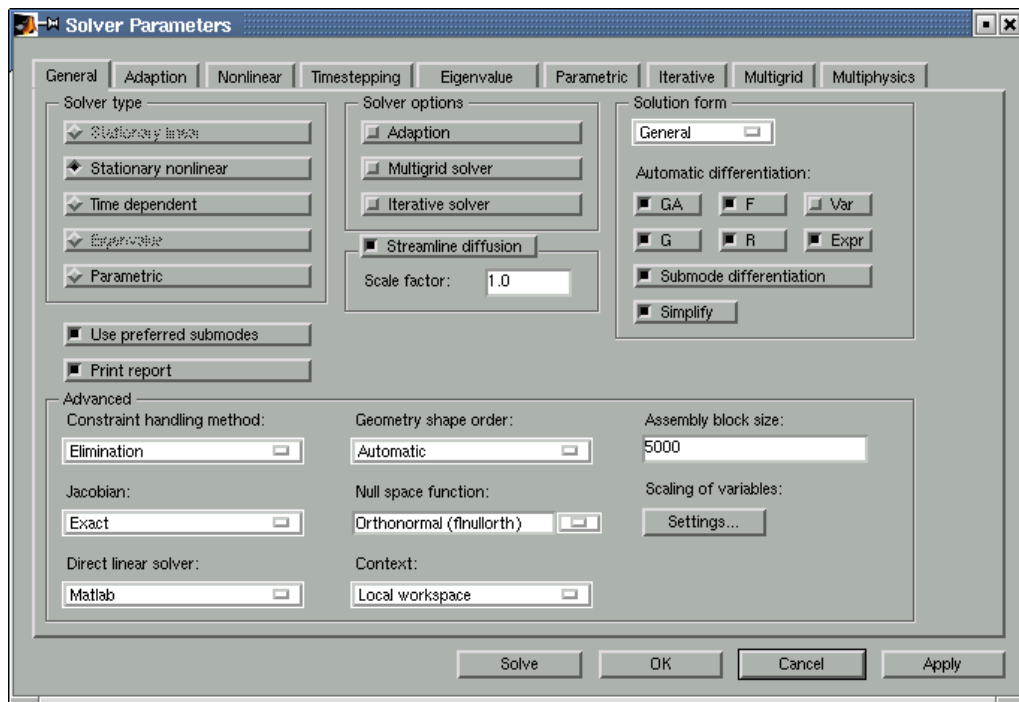
- Einfügen eines Objekts (Rechteck, Kreis, Linie,...)
- Verändern eines Objekts (Verschieben, Drehen, Skalieren)
- Zusammenfassen von Objekten (Vereinigung, Durchschnitt, ...)
- wesentlich umfangreicher und komplizierter für 3d-Modelle
- Festlegen der Randbedingungen (Boundary-Mode):
  - Eingabe unter
    - Boundary → Boundary Settings...



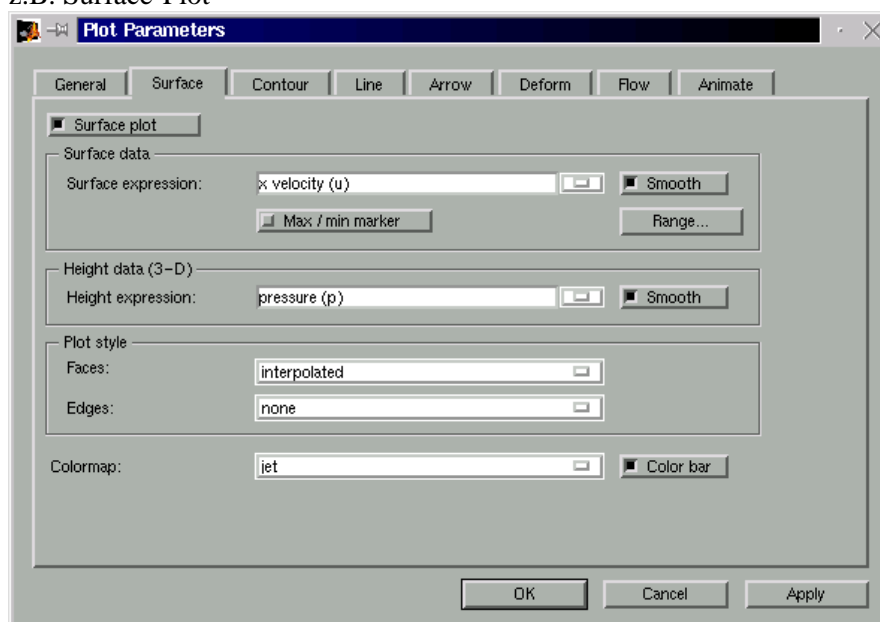
- jeweils für jeden Randabschnitt
- wichtigste Möglichkeiten
  - Werte für u und v (Einlass)
  - Werte für p (Auslass)
  - $u = v = 0$  (Wand)
- Eingabe von Materialkoeffizienten und Anfangsbedingungen (Subdomain-Mode):
  - Eingabe unter
    - Subdomain → Subdomain Settings...



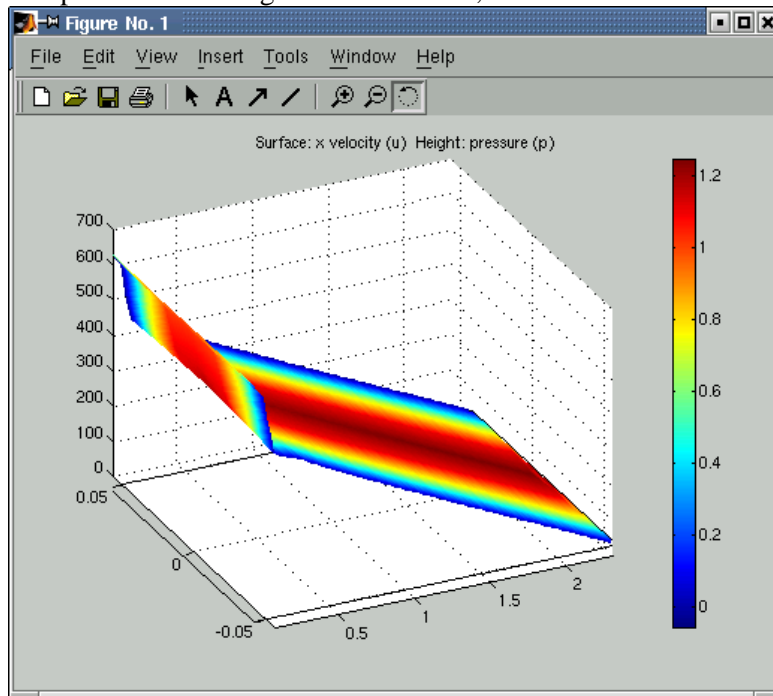
- Werte für
  - Druck
  - Viskosität
  - äußere Kräfte
- auf Blatt "Init" Anfangsbedingungen für zeitabhängige Probleme bzw. Startwerte der Iterationen festlegen
- Erzeugen des Gitters (Mesh-Mode):
  - Toolbar-Funktionen
    - 
    - einfaches Startgitter
    - globale Verfeinerung
    - Verfeinerung von ausgewählten Bereichen
  - Elemente müssen möglichst gleichseitig sein
  - Ausgleichen des Gitters nach lokalen Verfeinerungen
    - Mesh → Jiggle Mesh
- Lösen der Gleichungen (Solve-Mode):
  - zahllose Parameter zur Kontrolle des Solvers ()



- besonders wichtig für Navier-Stokes-Gleichungen
  - "Streamline Diffusion" an
  - "Highly Nonlinear Problem" auf Blatt "Nonlinear" anklicken
- Starten des Solvers (☰)
- Darstellen der Ergebnisse (Post-Mode):
  - viele verschiedene Darstellungstypen
  - Auswahl der darzustellenden Größen und Darstellungstypen mit Plot-Parametern (🔍)
  - z.B. Surface-Plot

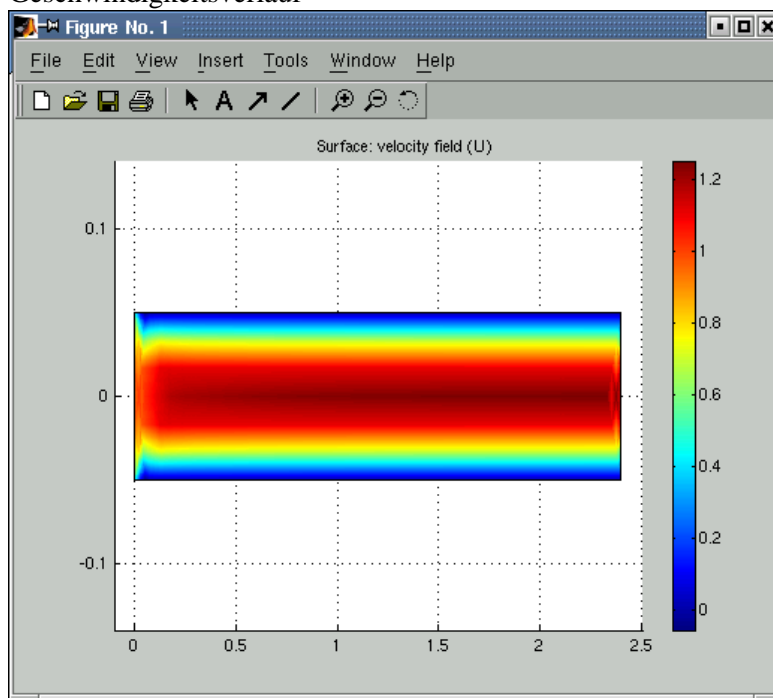


- darzustellende Größe als Farbcode
- ggf. weitere Größe als Höhe
- Beispiel: Geschwindigkeit als Farbcode, Druck als Höhe

