

# Strömungslehre 2

- Inkompressible Strömungen
- Aufgaben
- Anhang

# Inhaltsverzeichnis

## Übersicht

- Inkompressible Strömungen
  - Grundgleichungen
    - Kontinuitätsgleichung
    - Energiegleichung
    - Druckänderung senkrecht zur Strömungsrichtung
    - Impulssatz
    - Drehimpulssatz
  - Ähnlichkeitsgesetze
  - Grundformen reibungsbehafteter Strömung
  - Strömung in Rohren
    - Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen
    - Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren
    - Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren
  - Strömung in Gerinnen
  - Umströmung von Körpern
  - Tragflügel
- Aufgaben
  - Aufgabe 1
    - Lösung von Aufgabe 1
  - Aufgabe 2
    - Lösung von Aufgabe 2
  - Aufgabe 3
    - Lösung von Aufgabe 3
  - Aufgabe 4
    - Lösung von Aufgabe 4
  - Aufgabe 5
    - Lösung von Aufgabe 5
  - Aufgabe 6
    - Lösung von Aufgabe 6
  - Aufgabe 7
    - Lösung von Aufgabe 7
  - Aufgabe 8
    - Lösung von Aufgabe 8
  - Aufgabe 9
    - Lösung von Aufgabe 9
  - Aufgabe 10
    - Lösung von Aufgabe 10
  - Aufgabe 11
    - Lösung von Aufgabe 11

- Aufgabe 12
  - Lösung von Aufgabe 12
- Aufgabe 13
  - Lösung von Aufgabe 13
- Aufgabe 14
  - Lösung von Aufgabe 14
- Aufgabe 15
  - Lösung von Aufgabe 15
- Aufgabe 16
  - Lösung von Aufgabe 16
- Anhang
  - Literatur
  - Nachweise

# Inkompressible Strömungen

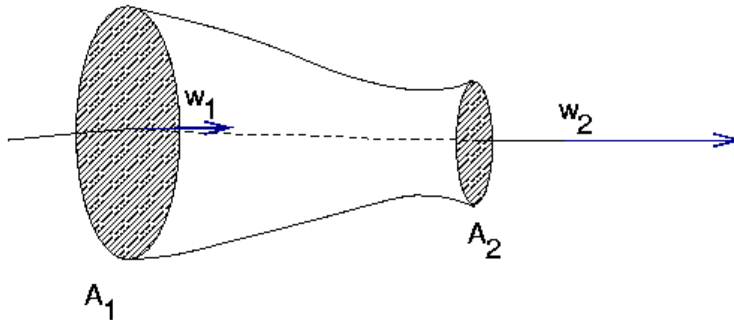
- Grundgleichungen
- Ähnlichkeitsgesetze
- Grundformen reibungsbehafteter Strömung
- Strömung in Rohren
- Strömung in Gerinnen
- Umströmung von Körpern
- Tragflügel

# Grundgleichungen

- Kontinuitätsgleichung
- Energiegleichung
- Druckänderung senkrecht zur Strömungsrichtung
- Impulssatz
- Drehimpulssatz

# Kontinuitätsgleichung

- Massenerhaltung:
  - betrachten inkompressible stationäre Strömung
  - Stromröhre als Kontrollvolumen



- Zustrom von Masse durch  $A_1$  in Zeit  $dt$

$$\begin{aligned} dm_1 &= \rho \cdot A_1 \cdot ds \\ &= \rho \cdot A_1 \cdot w_1 dt \end{aligned}$$

- Abstrom von Masse durch  $A_2$  in Zeit  $dt$  analog

- $dm_2 = \rho \cdot A_2 \cdot w_2 dt$

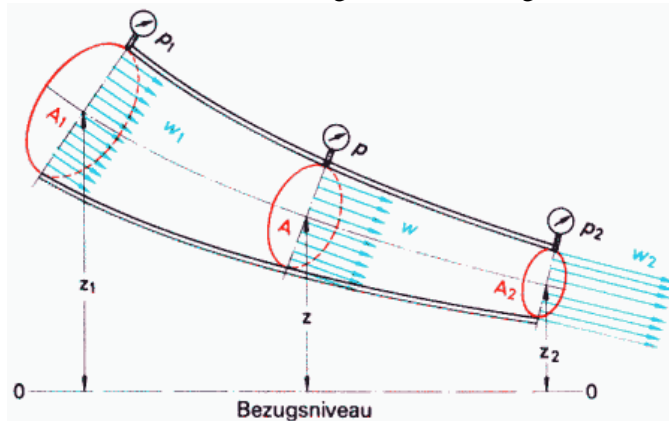
- stationär  $\rightarrow$

- $dm_1 = dm_2 \Rightarrow$

- $A_1 \cdot w_1 = A_2 \cdot w_2$

# Energiegleichung

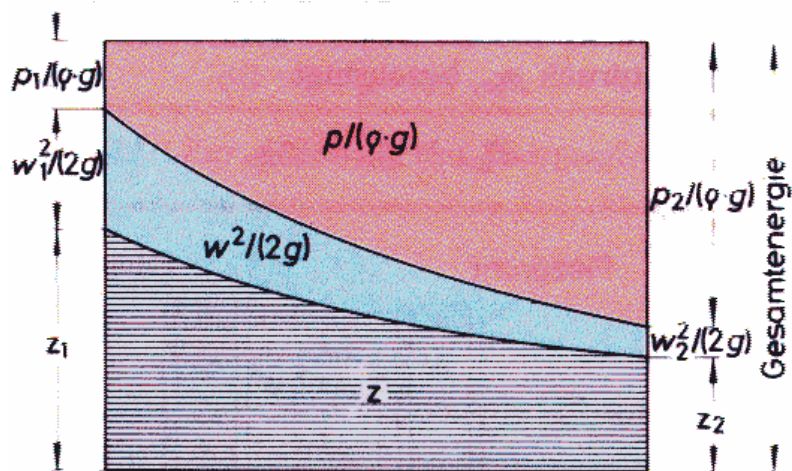
- Energien bei der Stromröhre:
  - betrachten stationäre reibungsfreie Strömung im Gravitationsfeld



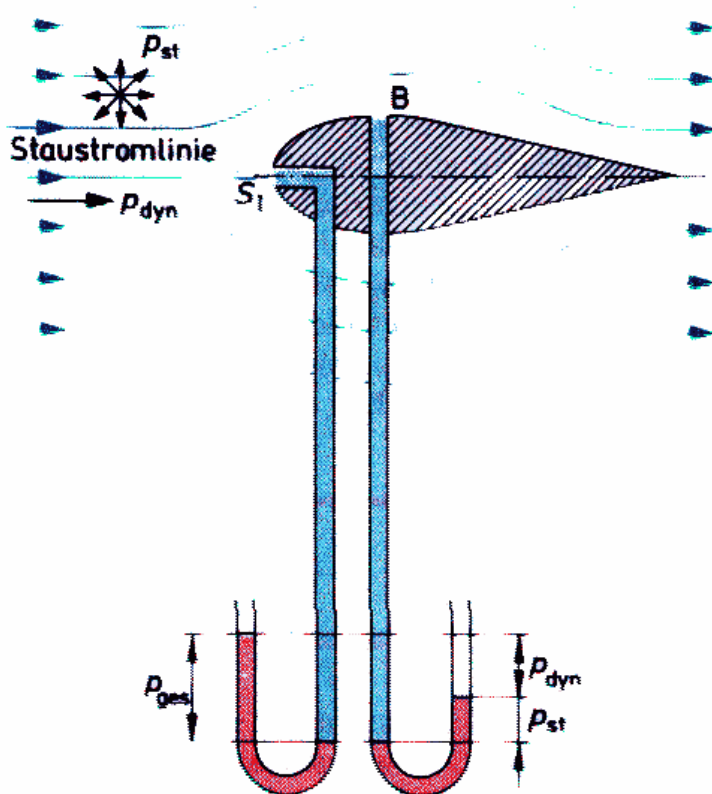
- auftretende Energieformen
  - $E_{\text{pot}} = m g z$
  - $E_{\text{kin}} = 1/2 m w^2$
  - $E_{\text{druck}} = p V = m p / \rho$
- $E_{\text{druck}} =$  verrichtete Arbeit, um Masse  $m$  mit Volumen  $V$  gegen den Druck  $p$  durchzuschieben (Volumenänderungsarbeit)
- keine Änderung der inneren Energie (keine Reibung, Temperatur konstant)
- keine zusätzliche äußere Arbeit
- Gesamtenergie an jedem Querschnitt  $A$  konstant

$$\begin{aligned}
 E &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} + E_{\text{druck}} \\
 &= m g z + 1/2 m w^2 + m p / \rho \\
 &= \text{const.}
 \end{aligned}$$

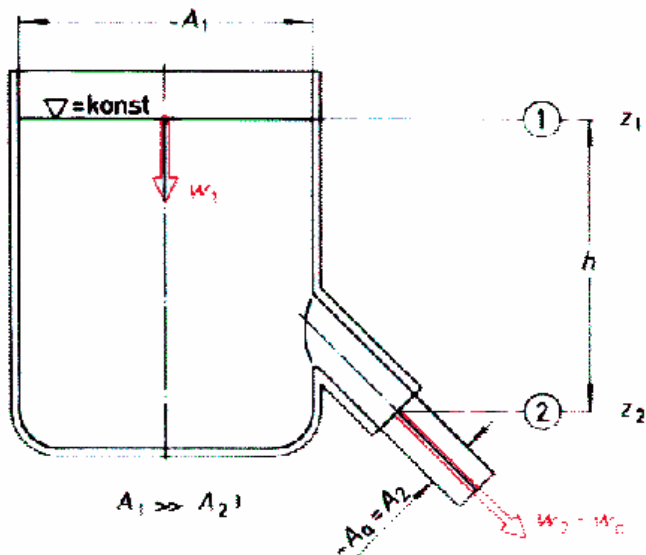
- mit  $\rho/m$  multiplizieren  $\rightarrow$  Dimension des Drucks
  - $\rho g z + p + \rho/2 w^2 = \text{const}$  (Bernoulli-Gleichung)
- grafische Darstellung



- Technische Arbeit  $W_{t12}$ :
  - extern am Fluid geleistete Arbeit
  - z.B. Pumpe ( $W_{t12} > 0$ ) oder Turbine ( $W_{t12} < 0$ )
  - spezifische technische Arbeit
    - $w_{t12} = W_{t12}/m$
  - Bernoulli-Gleichung bei technischer Arbeit zwischen Punkt 1 und 2
    - $\rho g z_2 + p_2 + \rho/2 w_2^2 = \rho g z_1 + p_1 + \rho/2 w_1^2 + \rho w_{t12}$
- Staudruck:
  - durch die Strömung verursachter dynamischer Druck  $\rho/2 w^2$
  - wirkt nur in Strömungsrichtung
  - kann z.B. bei der Umströmung eines Körpers gemessen werden



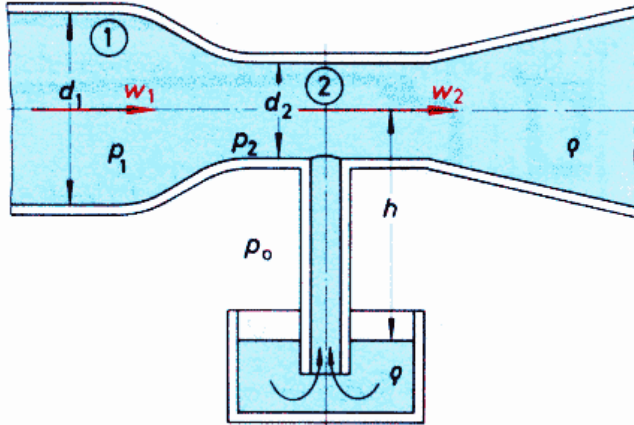
- Grundprinzip des Prandtl-Rohrs zur Messung der Strömungsgeschwindigkeit
- Ausfluss aus einem Behälter:
  - Flüssigkeit laufe reibungsfrei aus einem Gefäß



- Bernoulli-Gleichung am oberen Wasserspiegel und an Austrittsöffnung

- $$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g}$$

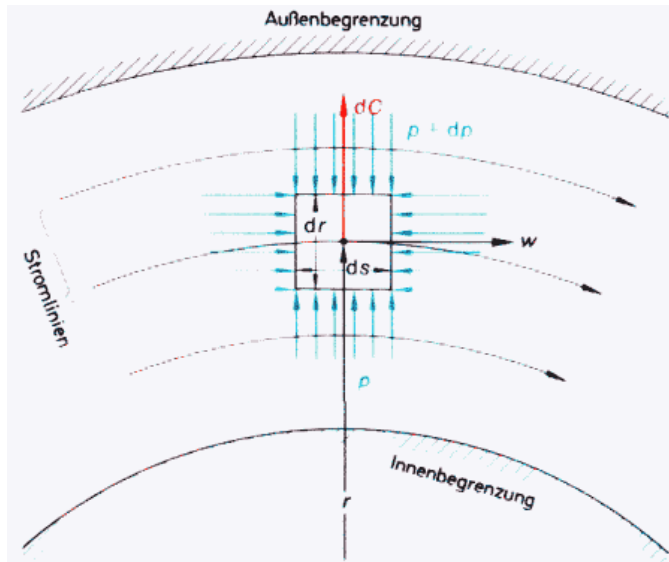




- Geschwindigkeit  $w_2$  an der Verengungsstelle mit Kontinuitätsgleichung
  - $w_1 A_1 = w_2 A_2$
  - $A = \pi d^2/4$
  - $\Rightarrow w_2 = w_1 \cdot d_1^2/d_2^2 > w_1$
- Druck  $p_2$  mit Bernoulli-Gleichung
  - $p_1 + \rho/2 w_1^2 = p_2 + \rho/2 w_2^2$
  - $$\Rightarrow p_2 = p_1 - \rho/2 (w_2^2 - w_1^2)$$
  - $$= p_1 - \rho/2 w_1^2 (d_1^4/d_2^4 - 1)$$
- Geschwindigkeit  $w$  im Saugrohr bei maximaler Steighöhe  $h$  nahezu 0
- bei Außendruck  $p_0$  ergibt Bernoulli
  - $p_2 + \rho g h = p_0$
  - $\Rightarrow h = (p_0 - p_2)/(\rho g)$
- häufiges Prinzip zum Pumpen oder Mischen, z.B.
  - Wasserstrahlpumpe
  - Zerstäuber
  - Vergaser
- in der Praxis erhebliche Verluste durch Reibung und Turbulenz beim Mischen
- Aufgaben:
  - Aufgabe 1
  - Aufgabe 2
  - Aufgabe 3
  - Aufgabe 4
  - Aufgabe 5