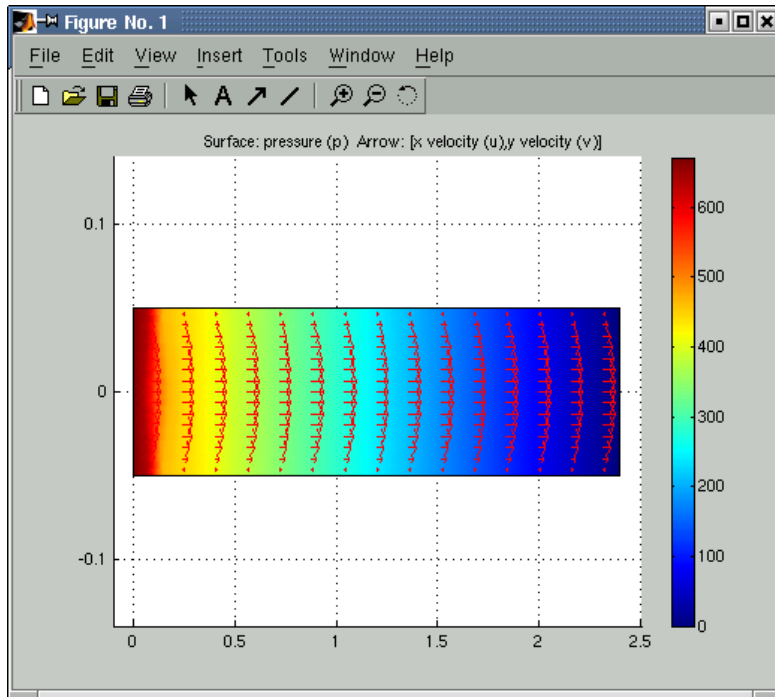


## Beispiel: Zweidimensionale Rohrströmung

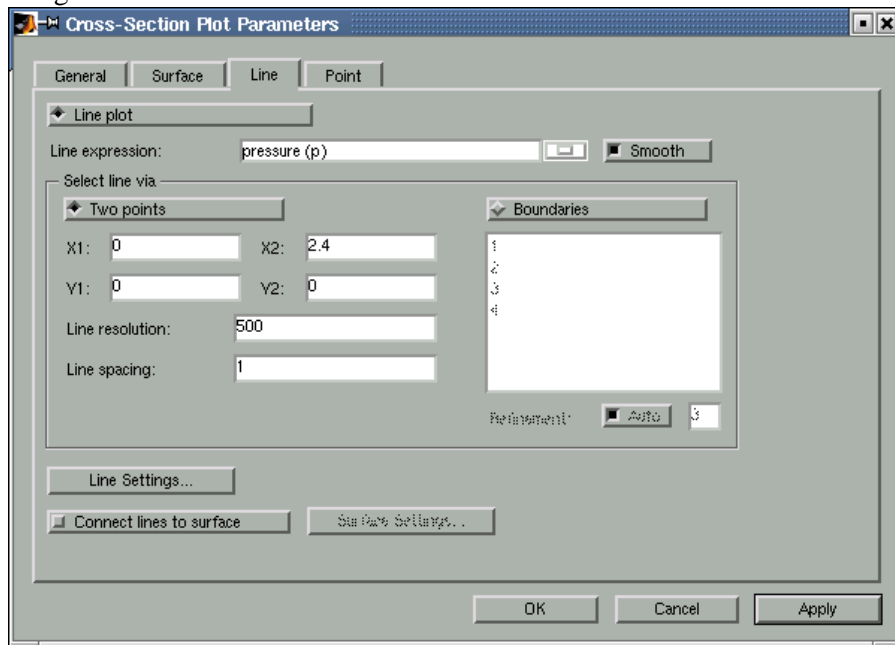
- Modell:
  - Rechteck der Länge 2.4 und der Breite 0.1 ("Rohr")
  - Randbedingungen
    - oben und unten  $u = v = 0$  (Wand)
    - links  $u = 1, v = 0$  (Einlass)
    - rechts  $p = 0$  (Auslass)
  - Materialgrößen (Subdomain-Parameter)
    - $\rho = 1000$
    - $\eta = 100/\text{Re}$  (zunächst  $\text{Re} = 500$ )
    - keine Volumenkräfte
  - Anfangsbedingungen (Ausgangspunkt für nichtlinearen Solver)
    - $u = 1$
    - $v = 0$
    - $p = 0$
- Laminar, mit geringer Auflösung:
  - verwendet Anfangsgitter (136 Elemente) und  $\text{Re} = 500$
  - Geschwindigkeitsverlauf



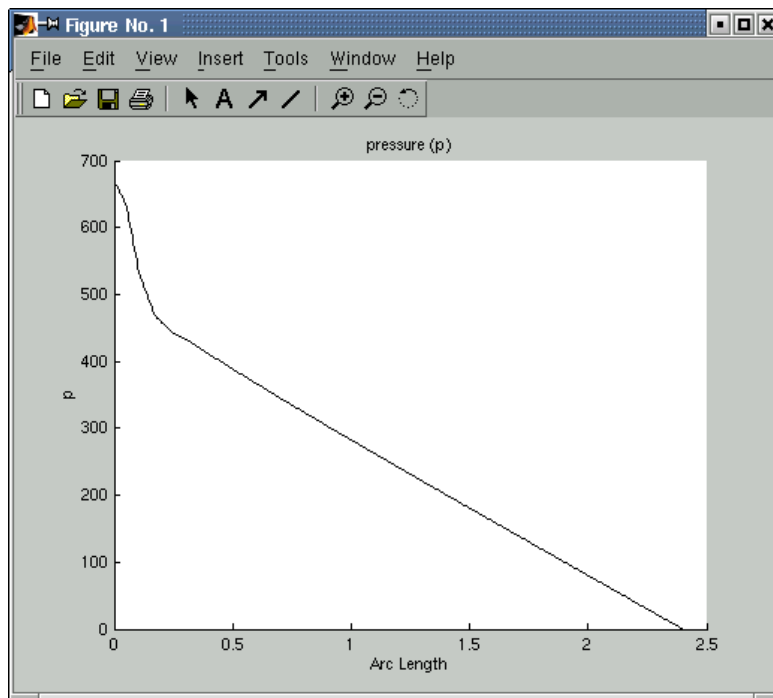
- nach kurzer Einlaufphase konstante Strömung bis kurz vor Auslauf
- Druckverlauf



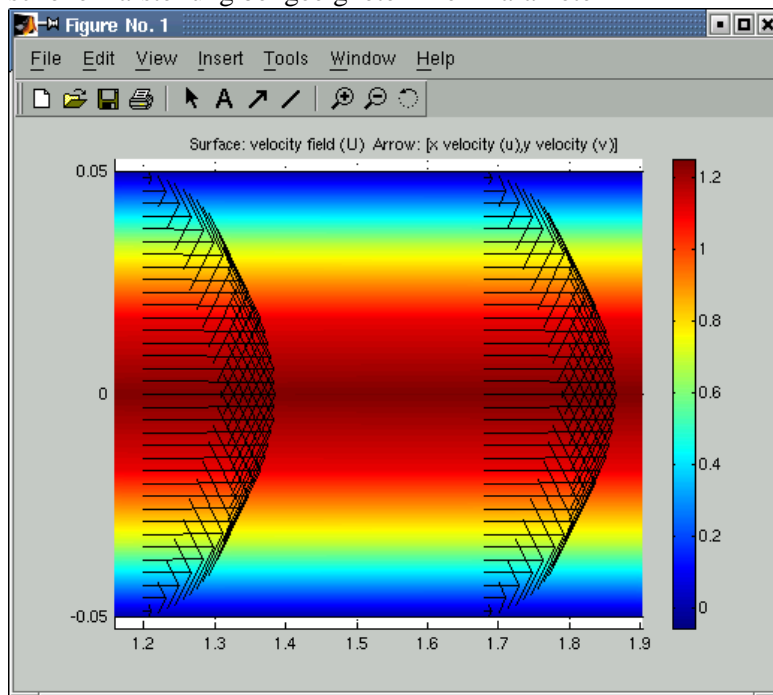
- Längsschnitt unter Post/Cross-Section Plot Parameters...



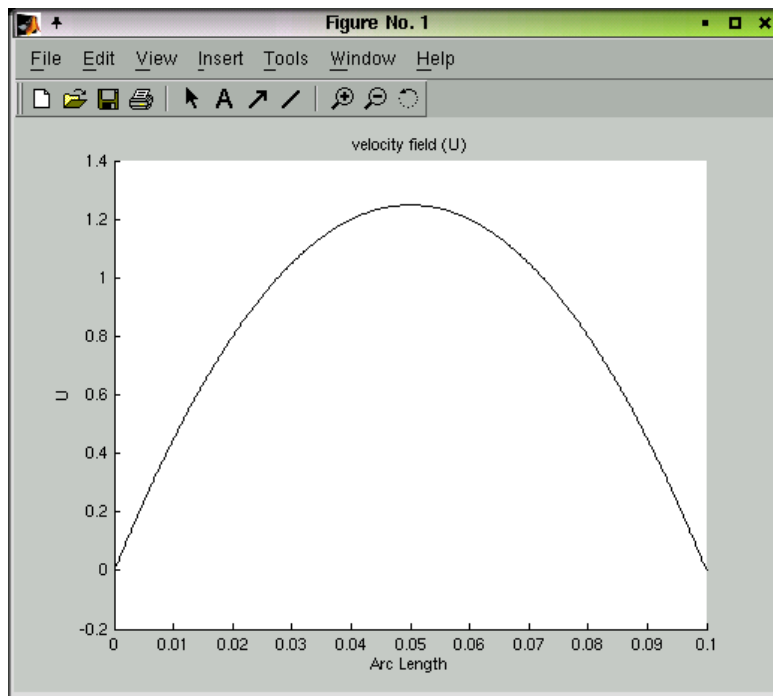
liefert



- nach Einlaufphase bis zum Schluss linear
- Geschwindigkeitsverlauf im Querschnitt
- schöne Darstellung bei geeigneten Pfeil-Parametern



- oder als Cross-Section Plot



- nahezu parabolisch, obwohl nur ein Gitterpunkt im Innern der Platte liegt!
- Erklärung: quadratische Elemente verwendet
- Bestimmung des Druckverlusts aus Femlab-Daten:
  - Ergebnisse für  $p$  im linearen Bereich ablesen
  - dazu Druck als "Surface-Plot" anzeigen lassen und gewünschte Stelle anklicken
  - Ergebnisse:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5, & p_1 &= 389 \\ x_2 &= 2.4, & p_2 &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\Delta p}{l} &= \frac{p_1 - p_2}{x_2 - x_1} = 205 \end{aligned}$$

- Vergleich mit Theorie (Vorsicht: zu naiv!):
  - Ausgangspunkt war  $Re = 500$
  - laminar  $\Rightarrow$ 
    - $\lambda = \frac{64}{Re} = 0.128$
  - mit den Werten für die Simulation und  $\bar{w} = 1$  am Eingang
    - $\frac{\Delta p}{l} = \frac{1}{2} \lambda \frac{\bar{w}^2 \rho}{d} = 640$
  - sehr schlechtes Ergebnis!
- Fehler in der Berechnung:
  - Geschwindigkeit am Anfang nicht laminar/parabolisch
  - stattdessen  $w_{\max}$  ablesen im parabolischen Bereichen
    - $w_{\max} = 1.25 \Rightarrow \bar{w} = 0.5 \quad w_{\max} = 0.625$

- damit neue Werte:

$$\text{Re} = \frac{\bar{w}d\rho}{\eta} = 312.5$$

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} = 0.205$$

- $\frac{\Delta p}{l} = 400$

- besser, aber immer noch schlecht!

- Wahre Ursache der Abweichung:

- Formeln für (kreisrundes) Rohr benutzt, hier aber 2-dim. Rechnung (Platte)

- analoge Berechnungen wie beim Rohr liefern

$$\bar{w} = \frac{2}{3}w_{max}$$

- $\lambda = \frac{24}{\text{Re}}$

- damit folgt aus  $w_{max} = 1.25$

$$\bar{w} = 0.833$$

$$\text{Re} = \frac{\bar{w}d\rho}{\eta} = 416.7$$

$$\lambda = \frac{24}{\text{Re}} = 0.0576$$

- $\frac{\Delta p}{l} = \frac{1}{2}\lambda\frac{\bar{w}^2\rho}{d} = 200$

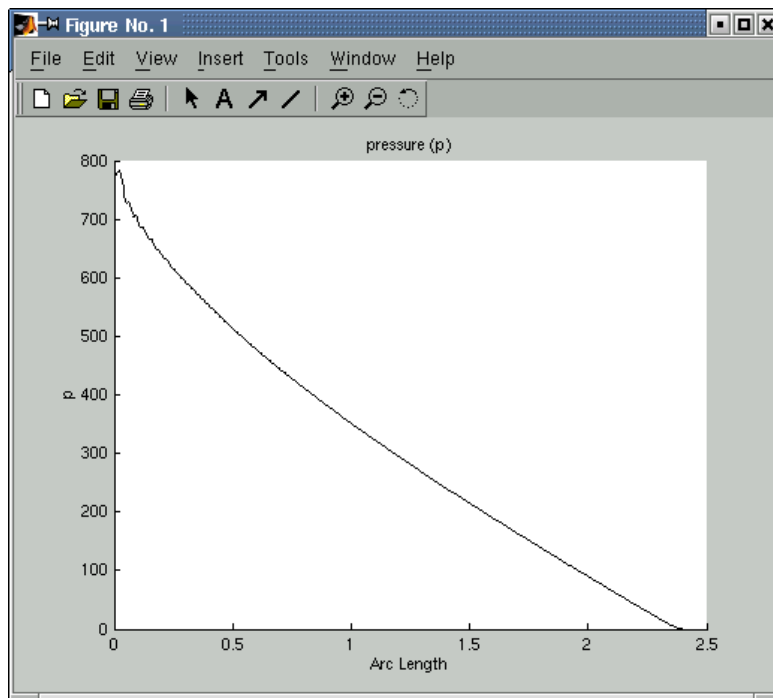
- gute Übereinstimmung mit Femlab-Rechnung

- Laminar, mit höherer Auflösung:

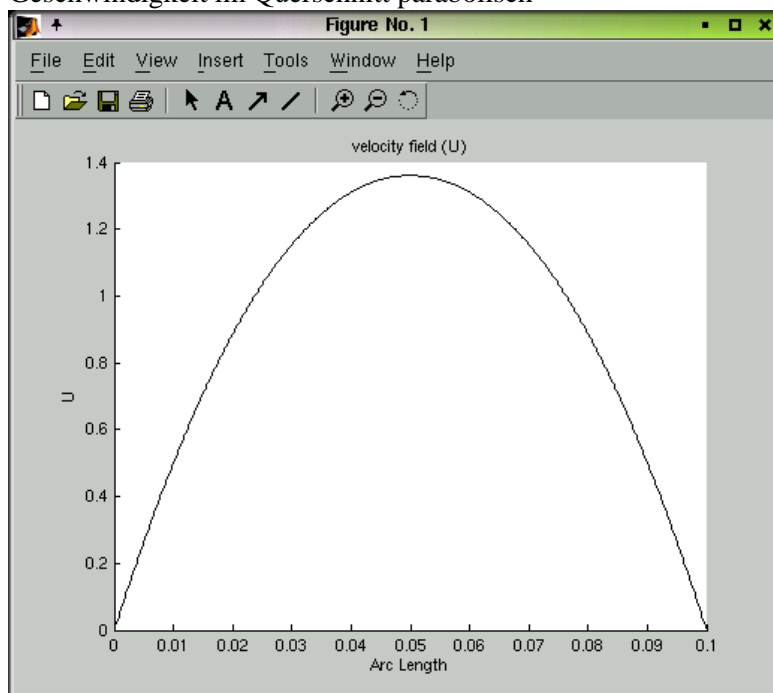
- Gitter zweimal verfeinern (2176 Elemente, 7 Punkte im Innern)

- Rechenzeit nun 3 Minuten (Zeiten auf PentiumIII/800MHz, 256MB)