# Druckänderung senkrecht zur Strömungsrichtung

- Strömung durch gekrümmtes Rohr:
  - Fluidelement der Größe  $dr ds db$



- Zentrifugalkraft auf Kreisbahn mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$

$$\begin{aligned} dF_Z &= dm r \omega^2 \\ &= \rho dr ds db r \omega^2 \\ &= \rho dr ds db w^2/r \end{aligned}$$

- mit der Strömungsgeschwindigkeit  $w = \omega r$
- Kraft aufgrund des Druckunterschieds
  - $dF_p = (p + dp) ds db - p ds db = dp ds db$
- Kräftegleichgewicht  $dF_Z = dF_p \Rightarrow$

$$\bullet \frac{dp}{dr} = \rho \frac{w^2}{r}$$

- Beispiel Rohrkrümmer:
  - Annahme:  $w = Z/r$  (drallfreie Strömung)
  - damit
    - $dp/dr = \rho w^2/r = \rho Z^2/r^3$
  - integrieren von Innenwand bis Außenwand  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_{p_i}^{p_a} dp &= \rho Z^2 \int_{r_i}^{r_a} \frac{dr}{r^3} \\ \Rightarrow p_a - p_i &= \rho Z^2 \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right) \Big|_{r_i}^{r_a} \\ &= \frac{1}{2} \rho Z^2 \left( \frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2} \right) \end{aligned}$$

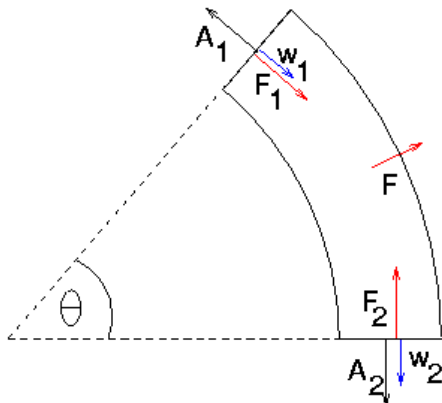
•

# Impulssatz

- Kräfte bei einer Stromröhre:
  - Newton:
    - Summe aller Impulsänderungen + Summe aller äußeren Kräfte = 0
    - $\sum \frac{d\vec{p}}{dt} + \sum \vec{F} = 0$
  - auftretende Kräfte
    - Volumenkräfte durch äußere Felder (z.B. Schwerkraft)
    - Druckkräfte auf Oberflächen
    - Reaktionskräfte von festen Oberflächen
  - Impulsänderung im Fluid
    - $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{w}) = \dot{m}\vec{w} + m \frac{d\vec{w}}{dt}$
  - speziell für stationäre inkompressible Strömungen:

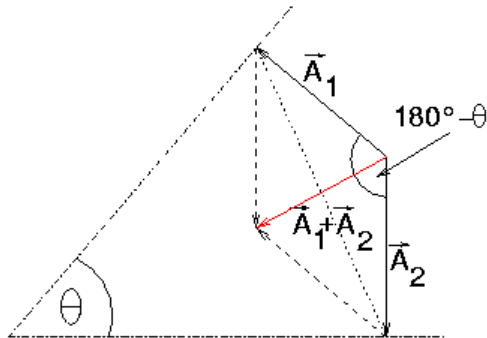
$$\begin{aligned} d\vec{p}/dt &= \dot{m}\vec{w} \\ &= \rho \dot{V}\vec{w} \end{aligned}$$

- positives Vorzeichen:
  - in das Kontrollvolumen hineinfließende Impulsströme
  - Kräfte auf das Fluid
- Kraft auf ein gekrümmtes Rohr:
  - Strömung durch gebogenes Rohr, Ablenkungswinkel  $\theta$



- Durchmesser  $d = \text{const.} \rightarrow$  Geschwindigkeit  $|\vec{w}| = \text{const.}$
- kein Gefälle, keine Reibung  $\rightarrow p = \text{const.}$
- Kräfte auf Fluid am Eingang (senkrecht zur Querschnittsfläche nach innen)
  - Druckkraft  $\vec{F}_{p1} = -p \vec{A}_1$
  - Impulskraft  $\vec{F}_{i1} = \rho \dot{V}\vec{w}_1 = -\rho \vec{A}_1 w^2$
  - Gesamtkraft:  $\vec{F}_1 = -\vec{A}_1 (p + \rho w^2)$

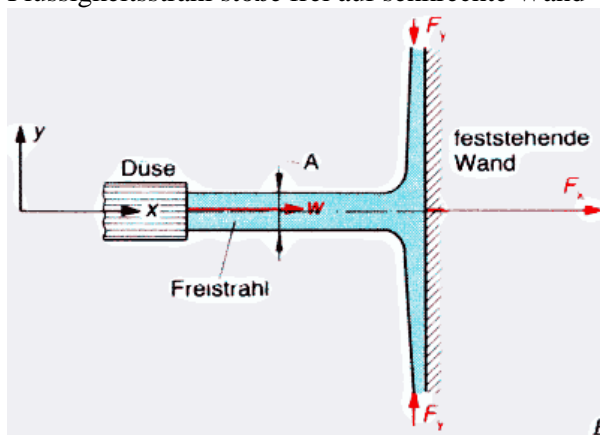
- analog am Ausgang (senkrecht zur Querschnittsfläche nach außen)
  - Gesamtkraft:  $\vec{F}_2 = -\vec{A}_2 (p + \rho w^2)$
- Gesamtkraft  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = - (p + \rho w^2)(\vec{A}_1 + \vec{A}_2)$



$$|\vec{A}_1 + \vec{A}_2| = 2 A \sin(\theta/2)$$

$$\Rightarrow F = 2 A (p + \rho w^2) \sin(\theta/2)$$

- $\vec{F}$  = Kraft von Fluid auf Wand
- gleichgroße Gegenkraft  $-\vec{F}$  der Wand bewirkt Richtungsänderung des Fluids
- Stoß auf ebene Wand:
  - Flüssigkeitsstrahl stoße frei auf senkrechte Wand



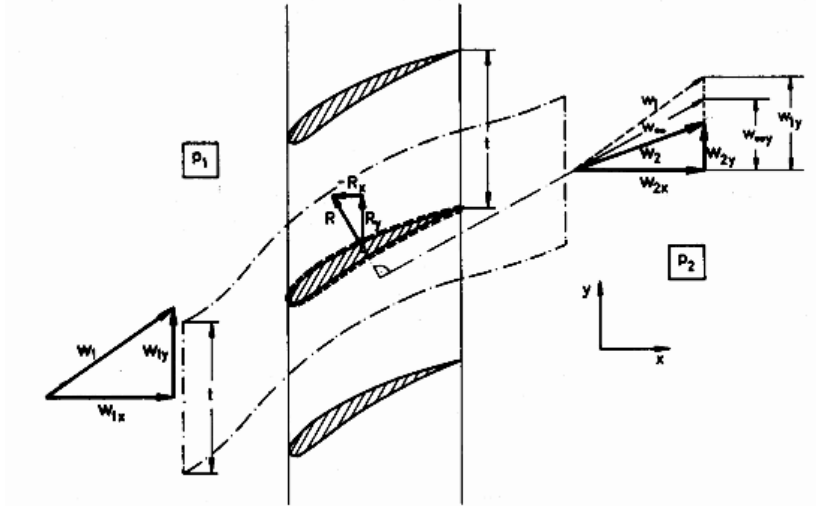
- Näherung in der Nähe des Auftreffpunkts:
  - Flüssigkeit läuft senkrecht ab
  - keine Änderung des Betrags der Geschwindigkeit
- Stoßkraft auf die Wand

$$F = \rho \dot{V} w$$

$$= \rho A w^2$$

- **Schaufelkraft im ebenen Schaufelgitter:**

- Strömung durch eine Reihe von Profilen in gleichem Abstand  $t$ , Breite  $b$



- $y$ -Achse in Richtung des Gitters,  $x$ -Achse senkrecht in Strömungsrichtung
- Kontrollfläche um ein Profil

- Volumenstrom

- $\dot{V} = t b w_x$

- Berechnung der Schaufelkraft  $\vec{R}$  mit Impulssatz

- in  $x$ -Richtung

- $\rho w_{1x} (w_{1x} t b) + p_1 t b - \rho w_{2x} (w_{2x} t b) - p_2 t b = R_x$

- in  $y$ -Richtung

- $\rho w_{1y} (w_{1x} t b) - \rho w_{2y} (w_{2x} t b) = R_y$

- Kontinuitätsgleichung  $\rightarrow$

- $w_{1x} t b = w_{2x} t b \Rightarrow w_{1x} = w_{2x}$

- Energiebilanz  $\rightarrow$

- $p_1 + \rho/2 (w_{1x}^2 + w_{1y}^2) = p_2 + \rho/2 (w_{2x}^2 + w_{2y}^2) \Rightarrow$

$$p_1 - p_2 = \rho/2 (w_{2y}^2 - w_{1y}^2)$$

$$= \rho/2 (w_{2y} - w_{1y}) (w_{2y} + w_{1y})$$

- mit dem Mittel aus Zu- und Abströmgeschwindigkeit  $\vec{\bar{w}} = (\vec{w}_1 + \vec{w}_2)/2$  folgt

- $p_1 - p_2 = -\rho (w_{1y} - w_{2y}) \vec{\bar{w}}_y$

- also

$$\begin{aligned}
R_x &= t b (p_1 - p_2) \\
&= -\rho b \bar{w}_y t (w_{1y} - w_{2y}) \\
&= -\rho b \bar{w}_y \Gamma
\end{aligned}$$

- mit der Abkürzung  $\Gamma := t (w_{1y} - w_{2y})$
- ebenso

$$\begin{aligned}
R_y &= \rho \bar{w}_x t b (w_{1y} - w_{2y}) \\
&= \rho b \bar{w}_x \Gamma
\end{aligned}$$

- Damit erhält man für das Skalarprodukt

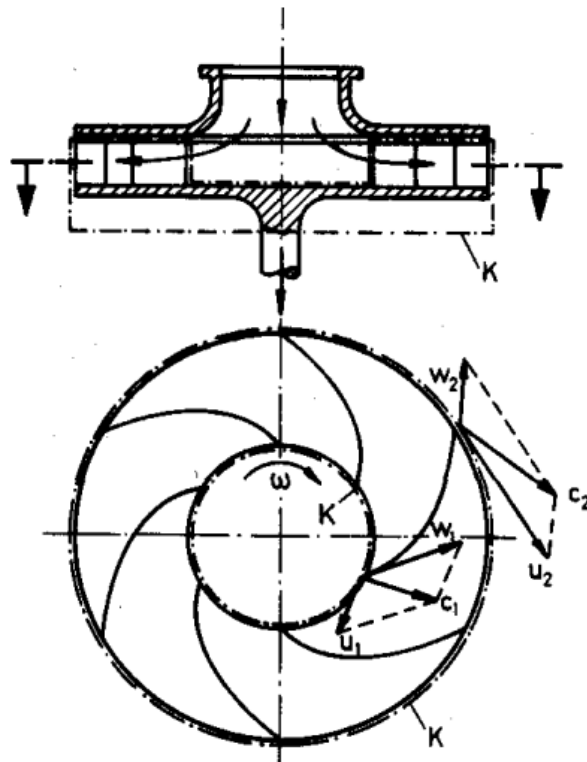
$$\begin{aligned}
\vec{R} \cdot \vec{w} &= R_x \bar{w}_x + R_y \bar{w}_y \\
&= -\rho b \Gamma \bar{w}_x \bar{w}_y + \rho b \Gamma \bar{w}_x \bar{w}_y \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Die Schaufelkraft (Schaufelauftrieb)  $\vec{R}$  steht senkrecht auf der mittleren Strömungsgeschwindigkeit.
- Betrag der Schaufelkraft

- $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \rho b \Gamma \sqrt{\bar{w}_x^2 + \bar{w}_y^2} = \rho b \Gamma \bar{w}$

# Drehimpulssatz

- Drehimpuls bei Schaufelrädern:
  - Newton:
    - Summe aller Drehimpulsänderungen + Summe aller äußeren Momente = 0
    - $$\sum \frac{d\vec{r} \times \vec{p}}{dt} + \sum \vec{M} = 0$$
  - beim stationären inkompressiblen Fluid
    - $\vec{w}$  zerlegt in Radialteil  $w_r$  und Tangentialanteil  $w_t \rightarrow$
    - $$\left| \frac{d\vec{r} \times \vec{p}}{dt} \right| = \dot{m} r w_t = \rho \dot{V} r w_t$$
- Anwendung beim Laufrad einer Kreiselpumpe:
  - Gesamtgeschwindigkeit gegeben durch
    - $\vec{c} = \vec{w} + \vec{u}$
    - $\vec{w}$  : Relativgeschwindigkeit, durch Schaufelform gegeben
    - $\vec{u}$  : Umfangsgeschwindigkeit,  $u = r \omega$



- Gesamtgeschwindigkeit zerlegt in Radialteil  $c_r$  und Tangentialteil  $c_t$
- vom Schaufelrad übertragenes Moment
  - $M_S = \dot{m} (r_2 c_{2t} - r_1 c_{1t})$
  - (Eulersche Hauptgleichung für Turbomaschinen)
- Leistung der Pumpe

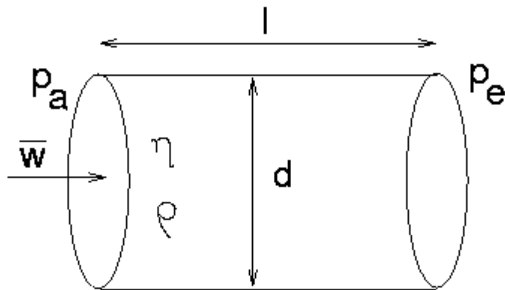
- $P = M_S \omega$
- Aufgaben:
  - Aufgabe 6

# Ähnlichkeitsgesetze

- Dimensionsanalyse:
  - Ausgangspunkt: funktionale Abhängigkeit zwischen n physikalischen Größen
    - $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$
  - Größen  $a_i$  haben Einheiten
  - können durch m Grundeinheiten beschrieben werden (3 bei Mechanik, 4 incl. Thermodynamik)
  - $\Pi$ -Theorem: Funktion f umschreibbar mit n - m dimensionslosen Kombinationen  $\Pi_j$  (Kennzahlen) der  $a_i$ 
    - $F(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-m}) = 0$
- Beispiel "Erzwungene Schwingung":
  - Grundgleichung
    - $m \ddot{x} + b \dot{x} + c x = \hat{F} \cos(\omega t)$
  - Einheiten der Größen

$a_i$	$[a_i]$
m	kg
b	kg s <sup>-1</sup>
c	kg s <sup>-2</sup>
$\hat{F}$	kg m s <sup>-2</sup>
$\omega$	s <sup>-1</sup>
t	s

- 2 dimensionslose Kennzahlen
  - $K_1 := \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{c}{m}}$
  - $K_2 := \frac{b}{\sqrt{mc}}$
- Vergleich mit den üblichen Größen bei der erzwungenen Schwingung
  - $K_1 = \omega_0/\omega = 1/\eta$
  - $K_2 = 2 \delta/\omega_0 = 2 D$
- Beispiel Rohrströmung:
  - Strömung durch ein kreisrundes Rohr



- beschrieben durch Beziehung
  - $f(\Delta p/l, d, \bar{w}, \rho, \eta) = 0$
  - zwischen den Größen

$a_i$	$[a_i]$	Bedeutung
$\Delta p/l$	$\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-2}$	Druckabfall/Rohrlänge
$d$	$\text{m}$	Rohrdurchmesser
$\bar{w}$	$\text{m s}^{-1}$	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
$\rho$	$\text{kg m}^{-3}$	Dichte des Fluids
$\eta$	$\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$	Viskosität des Fluids

- Kennzahl  $K$  = Potenz der Größen mit Einheit 1, also

- $[K] = \left[ \left( \frac{\Delta p}{l} \right)^\alpha \cdot d^\beta \cdot \bar{w}^\gamma \cdot \rho^\delta \cdot \eta^\epsilon \right] = 1$

- Vergleich der Exponenten von  $\text{kg}$ ,  $\text{m}$ ,  $\text{s}$  liefert

$$\alpha + \delta + \epsilon = 0 \quad (1)$$

$$-2\alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \epsilon = 0 \quad (2)$$

$$-2\alpha - \gamma - \epsilon = 0 \quad (3)$$

- Wähle  $\alpha = 1, \epsilon = 0 \Rightarrow$

- (1)  $\Rightarrow \delta = -1$

- (3)  $\Rightarrow \gamma = -2$

- (2)  $\Rightarrow \beta = 1$

- $K_1 = \left( \frac{\Delta p}{l} \right) \frac{d}{\bar{w}^2 \rho} =: \frac{\lambda}{2}$

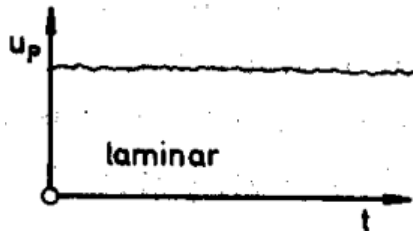
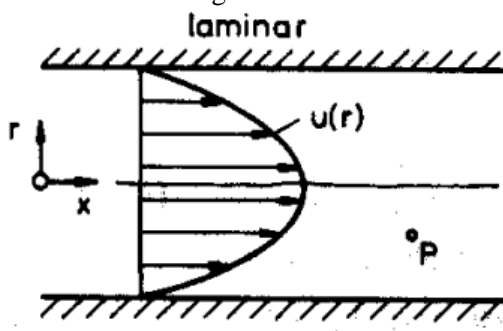
- $\lambda$ : Rohrreibungszahl

- Wähle  $\alpha = 0, \epsilon = 1 \Rightarrow$

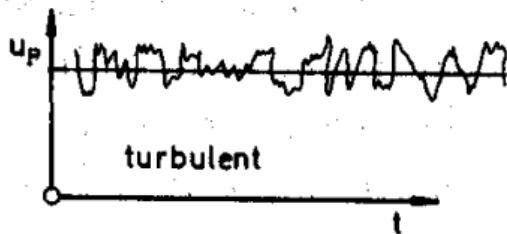
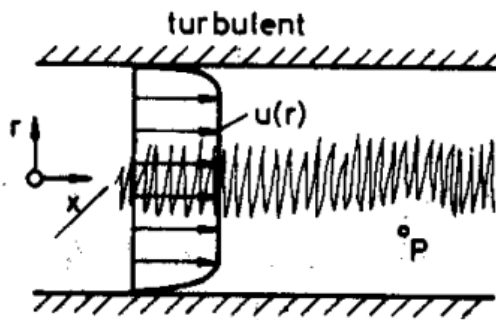
- $K_2 = \frac{\eta}{\rho d w} =: \frac{1}{\text{Re}}$
- Re: Reynoldszahl
- Beziehung in dimensionslosen Größen also
  - $F(\lambda, \text{Re}) = 0$
- oder
  - $\lambda = \lambda(\text{Re})$
- Reynolds-Zahl:
  - wichtigste Kennzahl reibungsbehafteter Strömungen
  - Definition
    - $\text{Re} := w L \rho / \eta = w L / \nu$
    - L: charakteristische Länge
    - $\nu$ : kinematische Viskosität
  - Verhältnis von kinetischer zu Reibungsenergie
    - $\frac{\text{kinet. Energie}}{\text{Reibungsenergie}} = \frac{m w^2}{A \tau L} = \frac{\rho V w^2}{V \eta w / L} = \frac{\rho w L}{\eta}$
  - charakterisiert Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung
- Froude-Zahl:
  - Kennzahl von Strömungen unter Schwerkraft (Gefälle, Oberflächenwellen)
  - Definition
    - $Fr := \frac{w}{\sqrt{hg}}$
  - Verhältnis von kinetischer und potentieller Energie
    - $\sqrt{\frac{\text{kinet. Energie}}{\text{potenz. Energie}}} = \sqrt{\frac{m w^2}{m g h}} = \frac{w}{\sqrt{hg}}$
  - ebenfalls Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Geschwindigkeit von Oberflächenwellen
  - charakterisiert Grenze zwischen gleichmäßig strömender (ruhiger Fluss) und schießender Bewegung (Sturzbach)
- Anwendung "Modellbau":
  - gleiche Strömungsverhältnisse bei gleichen Kennzahlen und ähnlicher Geometrie
  - erlaubt Untersuchung von Strömungen mit Modellen (Wasser-, Windkanal)
  - Übereinstimmung aller Kennzahlen nicht immer erreichbar, z.B. bei Oberflächen-Rauheit

# Grundformen reibungsbehafteter Strömung

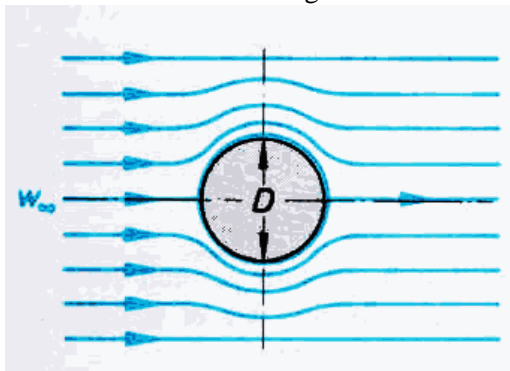
- Strömung im Rohr:
  - kritische Reynoldszahl
    - $Re_{\text{krit}} = \bar{w} d / \nu = 2320$
  - mit mittlerer Strömungsgeschwindigkeit
    - $\bar{w} = \dot{V} / A$
  - laminare Strömung für  $Re < 2320$



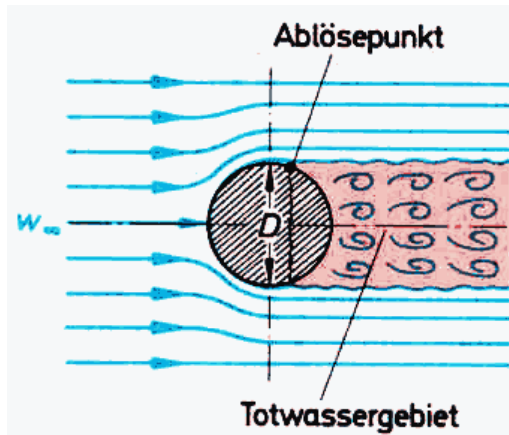
- parabolische Geschwindigkeitsverteilung
- Rohrreibungsverlust hängt nicht ab von der Rauheit der Rohrwand
- turbulente Strömung für  $Re > 2320$



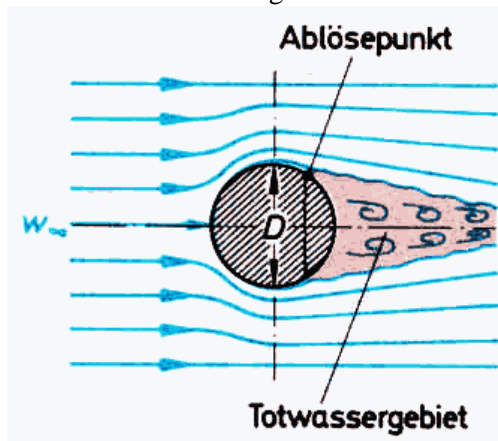
- Geschwindigkeitsverteilung wesentlich flacher
- starke Änderung nahe der Rohrwand
- Rohrreibungsverlust abhängig von der Rauheit der Rohrwand
- quasistationär: Schwankungen von mittlerer Geschwindigkeit überdeckt
- Umströmung einer Kugel:
  - schleichende Umströmung bei  $Re < 1000$



- Strömung schließt sich hinter der Kugel
- keine Wirbel
- hohe Widerstandskraft
- unterkritische Strömung bei  $1000 < Re < 3 \cdot 10^5$



- laminare Grenzschicht um Kugel
- Grenzschicht löst sich nahe der dicksten Stelle
- großes Wirbelgebiet hinter der Kugel (Totwassergebiet)
- mittlere Widerstandskraft
- überkritische Strömung bei  $Re > 3 \cdot 10^5$



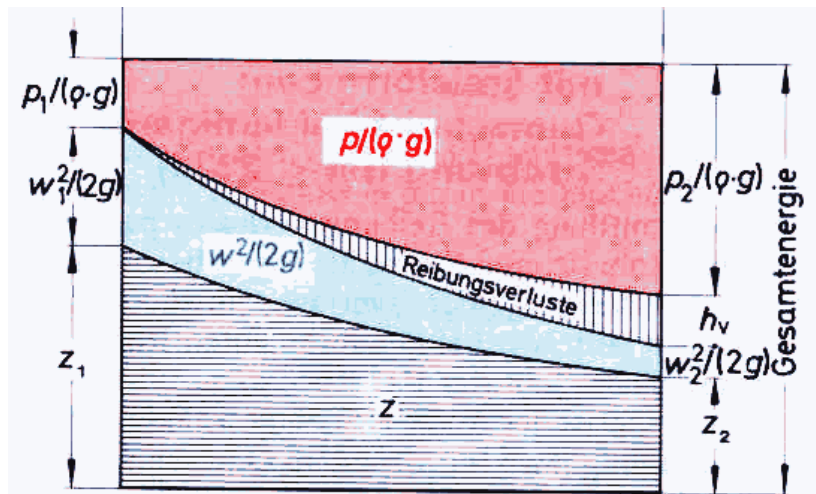
- turbulente Grenzschicht
- Grenzschicht löst sich hinter der Kugel
- kleines Totwassergebiet
- sehr niedrige Widerstandskraft
- Aufgaben:
  - Aufgabe 7
  - Aufgabe 8
  - Aufgabe 9

## **Strömung in Rohren**

- Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen
- Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren
- Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren

# Energiegleichung für reibungsbehaftete Strömungen

- Energiebilanz mit Reibung:
  - betrachten stationäre Strömung im Gravitationsfeld
  - Vergleich der spezifischen Energien an Punkten  $P_1$  und  $P_2$  einer Stromröhre
    - $g z_1 + 1/2 w_1^2 + p_1 / \rho = g z_2 + 1/2 w_2^2 + p_2 / \rho + e_{\text{Dissipation}}$
  - vorgegebener Volumenstrom  $\dot{V} = A w \rightarrow$ 
    - $w$  ändert sich nicht
    - Reibungsverlust äußert sich als Druckverlust
    - $e_{\text{Dissipation}} = \Delta p_V / \rho$
- Reibungsverlusthöhe  $h_V$ :
  - Definition
    - $h_V = \Delta p_V / \rho g$
  - Division der Energiebilanz durch  $g \rightarrow$  Größen der Dimension Länge
  - im Bild