- Druckverlauf noch länger linear

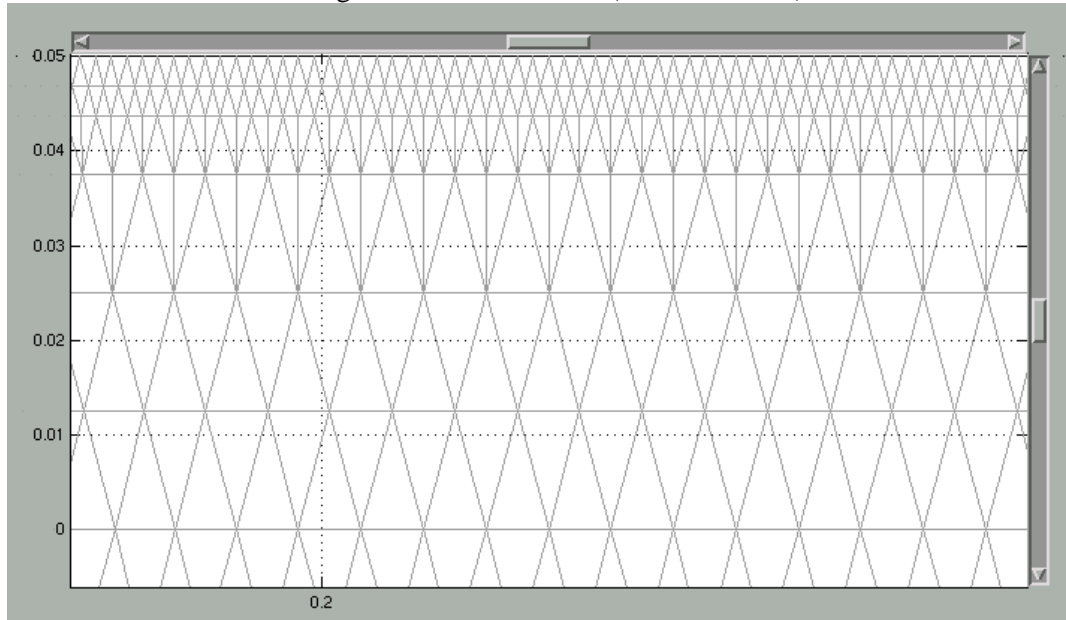


- Geschwindigkeit im Querschnitt parabolisch

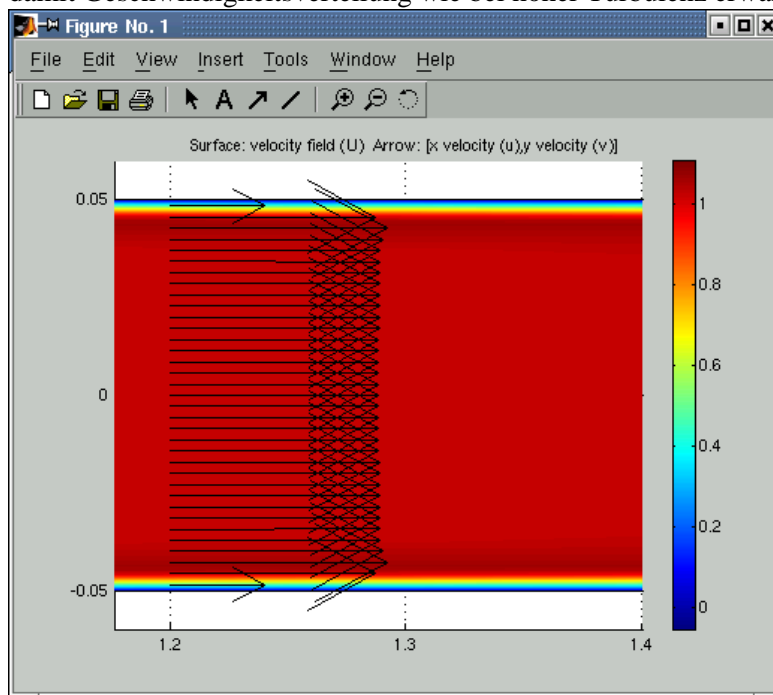


- weitere Verfeinerung des Gitters →
  - Rechenzeit von 12 Minuten
  - fast identische Ergebnisse
- Turbulente Strömung:
  - $Re = 100000$

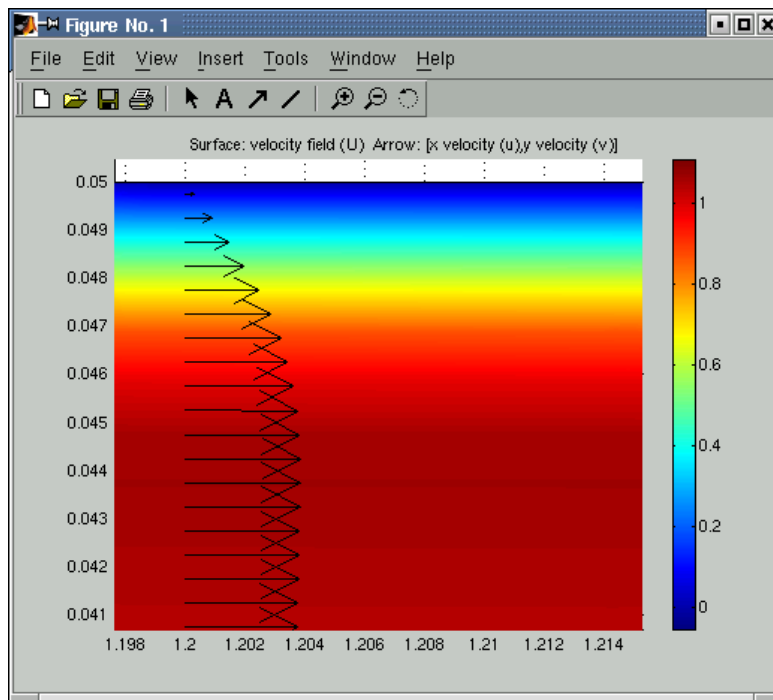
- gleiches Gitter wie eben → bricht ab mit "Stepsize too small"
- Grundproblem: Randbereich ist sehr wichtig bei Turbulenz
- wesentlich höhere Auflösung nur im Grenzbereich (7896 Elemente)



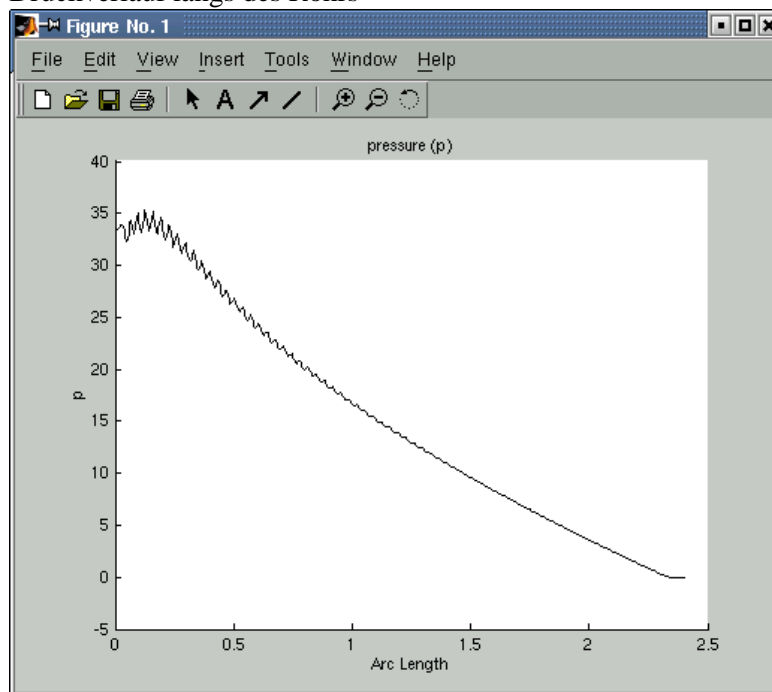
- damit Geschwindigkeitsverteilung wie bei hoher Turbulenz erwartet



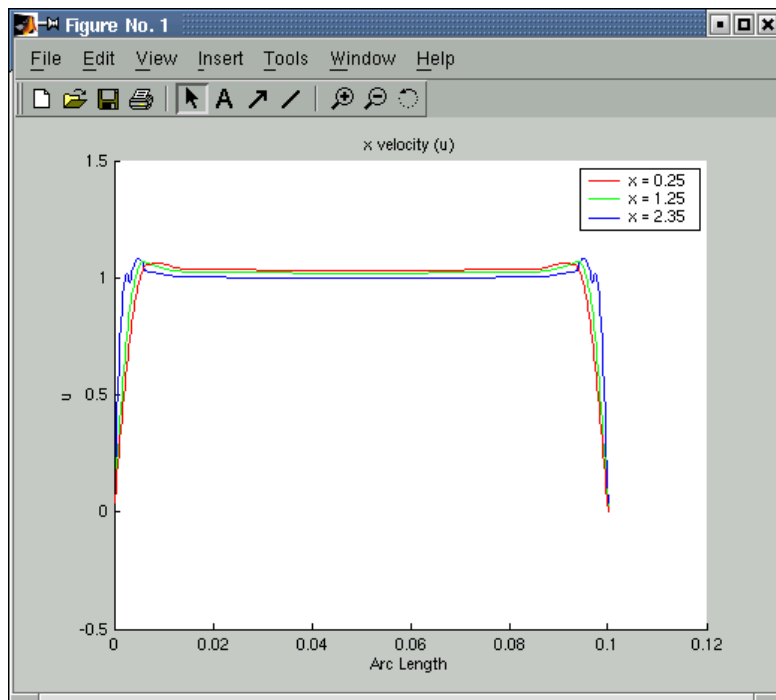
- Detail der Randzone



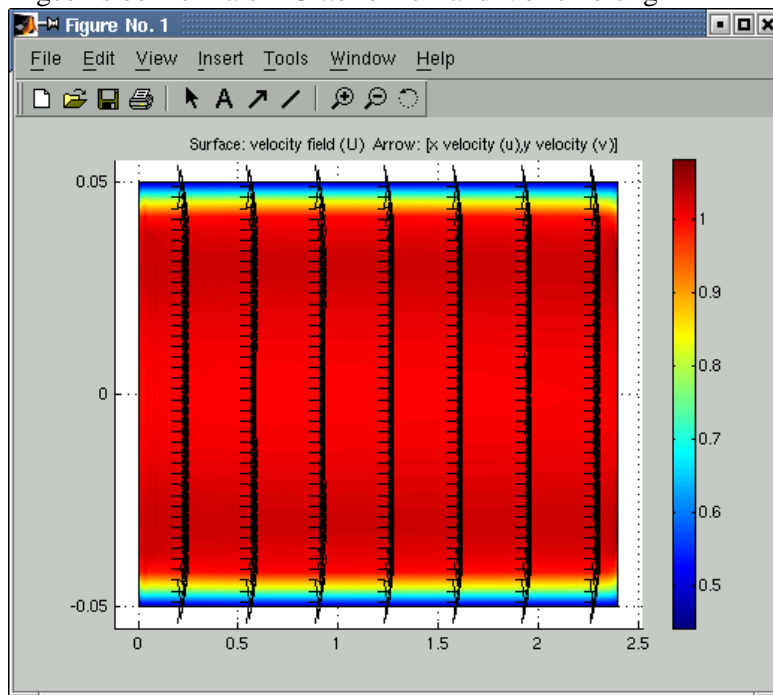
- bessere Darstellung mit Quer- und Längsschnitten
  - Druckverlauf längs des Rohrs