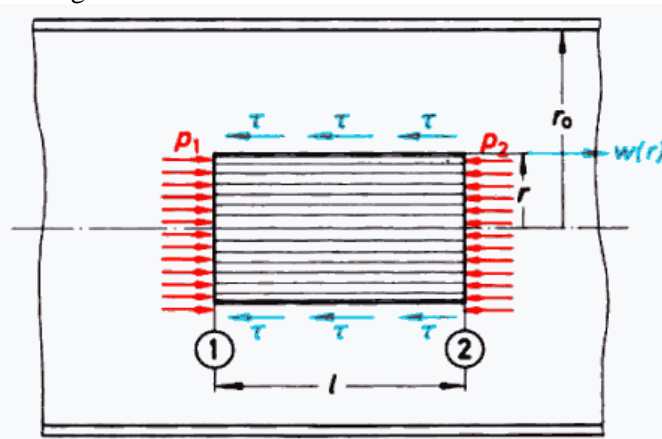
- $h_V =$  zusätzlich benötigte Höhe für gleichen Druck wie ohne Reibung
- $h_V =$  Verringerung der Förderhöhe einer Pumpe durch Reibung
- Widerstandszahl  $\zeta$ :
  - häufig Dissipationsenergie proportional zur kinetischen Energie
  - Proportionalitätskonstante  $\zeta$ 
    - $e_{\text{Dissipation}} = \zeta w^2/2$
  - Druckverlust

$$\begin{aligned} \Delta p_V &= \rho e_{\text{Dissipation}} \\ &= \frac{1}{2} \zeta \rho w^2 \end{aligned}$$

- Widerstandszahl für viele Rohrleitungselemente tabelliert
- oft nur leichte Abhängigkeit von Reynoldszahl und Wandrauheit
- Dissipation eines Rohrsystems = Summe der Dissipationen der Elemente (Reihenschaltung)

# Laminare Strömung in kreisförmigen Rohren

- Geschwindigkeitsprofil im Rohr:
  - Geschwindigkeit an der Rohrwand = 0 (Haftbedingung)
  - laminare Strömung →
    - achsenparallele Schichten
    - $w$  hängt nur vom Radius  $r$  ab



- Schubspannung aufgrund unterschiedlicher Geschwindigkeit
  - $\tau = -\eta \, dw/dr$
- entsprechende Reibungskraft am Zylinder

$$F_R = A \tau$$

$$= 2 \pi r l (-\eta \, dw/dr)$$

- äußere Druckkraft auf Zylinder
  - $F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2)$
- Kräftegleichgewicht  $\Rightarrow$

- $dw = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r \, dr$

- Integrieren  $\Rightarrow$

- $w(r) = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C$

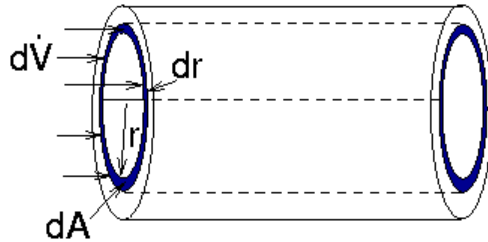
- Integrationskonstante aus Randbedingung  $w(r_0) = 0 \Rightarrow$

- $w(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} (r_0^2 - r^2)$  **Stokessches Gesetz**

- maximale Geschwindigkeit bei  $r = 0$ :

- $w_{max} = \frac{r_0^2 (p_1 - p_2)}{4\eta l}$

- Bestimmung des Volumenstroms:
  - Strom durch dünnen Zylinderring



$$\begin{aligned} d\dot{V} &= dA w(r) \\ &= w(r) 2 \pi r dr \end{aligned}$$

- Integrieren

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\pi \int_0^{r_0} w(r) r dr \\ &= 2\pi \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} \int_0^{r_0} (r_0^2 - r^2) r dr \\ &= \frac{\pi r_0^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \end{aligned}$$

**Gesetz von Hagen-Poiseuille**

- Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{w}$  :
  - definiert durch
    - $\dot{V} = A \bar{w}$
  - mit Hagen-Poiseuille

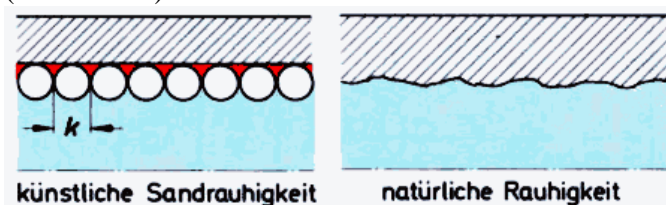
$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{\dot{V}}{A} \\ &= \frac{\pi r_0^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l \pi r_0^2} \\ &= \frac{r_0^2 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \\ &= \frac{1}{2} w_{max} \end{aligned}$$

- Druckabfall:
  - mit
    - $r_0 = d/2$
    - $\eta = \nu \rho$
  - folgt aus Hagen-Poiseuille
    - $p_1 - p_2 = \frac{128\nu\rho l}{\pi d^4} \dot{V}$
  - setzt man noch
    - $\dot{V} = \bar{w} \pi d^2/4$

- ergibt sich
  - $p_1 - p_2 = 32 \nu \rho l \bar{w} / d^2$
- Dimensionslose Form:
  - dimensionslose Rohrreibungszahl
    - $\lambda = \frac{\Delta p}{l} \frac{2d}{\bar{w}^2 \rho}$
  - $p_1 - p_2$  von oben einsetzen  $\Rightarrow$ 
    - $\lambda = 64 \frac{\nu}{d \bar{w}} = \frac{64}{\text{Re}}$
  - Vergleich mit der Definition der Widerstandszahl liefert
    - $\zeta = \lambda / d$
- Aufgaben:
  - Aufgabe 10

# Turbulente Strömung in kreisförmigen Rohren

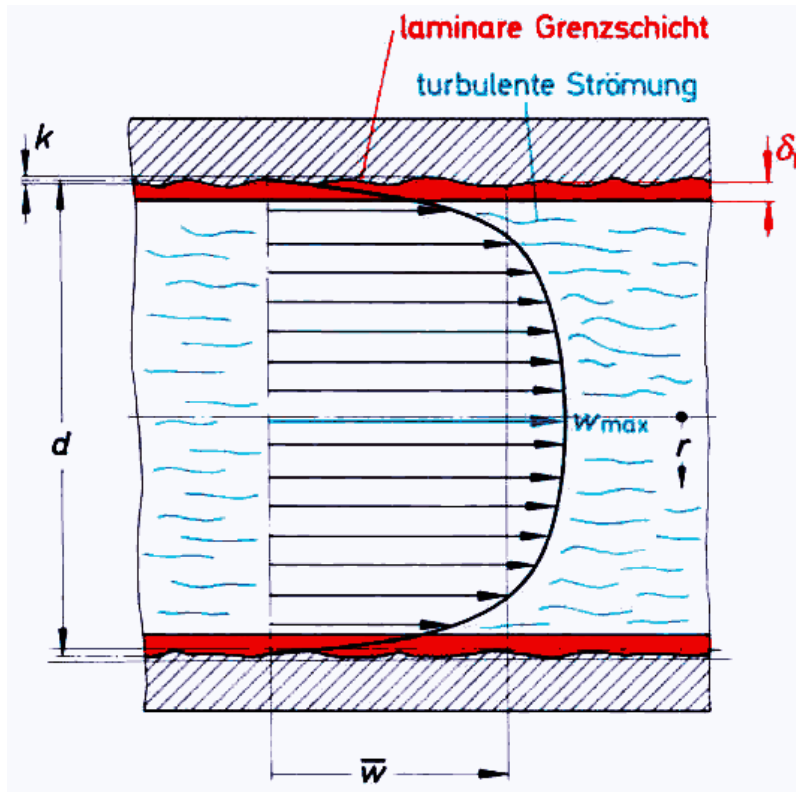
- Turbulenz im Rohr:
  - ab  $Re > 2320$
  - bei fast allen praktischen Rohrströmungen
  - Reibungsverluste durch Schubspannungen und durch turbulente Vermischung
  - Unebenheiten in der Rohrwand sehr wichtig
- Wandrauhigkeit  $k$ :
  - angegeben als durchschnittliche Höhe der Unebenheiten
  - statt natürlicher Unregelmäßigkeit bezogen auf eine "gleichmäßig rauhe" Oberfläche (Sandrauhigkeit)



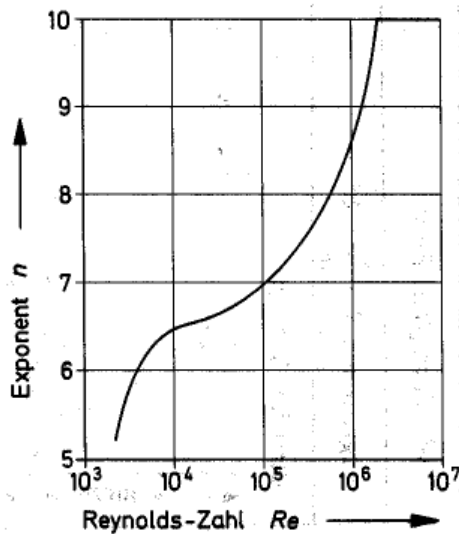
- einige typische Werte (nach [1] Tafel 31)

Material	Zustand	$k$ /[mm]
gezogenes Metallrohr	neu	0.0013
Gummischlauch	neu	0.0016
Gusseisen	neu	0.2 - 0.6
	leicht angerostet	0.5 - 1.5
Betonrohr	neu	0.3 - 0.8

- damit 3 dimensionslose Kennzahlen der Rohrströmung:
  - $Re$
  - $\lambda$
  - $k/d$
- Geschwindigkeitsverteilung:
  - grundsätzliches Verhalten



- in der Nähe der Rohrwand ( $r = d/2 =: r_0$ )
  - $w(r_0) = 0$
  - $\rightarrow$  Re klein in direkter Nähe zur Wand
  - $\rightarrow$  laminare Strömung in der Grenzschicht
  - $\rightarrow$  parabolisches Geschwindigkeitsprofil
- halbempirische Beziehung für die Dicke  $\delta_1$  (Prandtl)
  - $\frac{\delta_1}{d} \approx \frac{62.7}{\text{Re}^{7/8}}$
- Näherung für  $w(r)$  im turbulenten Bereich
  - $w(r)/w_{\text{max}} = (1 - r/r_0)^{1/n}$
- Exponent  $n$  hängt von Re und  $k/d$  ab, wächst mit  $k/d$
- bei glatten Rohren ( $k/d$  klein) erhält man  $n$  aus dem Bild



- Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{w}$  :
  - durch den Volumenstrom gegeben als
    - $\bar{w} = \dot{V} / A = \dot{V} / (\pi r_0^2)$
  - Integrieren des Volumenstroms über dünne Zylinderschalen wie beim laminaren Fall liefert:
    - $\bar{w} = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} r w(r) dr$
  - Einsetzen des Potenzansatzes ergibt
    - $\frac{\bar{w}}{w_{max}} = 2 \int_0^1 x(1-x)^{1/n} dx$
  - partielle Integration (oder eine Integraltafel) liefert schließlich
    - $\frac{\bar{w}}{w_{max}} = \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$
  - einige Werte

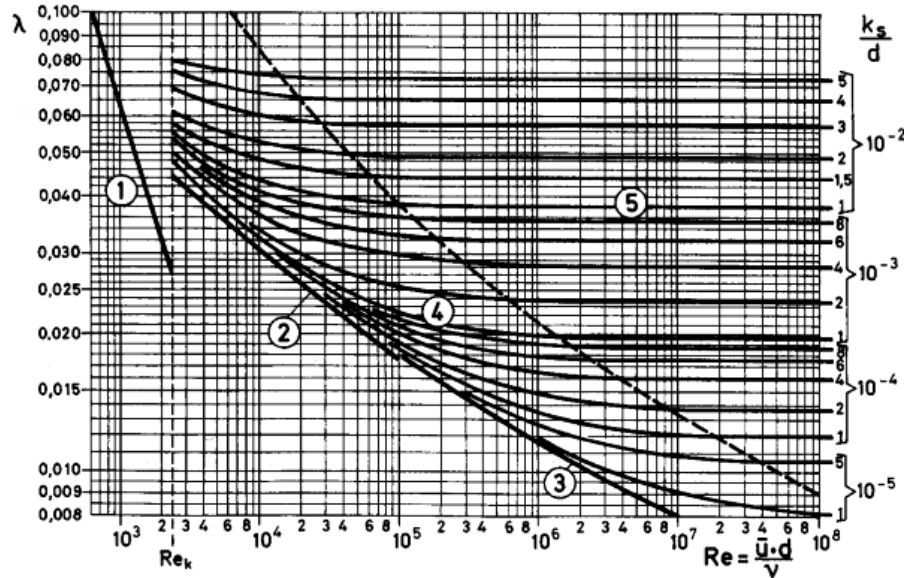
n	$\bar{w} / w_{max}$
6	0.7912
7	0.8167
8	0.8366
9	0.8526

- Druckabfall:
  - direkt aus der Definition der Rohrreibungszahl  $\lambda$ 
    - $\Delta p_V = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$

- grundlegende Beziehung

- $\lambda = \lambda(\text{Re}, k/d)$

- graphisch



- Einige halbempirische Beziehungen für verschiedene Bereiche

- hydraulisch glatte Rohre ( $\text{Re } k/d < 65$ )

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\text{Re}}} \quad \text{bei } \text{Re} < 10^5 \quad (\text{Blasius})$$

- $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.03 \lg(\text{Re}\sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad \text{bei } \text{Re} > 10^5 \quad (\text{Prandtl})$

- hydraulisch raue Rohre ( $\text{Re } k/d > 1300$ )

- $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.14 - 2 \lg\left(\frac{k}{d}\right) \quad (\text{Nikuradse})$

- Übergangsbereich ( $65 < \text{Re } k/d < 1300$ )

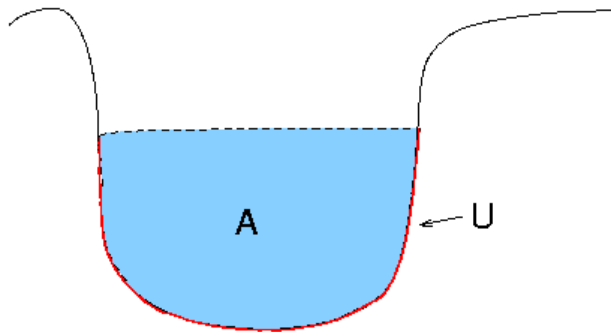
- $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.74 - 2 \lg\left(\frac{2k}{d} + \frac{18.7}{\text{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \quad (\text{Colebrook})$