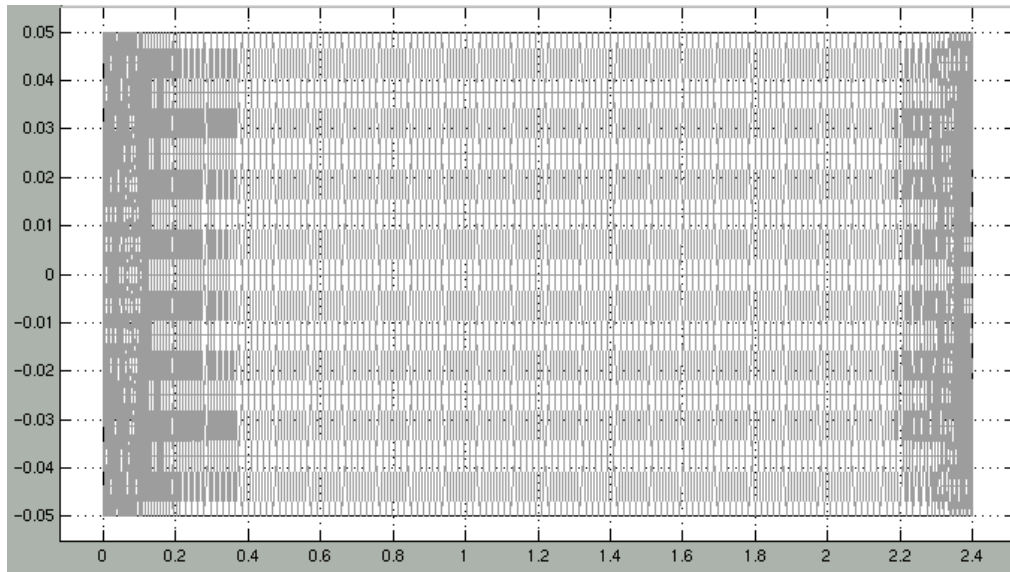
- Geschwindigkeit an drei Querschnitten



- Turbulent, mit adaptivem Solver:
  - Solver verfeinert Gitter selbsttätig an "kritischen Stellen"
  - Ergebnis bei normalem Gitter ohne Rand-Verfeinerung



- berechnete Randschicht viel zu groß
- Verfeinerungen nur im Einlass- und Auslassbereich

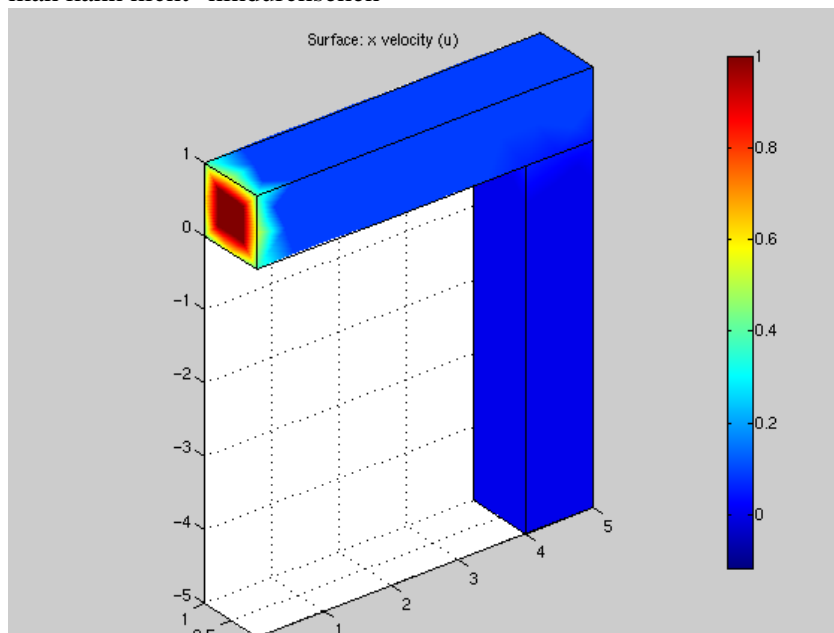


○ Fazit:

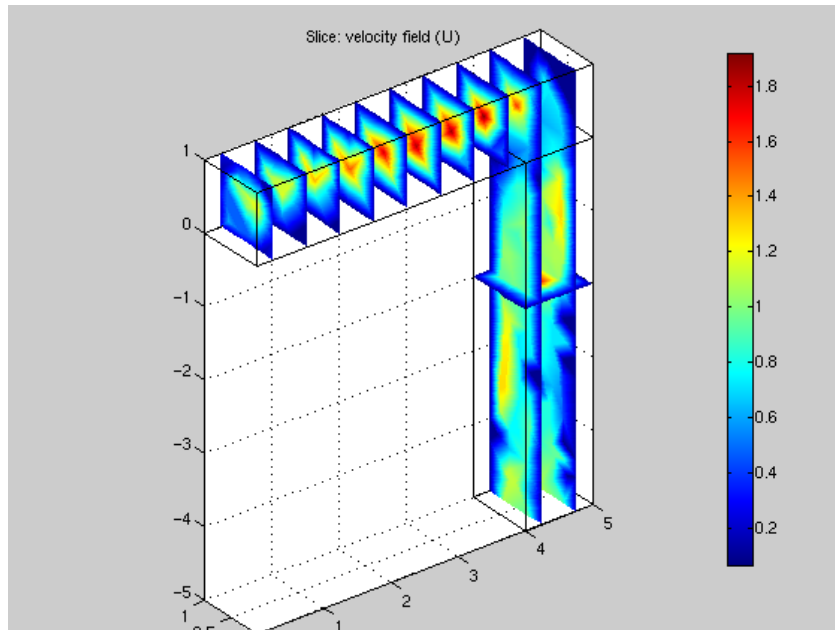
- Ergebnisse von Strömungsberechnungen müssen kritisch gesichtet werden
- Rechnungen sinnlos ohne Kenntnisse des Benutzers

# Beispiel: Dreidimensionale Strömung durch einen Winkel

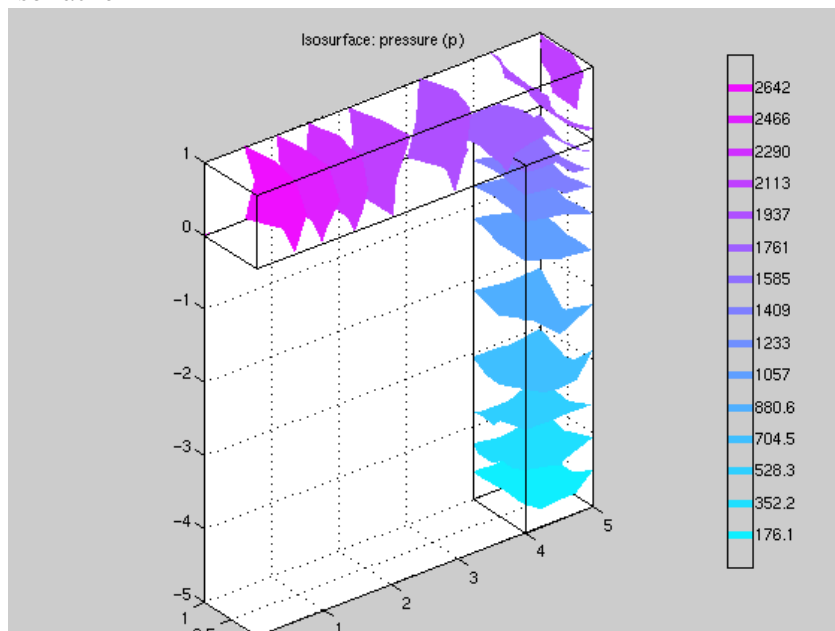
- Modell:
  - Strömung durch ein abgelenktes Rohr mit quadratischem Querschnitt
  - turbulent ( $Re = 50000$ )
  - niedrige Auflösung
    - einfachstes Gitter (911 Elemente)
    - keine Randschichten modelliert
    - → konvergiert nicht
  - Ergebnisse sind höchstens grobe Näherung
- Darstellung der Daten (Visualisierung):
  - Grundproblem bei 3d
    - ganzer Raum voll Daten
    - man kann nicht "hindurchsehen"