- Aufgaben:

- Aufgabe 11
- Aufgabe 12

# Strömung in Gerinnen

- Hydraulischer Durchmesser  $d_h$  :
  - bei beliebiger Querschnittsform, auch mit offener Oberfläche



- Gleichgewicht zwischen Druckkraft und Reibungsverlust an der Wand →
  - $\tau U l = \Delta p_V A$
  - $\Rightarrow \Delta p_V = \tau l U / A$
- beim Kreisrohr
  - $\Delta p_V = \tau l \frac{\pi d}{\pi d^2 / 4} = \tau l \frac{4}{d}$
- Vergleich mit der Beziehung
  - $\Delta p_V = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2$
  - $\Rightarrow \tau = \lambda \bar{w}^2 \rho / 8$
- Beziehung für Schubspannung gelte für beliebige Profile →
 
$$\begin{aligned} \Delta p_V &= \tau l \frac{U}{A} \\ &= \lambda \frac{\rho}{8} \bar{w}^2 l \frac{U}{A} \\ &= \lambda \frac{l}{d_h} \frac{\rho}{2} \bar{w}^2 \end{aligned}$$
  - mit dem hydraulischen Durchmesser
  - $d_h := 4 A / U$
- Beziehungen für  $\lambda$  bei turbulenter Strömung bleiben in guter Näherung richtig mit
  - Rauheit =  $k/d_h$ ,  $Re = d_h \bar{w} / \nu$
- Hydraulisch optimales Profil:
  - bei gegebenem  $\dot{V}$  und Querschnitt A Reibung verringern durch Kanalform mit möglichst großem  $d_h$ , also möglichst kleinem U
  - z.B. bei rechteckigem Querschnitt, Breite b, Tiefe t
    - $A = b t$
    - $U = b + 2t = A/t + 2t$
    - minimal für

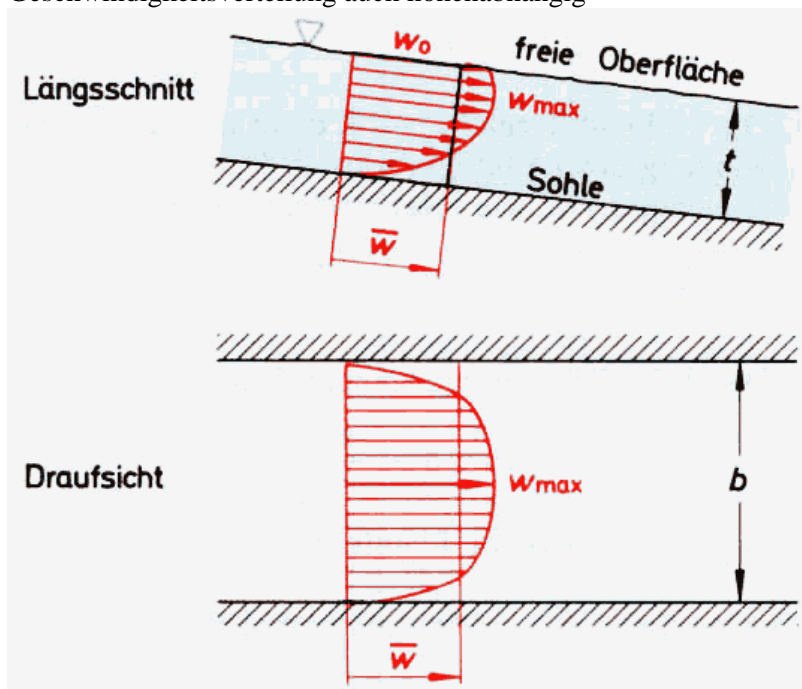
$$\frac{dU}{dt}(t_{opt}) = 0$$

$$\Rightarrow t_{opt} = \sqrt{A/2}$$

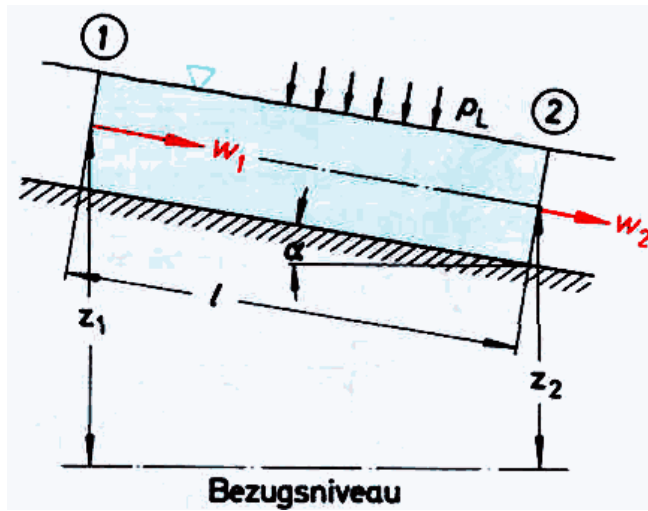
$$b_{opt} = \frac{A}{t_{opt}} = \sqrt{2A}$$

$$\Rightarrow \frac{b_{opt}}{t_{opt}} = 2$$

- für ein optimales Rechteck ergibt sich also
  - $d_h = \sqrt{2A} \approx 1.41\sqrt{A}$
- beim Halbkreis (optimaler Querschnitt) ist
  - $d_h = \sqrt{8A/\pi} \approx 1.60\sqrt{A}$
- Geschwindigkeitsprofil bei offener Oberfläche:
  - häufig sehr hohe Rauigkeit (z.B. Flussboden mit Geröll)
  - Verluste an der Oberfläche durch
    - Reibung mit der Luft
    - Oberflächenwellen
  - Geschwindigkeitsverteilung auch höhenabhängig



- Fließformel:
  - betrachten gleichmäßige Strömung bei Gefälle



- Energiebilanz eines Stromfadens bei konstanter Fließgeschwindigkeit und konstantem Druck (Luftdruck)

$$\begin{aligned} \Delta p_v &= \rho g (z_1 - z_2) \\ &= \lambda l / d_h \rho / 2 \bar{w}^2 \end{aligned}$$

- daraus Kanalgefälle J

$$\begin{aligned} J &:= \sin \alpha \\ &= (z_1 - z_2) / l \\ &= \lambda \bar{w}^2 / (2 g d_h) \end{aligned}$$

- empirische Beziehung für  $\lambda$  bei Kanalströmung

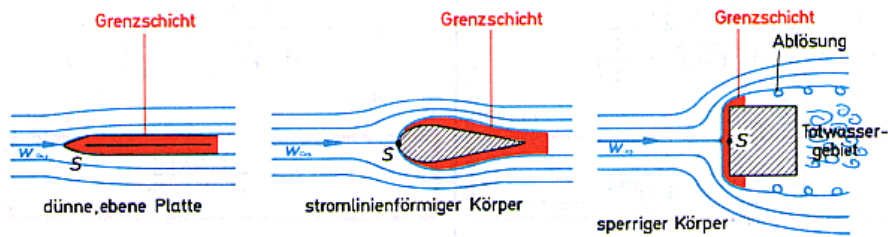
$$\bullet \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left( \frac{3.4}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + 0.32 \frac{k}{d_h} \right)$$

- Aufgaben:

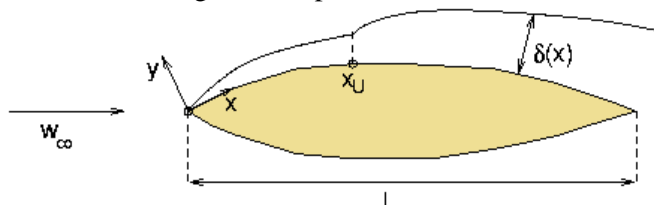
- Aufgabe 13

# Umströmung von Körpern

- Strömungsbilder umströmter Körper:
  - stark abhängig von der Form



- Geschwindigkeitsverteilung
  - $w = 0$  am Staupunkt S
  - $w = 0$  an der Körperoberfläche (Haftbedingung)
  - $w = w_\infty$  weit weg vom Körper
  - Übergang in Schicht um den Körper (Grenzschicht)
- Grenzschicht sehr dünn bei nicht zu starker Reibung (etwa für  $Re > 10^4$ )
- Eigenschaften der Grenzschicht:
  - $w$  hinter S klein  $\rightarrow$  laminar
  - $w$  steigt längs des Körpers an  $\rightarrow$  Umschlag in Turbulenz
  - dickere Grenzschicht  $\rightarrow dw/dy$  kleiner  $\rightarrow$  geringere Wandspannung
- Geometrie der Grenzschicht
  - Koordinate  $x$  folgt der Körperform



- Dicke

$$\delta_l \approx 5 \sqrt{\frac{\nu x}{w_\infty}}$$

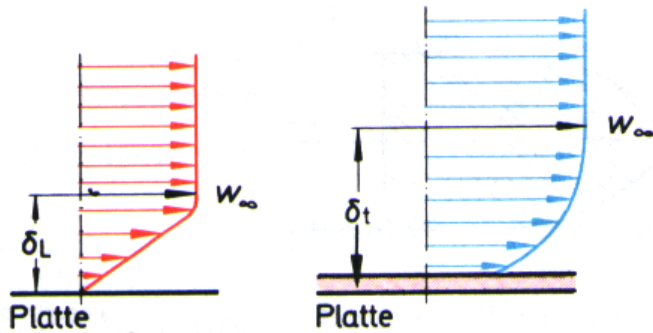
- $$\delta_t \approx 0.37 \sqrt[5]{\frac{\nu x^4}{w_\infty}}$$

- Umschlagspunkt etwa bei

- $$x_U = \frac{\nu Re_{krit}}{w_\infty}$$

- wobei  $Re_{krit} = 3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$  (formabhängig)

- Geschwindigkeitsprofile

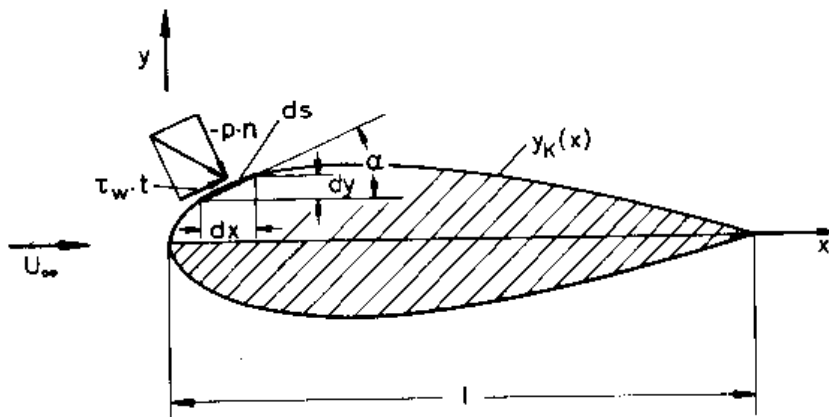


- Beispielwerte für Auto in Luft,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $w = 20 \text{ m/s} \rightarrow$

Re	$1.3 \cdot 10^6$
Re <sub>krit</sub>	$10^6$
$x_U$	0.7 m
$\delta_l$	4 mm
$\delta_t$	16 mm

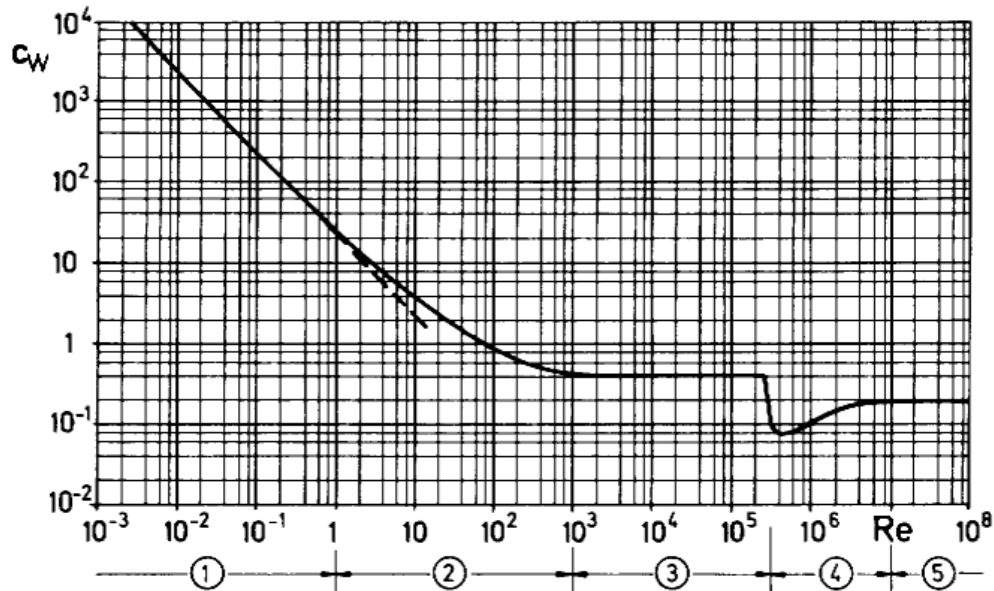
- Widerstandskräfte:

- Fluid übt längs Körperlinie  $y_K(x)$  Kräfte auf Körper aus

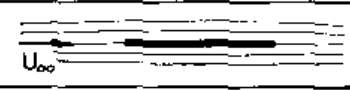
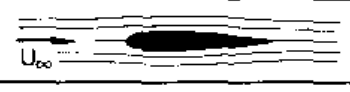




- Resultierende zerlegen
  - Widerstand = parallel zur Strömung
  - Auftrieb = senkrecht zur Strömung
- Widerstand = Summe von Druck- und Reibungswiderstand
  - $F_w = F_{wD} + F_{wR}$
- Ansatz:  $F_w$  proportional zu Staudruck und Stirnfläche
  - $F_w = c_w \rho/2 w_\infty^2 A_{St}$
- Widerstandsbeiwert  $c_w$  abhängig von
  - Form des Körpers