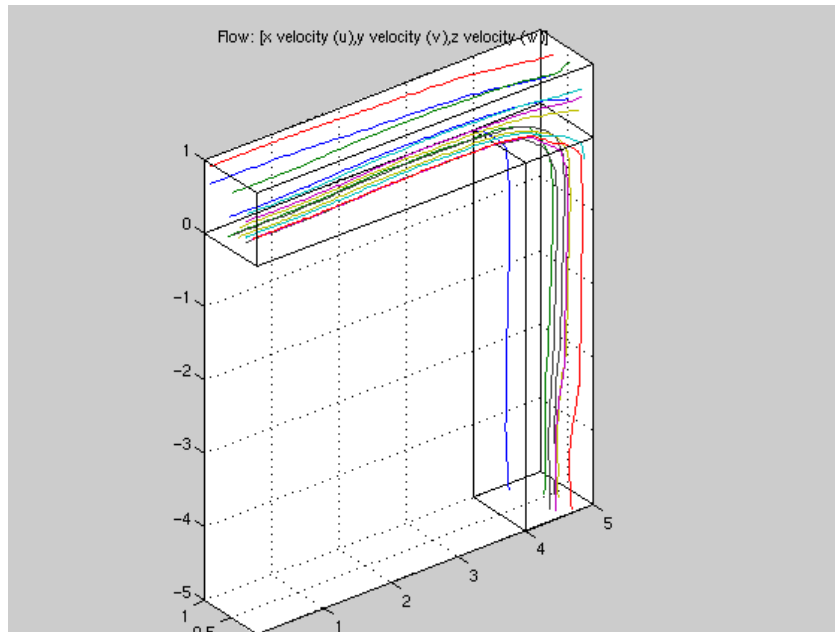
- viele Techniken, z.B.
  - Schnittebenen



- Isoflächen



- Stromlinien



- Aufgaben:
  - Aufgabe 6

# Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6

## Aufgabe 1

- Durch eine gut isolierte Dampfleitung von 1 km Länge und 15 cm Durchmesser strömen stündlich 30 t Dampf. Die Wandrauigkeit beträgt  $k = 0.05$  mm. Wie groß ist der Druckverlust bei einem Anfangsdruck von 50 bar?
- Werte:
  - Anfangsdichte  $\rho_1 = 16.4$  kg/m<sup>3</sup>
  - Viskosität  $\eta_1 = 2.6 \cdot 10^{-5}$  Pa s
  - Adiabatenkoeffizient  $\kappa = 1.28$
- Lösung

## Aufgabe 2

- An einem Druckbehälter, in dem sich Luft unter einem Druck von 6 bar und einer Temperatur von 300 K befindet, ist eine Lavaldüse angeschlossen, deren kleinster Querschnitt  $1 \text{ cm}^2$  beträgt. Der Außendruck betrage 1 bar.
  1. Wie groß ist der austretende Luftmassenstrom  $\dot{m}$ ?
  2. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit  $w_a$ ?
  3. Wie groß ist die Temperatur  $T_a$ ?
  4. Wie groß ist die Austrittsfläche  $A_a$ ?
- Werte:
  - $R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$  für Luft
- Lösung

## Aufgabe 3

- Eine zweidimensionale Strömung  $w$  sei gegeben durch
  - $u(x,y) = -y$
  - $v(x,y) = x$
  - 1. Zeigen Sie, dass  $w$  die Kontinuitätsgleichung erfüllt.
  - 2. Benutzen Sie die Navier-Stokes-Gleichungen, um den Druck in der Strömung (ohne äußere Kräfte) zu berechnen.
- Lösung

## Aufgabe 4

- Berechnen Sie für die folgenden Strömungsfelder die Drehung  $\omega$  und zeigen Sie, dass die Wirbeltransportgleichung erfüllt ist:

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- 
- wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 
- Lösung

## Aufgabe 5

- Lösen Sie die Differentialgleichung

$$u' - u = 0$$

- $u(0) = 1$

- für das Intervall  $[0, 1]$ , indem Sie es in  $N$  gleiche Teile teilen und die FDM per Hand anwenden. Wählen Sie dazu explizit die Werte  $N = 3, 6, 12$  und vergleichen Sie die Ergebnisse mit der exakten Lösung.
- Lösung

## Aufgabe 6

- Modellieren Sie die Umströmung eines Kreises in 2d (Zylinder-Umströmung) für die Reynoldszahlen  $Re = 10, 30000, 3000000$ .
- Stellen Sie jeweils die Geschwindigkeit und den Druck in der Strömung graphisch dar.
- Tip: Modellieren Sie die Außenwelt als ein großes Rechteck mit konstanter Anblas-Geschwindigkeit  $u$ .
- Lösung

# Anhang

- Literatur
- Nachweise
- Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

## Literatur

1. W.Bohl, Technische Strömungslehre  
Vogel, 11. Aufl 1998, ISBN: 3-8023-1740-8
2. K.Gersten, Einführung in die Strömungsmechanik  
Vieweg, 6. Aufl 1991, ISBN 3-528-43344-2
3. H. Oertel, Strömungsmechanik  
Vieweg 1999, ISBN 3-528-03893-4
4. K.Gersten, H.Herwig: Strömungsmechanik  
Vieweg 1992, ISBN 3-528-06472-2
5. H. Iben: Strömungslehre in Fragen und Aufgaben  
Teubner 1997, ISBN: 3-8154-3033-X
6. Handbücher zu FEMLAB, Comsol AB, 2000

# Nachweise

- Bilder:

| Bild-Nr  | Herkunft |
|----------|----------|
| 71       | [1]      |
| 70,73,75 | [2]      |
| 80       | [3]      |

## Exkurs: Herleitung der lokalen Drehung

- Längs einer Bahnlinie verändert sich die Geschwindigkeit während der kleinen Zeit  $dt$  um

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t+dt) \\ v(t+dt) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u(t) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \\ v(t) + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u + \frac{\partial u}{\partial x} u dt + \frac{\partial u}{\partial y} v dt \\ v(t) + \frac{\partial v}{\partial x} u dt + \frac{\partial v}{\partial y} v dt \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt & \frac{\partial u}{\partial y} dt \\ \frac{\partial v}{\partial x} dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: D\vec{w} \end{aligned}$$

- 
- Die Matrix  $D$  wird zerlegt in eine Drehmatrix  $A$  und einen symmetrischen Anteil  $S$  gemäß
  - $D = A S$
- wobei

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt & 1 \end{pmatrix} \\ S &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} dt & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dt & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} dt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 
- Anmerkung: Die Beziehung  $D = A S$  gilt, wenn quadratische Terme in  $dt$  vernachlässigt werden.
- Die Matrix  $S$  kann als symmetrische Matrix diagonalisiert werden, sie hat reelle Eigenwerte. Sie entspricht damit einer lokalen Verzerrung (Stauchung bzw. Streckung) des Strömungsfelds.
- $A$  kann als Drehmatrix geschrieben werden. Mit der Abkürzung

$$\omega := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- 
- gilt nämlich (in linearer Näherung in  $dt$ )

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -\omega dt \\ \omega dt & 1 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} \cos(\omega dt) & -\sin(\omega dt) \\ \sin(\omega dt) & \cos(\omega dt) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 
- $A$  beschreibt also eine Drehung um den kleinen Winkel  $\omega dt$ .  $\omega$  ist daher die lokale Winkelgeschwindigkeit der Drehung.

# Lösung von Aufgabe 1

- Bestimmung der Anfangsgeschwindigkeit:

$$\dot{m} = \rho A \bar{w}_1 = \rho \frac{\pi}{4} d_1^2 \bar{w}_1$$

○  $\Rightarrow \bar{w}_1 = \frac{4\dot{m}}{\pi d_1^2 \rho} = 28.75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

- Kennzahlen:

$$\frac{k}{d} = 3.33 \cdot 10^{-4}$$

○  $\text{Re} = \frac{\bar{w}_1 d}{\nu_1} = \frac{\bar{w}_1 d \rho_1}{\eta_1} = 2.72 \cdot 10^6$

- Rohrreibungszahl:

- $\text{Re } k/d = 907 \rightarrow$  Übergangsbereich
- Schätzwert aus dem Diagramm
  - $\lambda \approx 0.015$
- Iterieren mit der Formel von Colebrook  $\rightarrow$ 
  - $\lambda = 0.0155$

- Druckverlust:

○  $\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(\kappa+1)/\kappa} - 1 = -\frac{\kappa+1}{\kappa} \lambda \frac{\rho_1 \bar{w}_1^2}{2dp_1} l = -0.250$

○  $\Rightarrow p_2 = 42.5 \text{ bar}$

○  $\Rightarrow p_1 - p_2 = 7.5 \text{ bar}$

## Lösung von Aufgabe 2

1. Massenstrom  $\dot{m}$ :

- Da das Verhältnis der Drücke größer ist als der kritische Wert, wird am kleinsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit erreicht. Dort gilt also

$$\begin{aligned}\dot{m} &= A_{min} j^* \\ &= A_{min} \frac{j^*}{\rho_0 w_{max}} \rho_0 w_{max} \\ &= A_{min} 0.259 \rho_0 w_{max}\end{aligned}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R_i T_0} = 6.96 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$w_{max} = \sqrt{2c_p T_0} = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} R_i T_0} = 776.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- $\Rightarrow \dot{m} = 0.140 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$

2. Austrittsgeschwindigkeit  $w_a$ :

- $w_a = w_{max} \sqrt{1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}} = 491.6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

3. Austrittstemperatur  $T_a$  mit Energiesatz:

$$c_p T_0 = \frac{1}{2} w_a^2 + c_p T_a$$

- $\Rightarrow T_a = T_0 - \frac{w_a^2}{2c_p} = 179.8 \text{ K}$

4. Austrittsfläche aus Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{m} = \rho_a w_a A_a$$

$$\rho_a = \frac{p_a}{R_i T_a} = 1.937 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- $\Rightarrow A_a = 1.47 \text{ cm}^2$