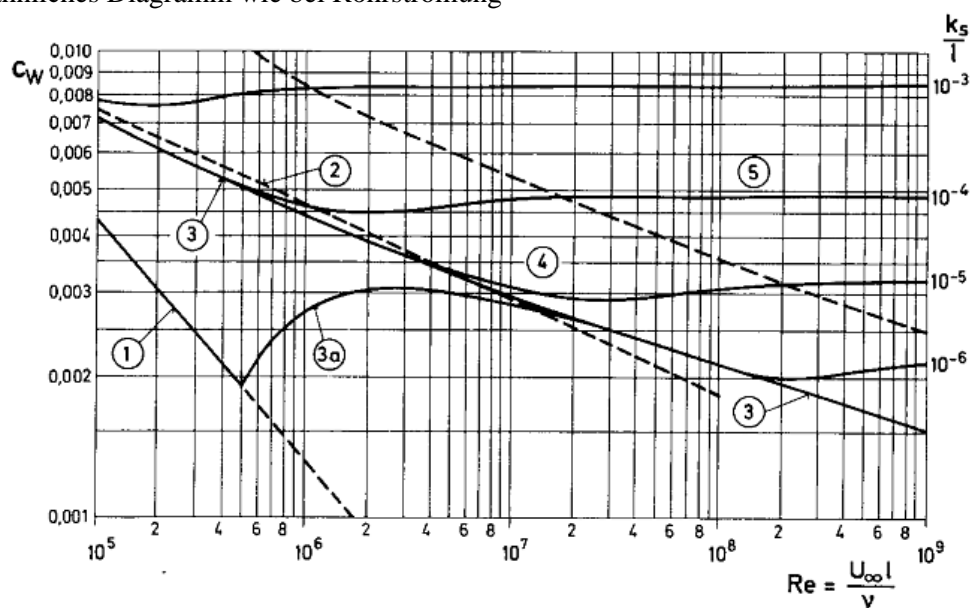
- Reynoldszahl
- Rauigkeit der Oberfläche
- $c_w$  bei umströmter Kugel (Re mit Kugeldurchmesser d)



- $c_w$  bei vielen Körperformen (etwa beim Auto) nahezu unabhängig von Re
- Reibungswiderstand:
  - Summe der Wandspannung längs der Körperoberfläche
  - Vereinfachung: konstante Breite  $b \rightarrow$ 
    - $$F_{wR} = 2b \int_0^l \tau_W dx$$
  - Reibungsbeiwert  $c_{wR}$  analog zu  $c_w$ , bezogen auf umströmte Fläche  $A$ 
    - $F_{wR} = c_{wR} \rho/2 w_\infty^2 A$
    - $F_{wR} = 0$  bei reibungsloser Strömung ( $Re \rightarrow \infty$ )
- Druckwiderstand:
  - Kraft längs der Oberfläche aufsummieren
    - $$F_{wD} = 2b \int_0^l p \frac{dy_K}{dx} dx$$
  - für reibungslose Strömungen ist  $p = \text{const} \rightarrow$ 
    - $$F_{wD} = 2bp \int_0^l y'_K(x) dx$$
    - $$= 2bp(y_K(l) - y_K(0))$$
    - $= 0$
  - Druckwiderstand vollständig umströmter Körper verschwindet in reibungsfreier Strömung (d'Alembertsches Paradoxon)
  - Aufteilung des Widerstands verschiedener Körper

Körper	Druckwiderstand	Reibungswiderstand
	0 %	100 %
	≈ 10 %	≈ 90 %
	≈ 90 %	≈ 10 %
	100 %	0 %

- Widerstandsbeiwert einer längs umströmten Platte:
  - nur Reibungswiderstand
  - abhängig von Re und Rauheit  $k_S/l$
  - kritische Reynoldszahl
    - $R_{krit} \approx 5 \cdot 10^5$
  - $c_w$  bezogen auf umströmte Fläche A, da Stirnfläche hier 0
  - ähnliches Diagramm wie bei Rohrströmung



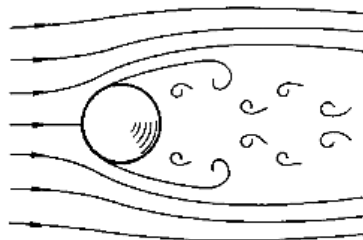
- semi-empirische Beziehungen für verschiedene Bereiche
  - rein laminare Grenzschicht (1)
  - $c_w = \frac{1.328}{\sqrt{Re}}$  (Blasius)
  - rein turbulent, hydraulisch glatt (2)

- $c_w = \frac{0.074}{\sqrt[5]{Re}} \quad (\text{Prandtl})$

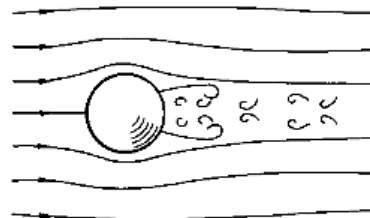
- laminar + turbulent (3a)

- $c_w = \frac{3.913}{(\ln Re)^{2.58}} - \frac{1700}{Re}$

- rein turbulente Strömung bei kleinem Re z.B. durch Rauigkeiten an der Vorderkante
- Ablösung:
  - große Krümmung (insbesondere Kanten) →
    - Teilchen folgen nicht mehr der Kontur (Ablösung der Grenzschicht)
    - stehende bis gegenläufige Bewegung im "Windschatten" (Totwassergebiet)
    - an Kanten Ablösen von Wirbeln (Karmansche Wirbelstraße)
  - Ursache
    - Druck in der Grenzschicht nimmt hinter dem Staupunkt zunächst ab
    - hinter Verdickung muss der Druck wieder ansteigen (Krümmungsdruck!)
    - Teilchen werden dort gebremst
    - zu hohe Reibungsverluste → Teilchen bleiben stehen oder laufen zurück
  - Ablösung erhöht den Druckwiderstand (größere effektive Stirnfläche)
  - turbulente Grenzschicht →
    - höherer Impulsübertrag von außerhalb der Grenzschicht
    - spätere Ablösung
    - geringerer Druckwiderstand
  - Erklärung für kleines  $c_w$  bei großem Re bei umströmter Kugel



unterkritisch

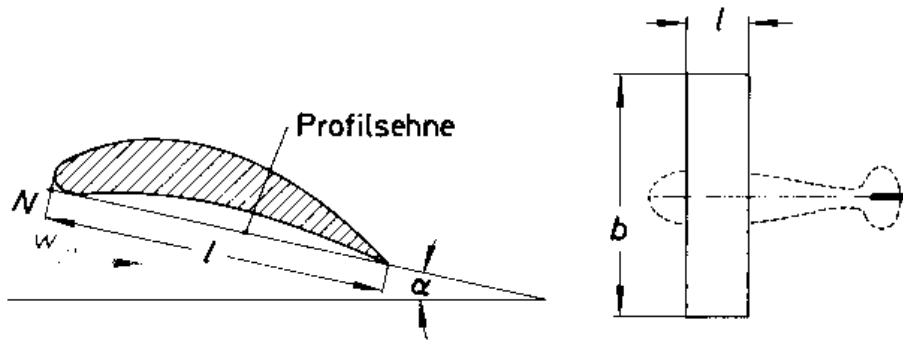


überkritisch

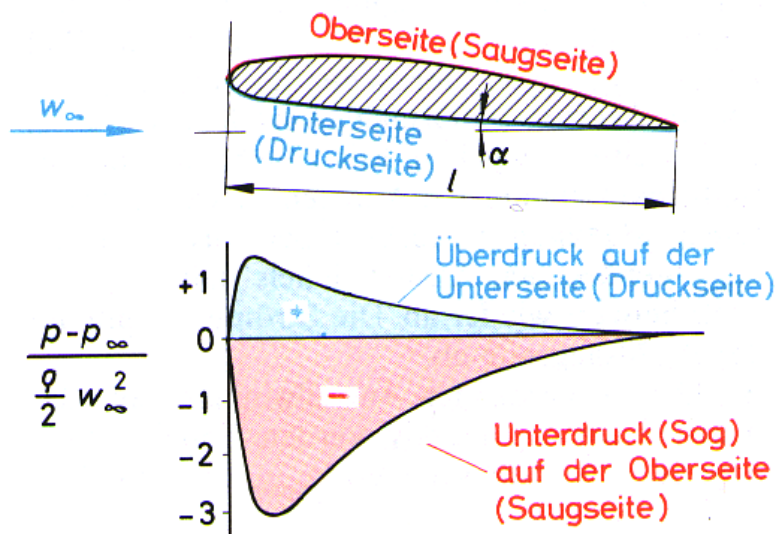
- Aufgaben:
  - Aufgabe 14
  - Aufgabe 15

# Tragflügel

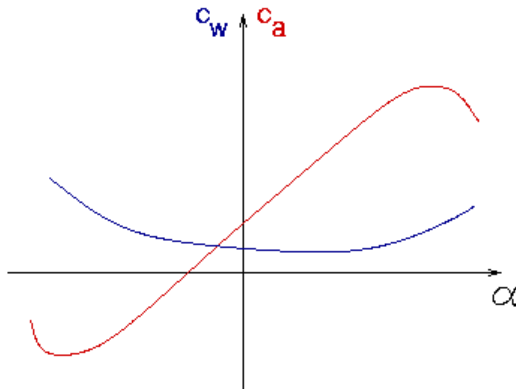
- Geometrie von Tragflächen:
  - speziell geformter Umströmungskörper



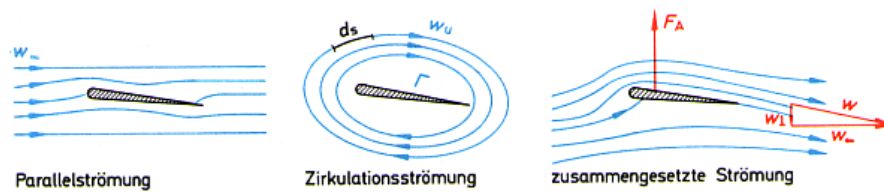
- wichtig z.B. bei
  - Flugzeugen
  - Turbinenschaufeln
  - Umlenkrädern
- Oberseite stärker gekrümmt als Unterseite
- Querschnittsfläche mit
  - Profilsehne, Länge  $l$  (Profillänge)
  - Mittellinie (Skelettlinie)
  - Winkel zwischen Profilsehne und Strömung (Anstellwinkel  $\alpha$ )
- Breite  $b$
- Strömung um eine Tragfläche:
  - Geschwindigkeit oben größer als unten
  - Bernoulli  $\rightarrow$  Druck oben niedriger als unten
  - Druckunterschied zum Druck  $p_\infty$  in der ungestörten Strömung, bezogen auf Staudruck



- Nettoeffekt: Auftriebskraft
- Kräfte am Tragflügel:
  - Auftrieb senkrecht zur Strömung, beschrieben durch
    - $F_A = c_a \frac{\rho}{2} w_\infty^2 A_{Fl}$
    - Flügelfläche  $A_{Fl} \approx l b$
  - Widerstand  $F_w$  in Strömungsrichtung wie oben
  - $c_a, c_w$  hängen ab von
    - Reynoldszahl
    - Oberflächenrauigkeit (besonders an der Flügelnase)
    - Tragflügelprofil
    - Anstellwinkel
  - Abhängigkeit vom Anstellwinkel



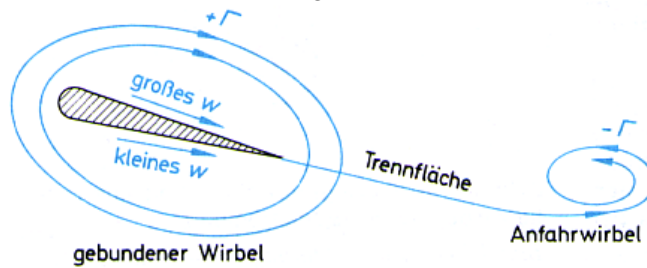
- Störungen der Strömung:
  - Abriss an der Oberseite
    - zu geringer Druck  $\rightarrow$  Ablösen der Grenzschicht
    - geschieht u.a. bei zu großem Anstellwinkel
    - begrenzt  $c_a(\alpha)$
  - Kavitation (bei Flüssigkeitsströmung)
    - großer Unterdruck
      - $\rightarrow$  Entstehen von Dampfblasen
      - $\rightarrow$  Ablösen der Strömung
    - Dampfblasen fallen in höherem Druck zusammen
      - $\rightarrow$  starke Schläge
      - $\rightarrow$  mechanische Schäden
- Beschreibung der Strömung:
  - Überlagerung aus
    - reibungsloser Parallelströmung
    - Wirbel um die Tragfläche (Zirkulationsströmung)



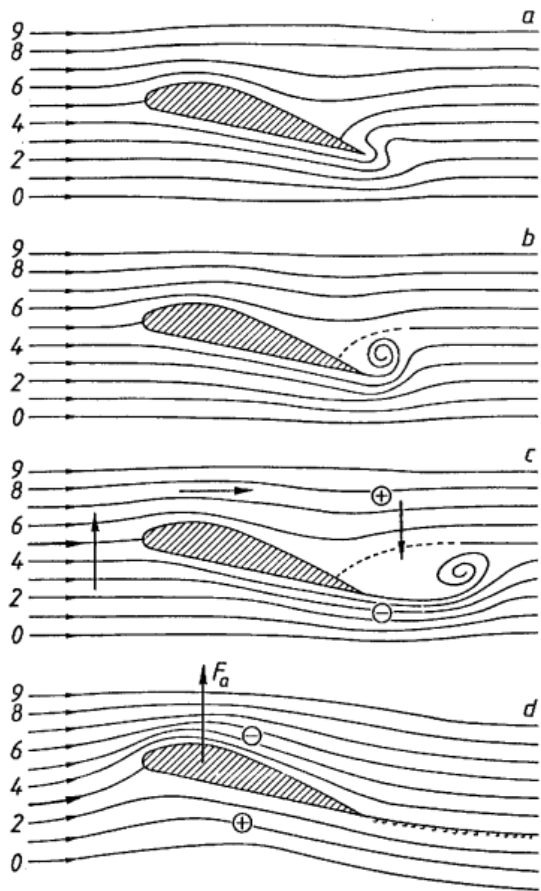
- Stärke des Wirbels (Zirkulation)

- $\Gamma = \oint \vec{w} \cdot d\vec{s}$

- Wert vom Abstand zum Körper unabhängig (Potentialwirbel)
- bei Vernachlässigung von Reibung und ggf. Ablösung
  - $F_A = \rho w_\infty b \Gamma$  (Satz von Kutta-Joukowski)
- Zirkulation entsteht als Gegenwirbel zum Anfahrwirbel



- Entstehung der Wirbel:



- Aufbau der Grenzschicht braucht Zeit
  - → am Anfang nahezu Potentialströmung
- Druck am hinteren Ende wegen Reibung zu klein für Umströmung
  - → Wirbel entsteht
- zunehmender Reibungseinfluss
  - → Wirbel löst sich ab
  - → Geschwindigkeit unten zu groß
  - → Druck unten zu klein
- oberer Stromfaden wird nach unten gezogen
  - → Geschwindigkeit oben wächst
  - → Umverteilung der Strömung nach oben
- Aufgaben:
  - Aufgabe 16

# Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12
- Aufgabe 13
- Aufgabe 14
- Aufgabe 15
- Aufgabe 16

## Aufgabe 1

- In einem Autoreifen, der unter einem Druck von 2.2 bar steht, befindet sich ein kleines Loch. Der Außendruck beträgt 1 bar, die Temperaturen sind außen und innen gleich 20 °C. Mit welcher Geschwindigkeit strömt die Luft aus?
- Hinweis:
  - Vernachlässigen Sie die Strömungsgeschwindigkeit im Reifen und nehmen Sie an, die Dichte der ausströmenden Luft sei direkt am Innenrand des Lochs noch so groß wie im Innern des Reifens.
  - $R_1 = 287.2 \text{ J}/(\text{kg K})$
- Lösung

## Aufgabe 2

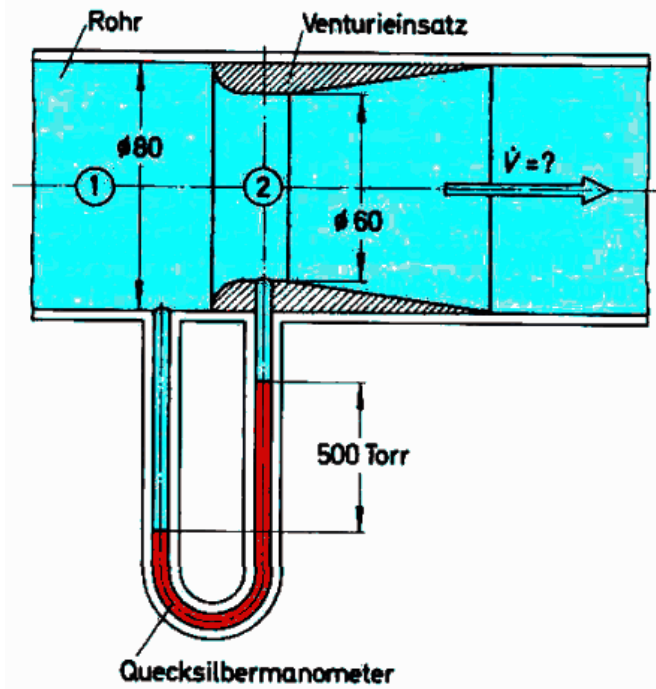
- Ein zylindrischer Wasserbehälter mit einer Querschnittsfläche von  $1200 \text{ cm}^2$  sei  $50 \text{ cm}$  hoch mit Wasser gefüllt. Er werde durch eine Bodenöffnung mit  $4 \text{ cm}^2$  entleert. Wie lange dauert die Entleerung?
- Hinweise:
  - Die Wasserstandshöhe  $z$  nimmt in der kurzen Zeit  $dt$  ab um
    - $dz = -w_1 dt$
  - Benutzen Sie die Formel für die Ausflussgeschwindigkeit, um daraus eine Differentialgleichung für  $z(t)$  zu erhalten. Lösen Sie diese durch Trennung der Variablen und setzen Sie die gegebenen Werte ein.
- Lösung

## Aufgabe 3

- In einem Vergaser wird Luft durch eine Düse beschleunigt. Durch ein kleines Loch der Querschnittsfläche  $2 \text{ mm}^2$  in der Düse wird dabei der Kraftstoff  $2 \text{ cm}$  hochgesaugt. Wie groß muss die Geschwindigkeit der Luft in der Düse sein, wenn  $7.2 \text{ l/h}$  Kraftstoff angesaugt werden sollen?
- Werte
  - Dichte der Luft:  $\rho_L = 1.2 \text{ kg/m}^3$   
Dichte des Kraftstoffs:  $\rho_K = 840 \text{ kg/m}^3$
- Hinweis:
  - Stellen Sie für die einströmende Luft und den angesaugten Kraftstoff jeweils die Energiebilanz auf. Vernachlässigen Sie dabei die Anfangsgeschwindigkeit der angesaugten Luft sowie Reibungseffekte.
- Lösung

## Aufgabe 4

- Zur Messung der Durchflussmenge in einem Rohr wird eine Verengungsstelle eingebaut und der Druckabfall gegenüber dem freien Rohr gemessen (Venturirohr)



- Wie groß ist der Wasserstrom ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ), wenn bei einer Verengung von  $d_1 = 80 \text{ mm}$  auf  $d_2 = 60 \text{ mm}$  der Druck um 666.7 mbar absinkt?
- Lösung

## Aufgabe 5

- Eine Pumpe der Leistung  $P = 2 \text{ kW}$  pumpt Wasser ( $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ) aus einem Behälter durch ein Rohr mit einem Durchmesser von  $70 \text{ mm}$  nach oben. Die Strömungsgeschwindigkeit betrage  $5 \text{ m/s}$ . Wie hoch kommt das Wasser, wenn der Druck oben und unten am Rohr gleich groß sein sollen ?
- Lösung

## Aufgabe 6

- Eine Kreiselpumpe mit einem Laufrad-Durchmesser von 30 cm und einer Drehzahl von 3000 Umdrehungen/Minute hat am Laufradaustritt eine Ausströmgeschwindigkeit von  $c_2 = 45$  m/s. Die Flüssigkeit tritt radial im Innern ein und strömt unter einem Winkel von  $20^\circ$  zur Tangentialrichtung ab. Wie groß ist die spezifische technische Arbeit  $w_t$  der Pumpe (Stutzenarbeit) ?
- Lösung

## Aufgabe 7

- Bestimmen Sie die Reynoldszahlen der folgenden Strömungen:
  1. Blutfluss ( $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\eta = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$ ) in den Kapillaren ( $d = 8 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\bar{w} = 5 \text{ mm/s}$ ) und in der Aorta ( $d = 20 \text{ mm}$ ,  $\bar{w} = 0.3 \text{ m/s}$ )
  2. Rohrströmung,  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $\bar{w} = 1 \text{ m/s}$ , mit Wasser ( $\nu = 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ), Getriebeöl ( $\nu = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ ) und Luft ( $\nu = 1.56 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ )
- Lösung

## Aufgabe 8

- Die bei Orkan an Hochspannungsleitungen auftretenden Strömungskräfte sollen in einem Wasserkanal modelliert werden. Die Werte beim Original betragen

Windgeschwindigkeit  $v_0 = 120 \text{ km/h}$

Drahtdurchmesser  $d_0 = 1.0 \text{ cm}$

Oberflächenrauheit  $k_0 = 0.02 \text{ mm}$

kinemat. Viskosität  $\nu_0 = 1.39 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Das Wasser ( $\nu_M = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) fließe mit  $v_M = 0.3 \text{ m/s}$ . Welchen Durchmesser und welche Rauheit muss der Modelldraht haben?

- Lösung

## Aufgabe 9

- Eine geschickte Aufschlagtechnik im Volleyball bewirkt, dass der Ball mitten im Flug plötzlich steiler fällt. Wie schnell ist er dann ? (Durchmesser  $d = 21 \text{ cm}$ ,  $\nu_{\text{Luft}} = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ )
- Lösung

## Aufgabe 10

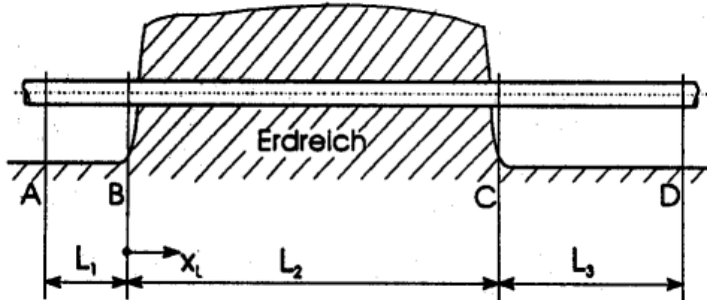
- Durch eine Rohrleitung von 50 mm Durchmesser und 1 km Länge fließen stündlich  $10 \text{ m}^3$  Heizöl mit  $\nu = 4.0 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  und einer Dichte von  $900 \text{ kg/m}^3$ . Wie groß ist der für den Transport erforderliche Druckunterschied?
- Lösung

## Aufgabe 11

- Durch eine horizontale Stahlrohrleitung von 2 km Länge und 50 cm Durchmesser gehen in der Stunde  $1200 \text{ m}^3$  Wasser von  $15 \text{ }^\circ\text{C}$ . Wie groß ist der entstehende Druckverlust, wenn die Rauheit  $0.1 \text{ mm}$  beträgt ?
- Lösung

## Aufgabe 12

- Eine horizontale, hydraulisch glatte Wasserleitung verläuft teilweise unzugänglich durch Erdreich



An der unzugänglichen Stelle zwischen B und C wird ein Leck vermutet.

- Um den Volumenstrom und den Ort des Lecks zu bestimmen, misst man den Druck an den Stellen A, B, C und D. Man erhält folgende Werte:

- $d = 0.05 \text{ m}$
- $L_1 = L_3 = 1000 \text{ m}, L_2 = 1500 \text{ m}$
- $p_A = 6 \text{ bar}, p_B = 4 \text{ bar}, p_C = 1.5 \text{ bar}, p_D = 1 \text{ bar}$
- $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

1. Bestimmen Sie die mittleren Strömungsgeschwindigkeiten  $\bar{w}$  und die Reynoldszahlen jeweils in den Teilstücken AB und CD.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel von Blasius und prüfen Sie hinterher, ob dies gerechtfertigt war.

2. Bestimmen Sie nun den Volumenstrom des Lecks.
3. Ermitteln Sie schließlich den Ort des Lecks.

- Lösung

## Aufgabe 13

- Ein rechteckiger Kanal mit hydraulisch optimalem Profil soll pro Sekunde  $4 \text{ m}^3$  Wasser ( $\nu = 1.13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) mit einer Geschwindigkeit von  $2 \text{ m/s}$  abführen. Wie groß muss das Gefälle  $J$  sein, wenn Kanalsohle und -wände aus unverputztem Beton ( $k = 5 \text{ mm}$ ) bestehen ?
- Lösung

## Aufgabe 14

- Ein Auto mit dem  $c_w$ -Wert 0.4 und einer Stirnfläche von  $2 \text{ m}^2$  legt eine Strecke von 100 km mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h bzw. von 120 km/h zurück.
  1. Welche Leistung muss bei Windstille zum Überwinden des Luftwiderstands jeweils aufgebracht werden?
  2. Wie groß ist der daraus resultierende Energieverbrauch für die Strecke?
- Werte:
  - Dichte der Luft  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$
- Lösung

## Aufgabe 15

- Eine rechteckige hydraulisch glatte Platte mit den Dimensionen 0.1 m x 0.2 m wird von Wasser mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s angeströmt. Wie groß ist die auf die Platte ausgeübte Widerstandskraft
  1. bei paralleler Anströmung in Längsrichtung
  2. bei paralleler Anströmung in Querrichtung
  3. bei senkrechter Anströmung ?
- Werte:
  - $\nu = 1.13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
  - $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$
  - $c_w = 1.15$  bei senkrechter Anströmung
- Lösung

## Aufgabe 16

- Eine Boeing 747 hat die Flügelfläche  $A_{Fl} = 511 \text{ m}^2$  und das Startgewicht  $m = 320 \text{ t}$ . Beim Abheben beträgt die Geschwindigkeit  $w = 234 \text{ km/h}$ , beim Reiseflug in 11 km Höhe 0.9 Mach. Wie groß ist der Auftriebsbeiwert
  1. beim Reiseflug
  2. beim Start ?
- Lösung

# Anhang

• Literatur

• Nachweise

## Literatur

1. W.Bohl, Technische Strömungslehre  
Vogel, 11. Aufl 1998, ISBN: 3-8023-1740-8
2. K.Gersten, Einführung in die Strömungsmechanik  
Vieweg, 6. Aufl 1991, ISBN 3-528-43344-2
3. H. Oertel, Strömungsmechanik  
Vieweg 1999, ISBN 3-528-03893-4
4. K.Gersten, H.Herwig: Strömungsmechanik  
Vieweg 1992, ISBN 3-528-06472-2
5. H. Iben: Strömungslehre in Fragen und Aufgaben  
Teubner 1997, ISBN: 3-8154-3033-X
6. L. Böswirth: Technische Strömungslehre  
Vieweg, 3. Aufl. 2000, ISBN: 3-528-24925-5

# Nachweise

- Bilder:

Bild-Nr	Herkunft
21,22,23,24,25,26,27,28, 31,37,38,39,41,42,43,48,49, 50,52,57,59,60,62,63	[1]
32,33,35,36,44,53,54,55, 56,58	[2]
45	[5]
19	[6]

## Lösung von Aufgabe 1

- Nach Bernoulli gilt für die Werte im Innern (Index i) und am Loch (Index a):
  - $p_i/(\rho g) + w_i^2/(2g) = p_a/(\rho g) + w_a^2/(2g)$
- wobei  $\rho$  am Loch gleich dem im Innern sei.
- Wegen
  - $w_i \approx 0$
- folgt
  - $w_a = \sqrt{\frac{2(p_i - p_a)}{\rho}}$
- Die Dichte bestimmt man mit der idealen Gasgleichung:
  - $p V = m R_i T$
  - $\Rightarrow \rho = m/V = p_i/(R_i T) = 2.61 \text{ kg/m}^3$
- Damit ist
  - $w_a = 303.2 \text{ m/s}$

## Lösung von Aufgabe 2

- Es war

$$\begin{aligned}
 w_1 &= \frac{A_2}{A_1} w_2 \\
 &= \frac{A_2}{A_1} \sqrt{\frac{2gz}{1 - (A_2/A_1)^2}} \\
 &= \sqrt{\frac{2gz}{(A_1/A_2)^2 - 1}} \\
 \circ &= \alpha \sqrt{z}
 \end{aligned}$$

- mit der Abkürzung

$$\circ \quad \alpha := \sqrt{\frac{2g}{(A_1/A_2)^2 - 1}}$$

- In der Zeit  $dt$  sinkt der Wasserspiegel um

$$\begin{aligned}
 dz &= -w_1 dt \\
 &= -\alpha \sqrt{z} dt \\
 \circ \Rightarrow \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} &= -\alpha dt
 \end{aligned}$$

- Integrieren von der Anfangszeit  $t = 0$  mit der Höhe  $z = h$  bis zur Ausflusszeit  $T$  bei der Höhe  $z = 0$ :

$$\begin{aligned}
 \int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} &= -\alpha \int_0^T dt \\
 \Rightarrow \quad -2\sqrt{h} &= -\alpha T \\
 \Rightarrow \quad T &= \frac{2}{\alpha} \sqrt{h} \\
 &= \sqrt{\frac{2h}{g} (A_1^2/A_2^2 - 1)} \\
 \circ
 \end{aligned}$$

- Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$\circ \quad T = 95.8 \text{ s}$$

- Dieser Wert ist natürlich zu klein, da Reibungsvorgänge und Turbulenzen beim Ausfluss vernachlässigt worden sind.

## Lösung von Aufgabe 3

- Aus dem Volumenstrom  $\dot{V}_K = 7.2 \text{ l/h}$  des Kraftstoffs ergibt sich seine Geschwindigkeit  $w_K$  an der Düse:
  - $\dot{V}_K = w_K A$
  - $\Rightarrow w_K = \dot{V}_K / A = 1 \text{ m/s}$
- Mit Hilfe der Bernoulli-Gleichung für den Kraftstoff erhält man damit den Unterdruck in der Düse
  - $p_0 = p_1 + \rho_K g h + \rho_K / 2 w_K^2$
  - $\Rightarrow p_0 - p_1 = \rho_K g h + \rho_K / 2 w_K^2 = 584.8 \text{ Pa}$
- Die Bernoulli-Gleichung für die Luft liefert dann die Geschwindigkeit  $w_L$  der Luft in der Düse
  - $p_0 + \rho_L / 2 w_0^2 = p_1 + \rho_L / 2 w_L^2$
- Mit  $w_0 \approx 0$  folgt
  - $w_L = \sqrt{\frac{2}{\rho_L} (p_0 - p_1)} = 31.22 \text{ m/s}$

## Lösung von Aufgabe 4

- Aus der Kontinuitätsgleichung folgt
  - $w_1 A_1 = w_2 A_2$
  - $\Rightarrow w_2 = w_1 A_1/A_2 = w_1 d_1^2/d_2^2$
- Damit erhält man aus der Bernoulli-Gleichung
  - $p_1 + \rho/2 w_1^2 = p_2 + \rho/2 w_2^2$
  - $\Rightarrow p_1 - p_2 = \rho/2 (w_2^2 - w_1^2) = \rho/2 (d_1^4/d_2^4 - 1) w_1^2$
  - $w_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{p_1 - p_2}{d_1^4/d_2^4 - 1}} = 7.856 \text{ m/s}$
- Der Volumenstrom ist somit

$$\begin{aligned}\dot{V} &= A_1 w_1 \\ &= \pi/4 d_1^2 w_1 \\ &= 0.0395 \text{ m}^3/\text{s} \\ &= 39.5 \text{ l/s}\end{aligned}$$

## Lösung von Aufgabe 5

- Da der Druck gleich bleibt, wird die Arbeit der Pumpe in Hubarbeit und Beschleunigungsarbeit umgewandelt. Aus der Bernoulli-Gleichung wird also

- $\rho w_{t12} = \rho g h + \frac{1}{2} \rho w^2$

- $\Rightarrow h = (w_{t12} - \frac{1}{2} w^2)/g$

- Die Leistung ist

$$P = w_{t12} \dot{m}$$

$$= w_{t12} \rho A w$$

$$\Rightarrow w_{t12} = P/(\rho A w)$$

$$= 4 P/(\rho \pi d^2 w) = 103.9 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

- Daher

- $h = 4 P/(g \rho \pi d^2 w) = 9.32 \text{ m}$

## Lösung von Aufgabe 6

- Die Leistung  $P$  hängt mit der Stutzenarbeit zusammen durch

- $P = \dot{m} w_t$

- Andererseits ist

$$P = M_S \omega$$

$$= \dot{m} (r_2 c_{2t} - r_1 c_{1t}) \omega$$

- Also mit der Drehzahl  $n = \omega/(2\pi)$

$$w_t = P/\dot{m}$$

$$= (r_2 c_{2t} - r_1 c_{1t}) \omega$$

$$= 2\pi (r_2 c_{2t} - r_1 c_{1t}) n$$

- Weiter ist

- $c_{1t} = 0, c_{2t} = c_2 \cos(\alpha),$

- somit

$$w_t = 2\pi r_2 c_2 \cos(\alpha) n$$

$$= 1993 \text{ J/kg}$$

## Lösung von Aufgabe 7

- Mit  $Re = w L \rho / \eta = w L / \nu$  ergibt sich jeweils
  1. Kapillaren:  $Re = 10^{-2}$   
Aorta:  $Re = 1500$
  2. Wasser:  $Re = 10^5$   
Getriebeöl:  $Re = 200$   
Luft:  $Re = 6.41 \cdot 10^3$

## Lösung von Aufgabe 8

- Die Reynoldszahl beim Original beträgt
  - $Re_0 = v_0 d_0 / \nu_0 = 2.40 \cdot 10^4$
- Bei gleicher Reynoldszahl beträgt die Dicke des Modelldrahts daher
  - $d_M = Re_0 \nu_M / v_M = 0.08 \text{ m}$
- Wegen der geometrischen Ähnlichkeit erhält man für die Oberflächenrauheit des Modelldrahts
  - $k_M = k_0 d_M/d_0 = 0.16 \text{ mm}$

## Lösung von Aufgabe 9

- Die plötzliche Flugbahnänderung geschieht, wenn der Ball vom überkritischen in den kritischen Bereich kommt, wodurch sich die Widerstandskraft plötzlich erhöht. Dies geschieht bei  $Re_{\text{krit}} = 3 \cdot 10^5$ . Die Geschwindigkeit beträgt dann
  - $w = Re_{\text{krit}} \nu_{\text{Luft}} / d = 21.4 \text{ m/s} = 77.1 \text{ km/h}$

## Lösung von Aufgabe 10

- Zunächst mittlere Geschwindigkeit aus Volumenstrom:
  - $\bar{w} = \dot{V} / (\pi d^2/4) = 1.42 \text{ m/s}$
- Damit die Reynoldszahl bestimmen
  - $Re = \bar{w} d / \nu = 1775$
- $Re < 2320$ , also laminare Strömung.
- Rohrreibungszahl:
  - $\lambda = 64/Re = 0.036$
- Daraus den Druckunterschied:
  - $\Delta p = \lambda l \bar{w}^2 \rho / (2 d) = 6.54 \text{ bar}$

## Lösung von Aufgabe 11

- Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \dot{V}/(\pi d^2/4) \\ &= 1.70 \text{ m/s}\end{aligned}$$

- Durch Interpolation aus Tafelwerten erhält man die Stoffeigenschaften von Wasser bei 15 °C.
  - Dichte  $\rho = 998.9 \text{ kg/m}^3$
  - kinematische Viskosität  $\nu = 1.16 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
- Damit ist die Reynoldszahl
  - $Re = \bar{w} d/\nu = 7.34 \cdot 10^5$
- Die Strömung ist also turbulent.
- Weiter sind
  - $k/d = 2 \cdot 10^{-4}$
  - $Re k/d = 147$
- daher liegt die Strömung im Übergangsbereich.
- Mit dem Startwert 0.040 (oder irgendeinem anderen!) erhält man durch Iteration aus der Colebrook-Formel
  - $\lambda = 0.0150$
- Damit ist der Druckabfall

$$\begin{aligned}\Delta p_v &= \lambda \cdot l/d \cdot \rho/2 \cdot \bar{w}^2 \\ &= 0.86 \text{ bar}\end{aligned}$$

## Lösung von Aufgabe 12

### 1. Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeiten und Reynoldszahlen:

- Der Druckabfall bestimmt sich aus

$$\circ \Delta p_v = \lambda \cdot l/d \cdot \rho/2 \cdot \bar{w}^2$$

- Weiter gilt (vermutlich) die Formel von Blasius

$$\circ \lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\bar{w}d/\nu}}$$

- Setzt man dies oben ein und löst nach  $\bar{w}$  auf, erhält man

$$\circ \bar{w} = \left( \frac{2d\Delta p_v}{0.316\rho l \sqrt[4]{d/\nu}} \right)^{4/7}$$

- Dies ergibt auf den beiden Teilstücken

$$\circ \bar{w}_{AB} = 0.969 \text{ m/s}, \bar{w}_{CD} = 0.439 \text{ m/s}$$

- Die Reynoldszahlen erhält man nun aus  $Re = \bar{w} d / \nu$  zu

$$\circ Re_{AB} = 4.85 \cdot 10^4, Re_{CD} = 2.19 \cdot 10^4$$

- Beide Teilströmungen sind also turbulent und liegen im Gültigkeitsbereich der Blasius-Beziehung.

### 2. Die Volumenströme erhält man direkt aus $\dot{V} = A \bar{w} = \bar{w} \pi d^2/4$ :

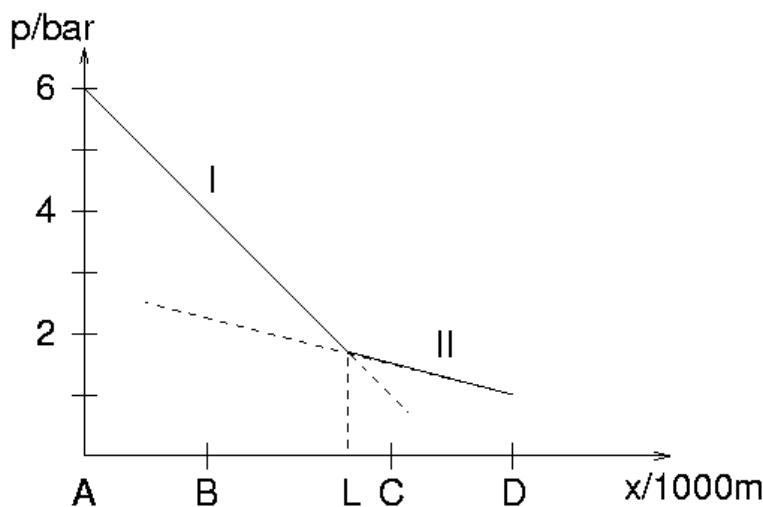
- $\dot{V}_{AB} = 1.90 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

- $\dot{V}_{CD} = 0.862 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

- $\Rightarrow \dot{V}_{Leck} = \dot{V}_{AB} - \dot{V}_{CD} = 1.04 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

### 3. Ort des Lecks:

- Der Druck fällt vor und hinter dem Leck linear ab. Dabei ändert sich die Steigung des Abfalls am Leck:



- Der Ort des Lecks ist der Schnittpunkt der beiden Geraden I und II. Mit den Bezeichnungen

$$\circ \hat{p} = p / \text{bar}, \hat{x} = x / \text{km}$$

- lauten diese

- I:  $\hat{p} = -2 \hat{x} + 6$
- II:  $\hat{p} = -0.5 \hat{x} + 2.75$
- Der Schnittpunkt  $\hat{x}_L$  ergibt sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen zu
  - $\hat{x}_L = 2.1667$
- Das Leck befindet sich also 1167 m hinter Punkt B.

## Lösung von Aufgabe 13

- Die Querschnittsfläche erhält man aus
  - $A = \dot{V} / \bar{w} = 2 \text{ m}^2$
- Für einen optimalen rechteckigen Kanal ist
  - $d_h = (2A)^{1/2} = 2 \text{ m}$
- Die Kennzahlen sind also
  - $Re = d_h \bar{w} / \nu = 3.54 \cdot 10^6$
  - $k/d = 2.5 \cdot 10^{-3}$
- Mit Hilfe der empirischen Formel soll nun  $\lambda$  bestimmt werden. Da sie implizit ist, wird zunächst ein brauchbarer Schätzwert bestimmt, indem man  $Re = \infty$  setzt  $\rightarrow$

- $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg\left(0.32 \frac{k}{d_h}\right)$

- Damit erhält man für  $\lambda$ 
  - $\lambda = 2.60 \cdot 10^{-2}$
- Nachiterieren mit der ganzen Formel liefert
  - $\lambda = 2.61 \cdot 10^{-2}$
- d.h. der Einfluss der Reynoldszahl ist hier gering.
- Damit kann nun das Gefälle bestimmt werden

$$\begin{aligned} J &= \lambda / d_h \cdot \bar{w}^2 / (2g) \\ &= 2.66 \cdot 10^{-3} = 0.266 \% \end{aligned}$$

# Lösung von Aufgabe 14

1. Aufgebrachte Leistung:

$$\begin{aligned} P &= F_w w \\ &= c_w (1/2) \rho w^2 A_{St} w \\ &= (1/2) c_w \rho A_{St} w^3 \end{aligned}$$

- $w = 60 \text{