## Lösung von Aufgabe 3

1. Einsetzen von  $u$  und  $v$  in KG ergibt sofort

- $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

2. Bestimmen des Drucks:

- Reibungsterme  $\sim \eta$  verschwinden wegen

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

- $u, v$  in NS1 einsetzen  $\rightarrow$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\rho x = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

- $\Rightarrow p = \frac{1}{2}x^2 + C_1(y)$

- aus NS2 folgt

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho y = -\frac{\partial p}{\partial y}$$

- $\Rightarrow p = \frac{1}{2}y^2 + C_2(x)$

- beide Ausdrücke zusammen liefern

- $p = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C = \frac{1}{2}r^2 + C$

- Druck nimmt mit Quadrat des Abstands vom Ursprung zu

## Lösung von Aufgabe 4

- Aus der Definitionsgleichung

$$\circ \quad \omega := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

- erhält man für die drei angegebenen Strömungen

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{r^3} - \left( -\frac{x^2}{r^3} \right) \right) = \frac{1}{2r}$$

$$\circ \quad \omega_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{y^2 - x^2}{r^4} - \frac{y^2 - x^2}{r^4} \right) = 0$$

- Einsetzen in die Wirbeltransportgleichung liefert bei  $\vec{w}_1$  und  $\vec{w}_3$  sofort 0, da die Ableitungen von  $\omega$  bzw.  $\omega$  selbst verschwinden.
- Für  $\vec{w}_2$  erhält man

$$\circ \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{x}{2r^3} \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = -\frac{y}{2r^3}$$

- Damit

$$\circ \quad u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{r} \frac{(-1)}{2r^3} (-yx + xy) = 0$$

## Lösung von Aufgabe 5

- Teilt man das Intervall  $[0, 1]$  in  $N$  gleiche Teile, beträgt die Schrittweite
  - $h = 1/N$
- Die Gitterpunkte sind daher
  - $x_i = i/N, \quad i = 0 \dots N$
- Die Funktionswerte an den Gitterpunkten seien
  - $u(x_i) =: u_i, \quad i = 0 \dots N$
- Davon ist  $u_0 = 1$  bekannt, die anderen  $N$  Werte gesucht.
- Die Ableitung wird gemäß der FDM genähert als

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx}\right)_i &= \frac{u(x_i + h) - u(x_i)}{h} \\ &= \frac{u_{i+1} - u_i}{1/N} \\ &= N(u_{i+1} - u_i) \end{aligned}$$

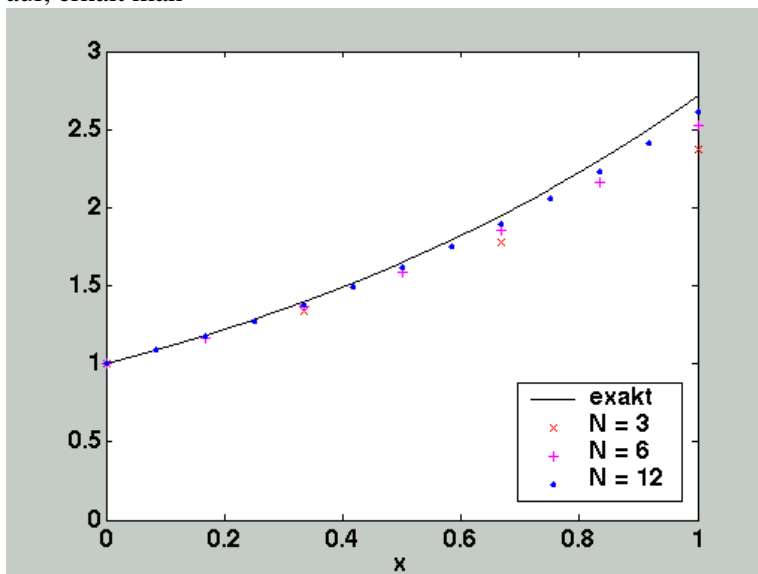
- Setzt man dies in die Differentialgleichung, ergibt sich

$$\begin{aligned} N(u_{i+1} - u_i) - u_i &= 0 \\ \Rightarrow u_{i+1} &= \left(1 + \frac{1}{N}\right) u_i \end{aligned}$$

- Diese Rekursion lässt sich direkt auflösen zu

$$u_i = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^i u_0 = \left(1 + \frac{1}{N}\right)^i$$

- Rechnet man diese Werte für  $N = 3, 6, 12$  aus und trägt sie zusammen mit der exakten Lösung
  - $u(x) = e^x$
- auf, erhält man

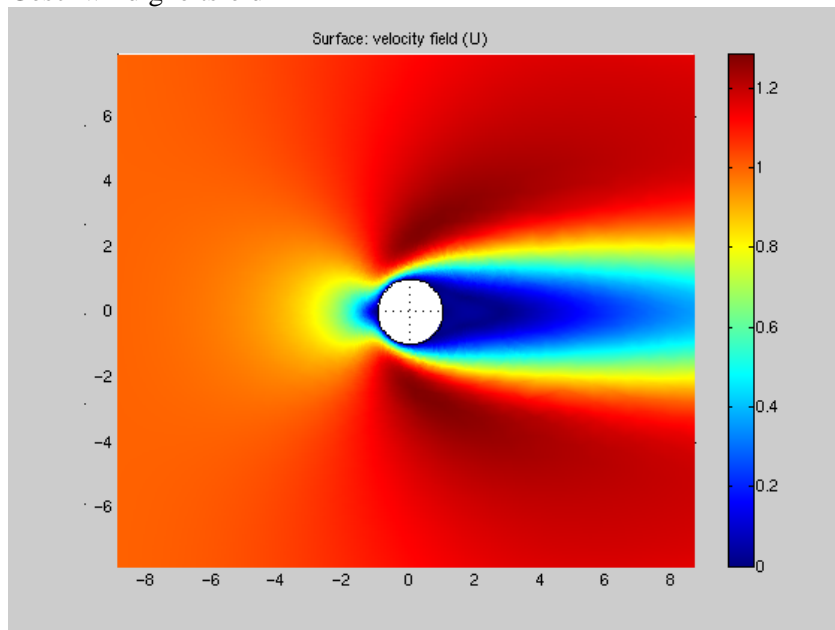


## Lösung von Aufgabe 6

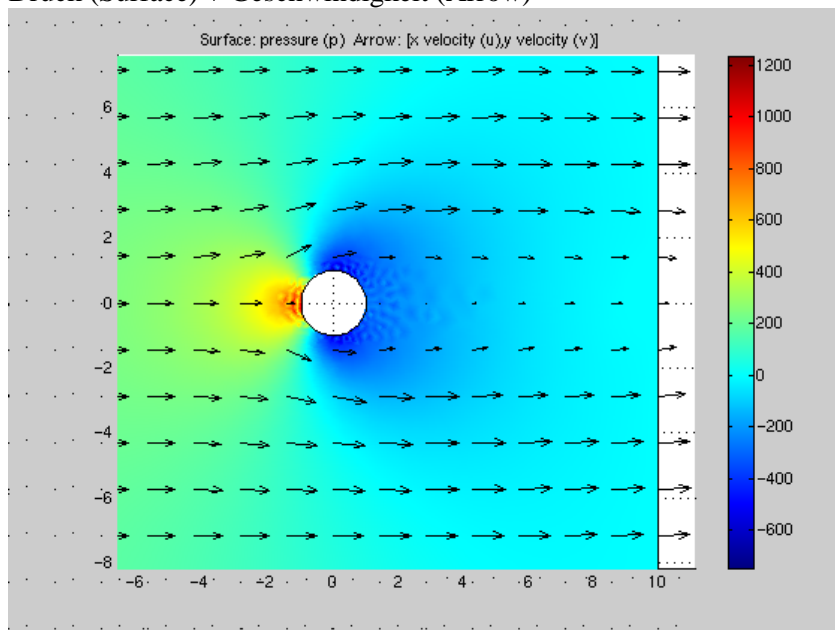
- Die folgenden Bilder zeigen exemplarisch einige Ergebnisse von Rechnungen mit z.T. sehr feinen Gittern ( $> 10000$  Elemente) und entsprechenden Rechenzeiten von über einer Stunde. Trotzdem sind die Resultate nicht immer überzeugend (Schließen der Strömung im laminaren Fall, turbulente Grenzschicht bei sehr großer Reynoldszahl).

- $Re = 10$

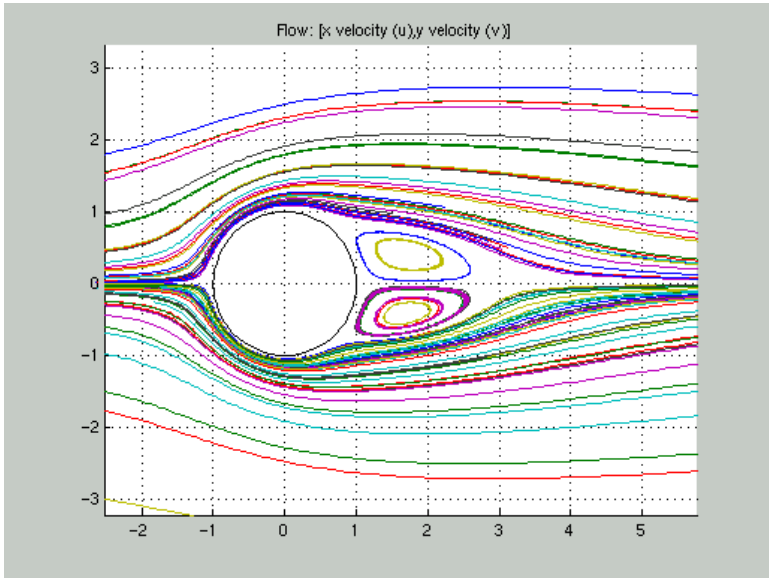
- Geschwindigkeitsfeld



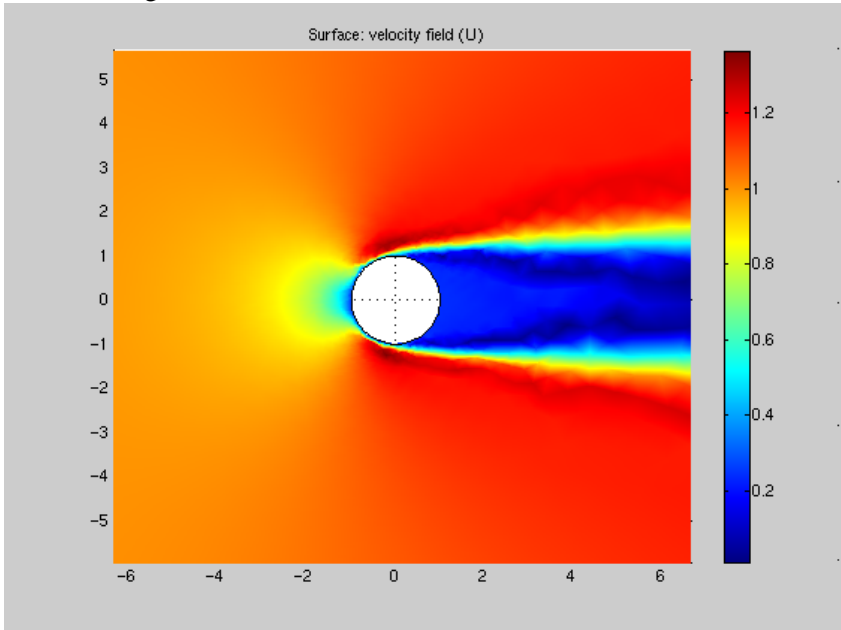
- Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



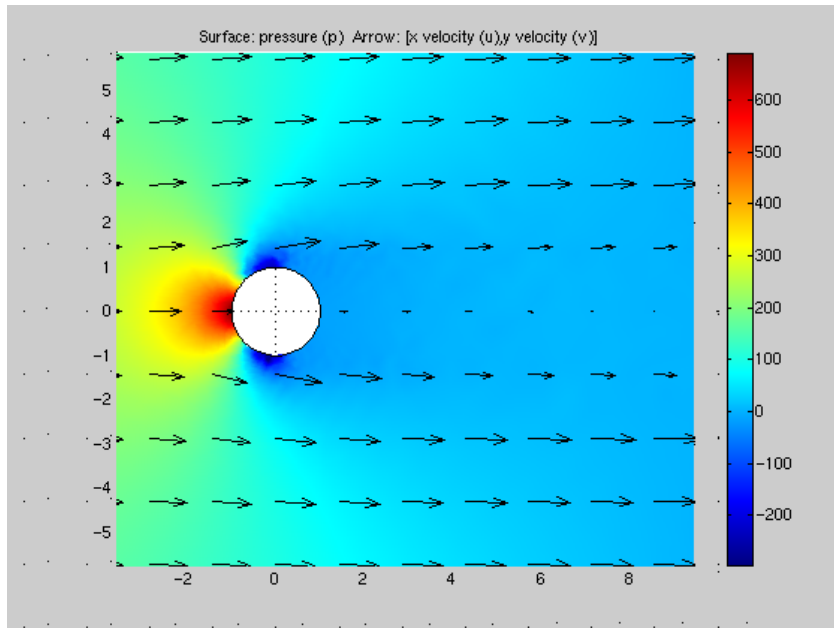
- Stromlinien



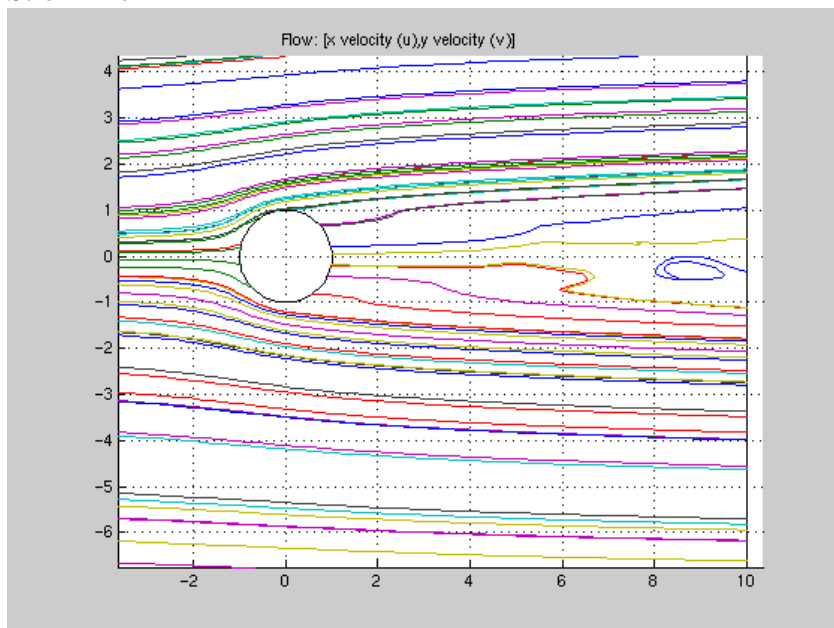
- $Re = 30000$
- Geschwindigkeitsfeld



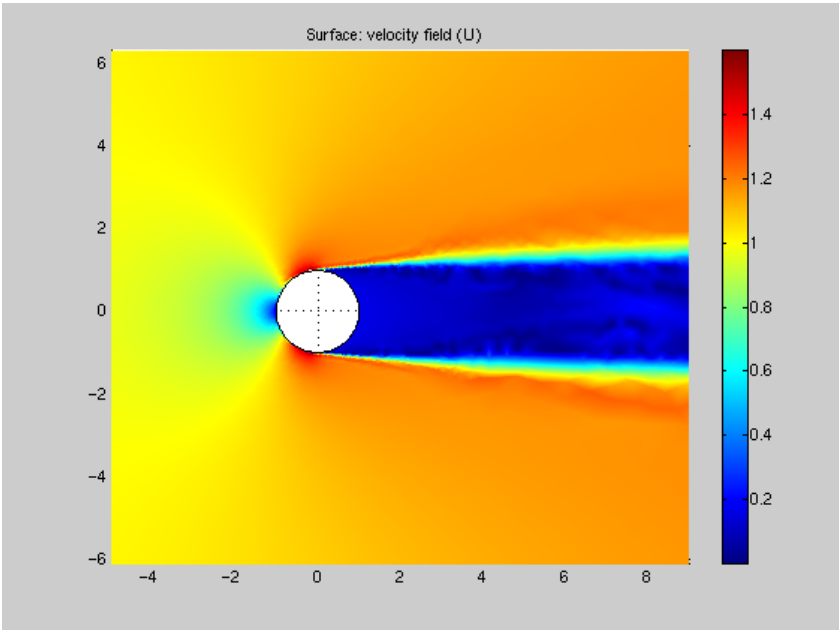
- Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



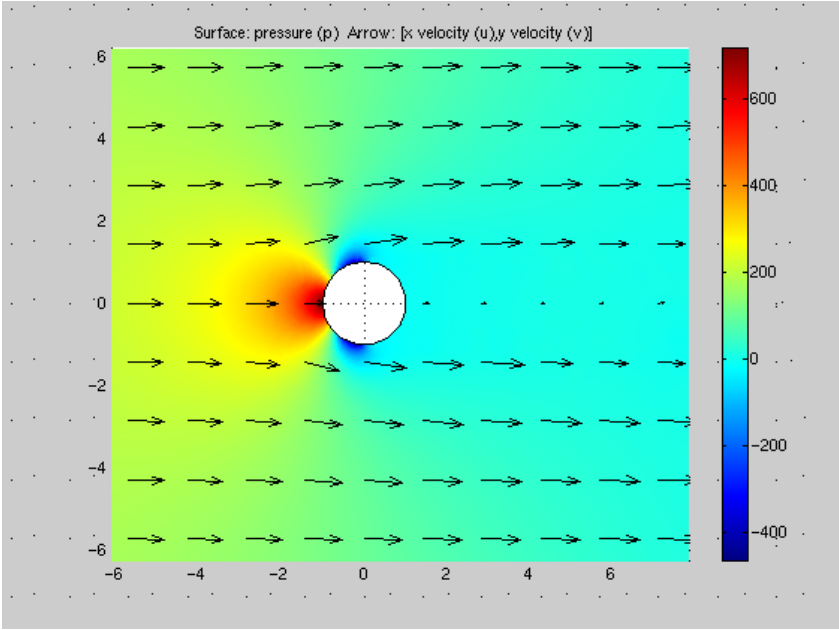
○ Stromlinien



- $Re = 3000000$
- Geschwindigkeitsfeld



○ Druck (Surface) + Geschwindigkeit (Arrow)



○ Stromlinien

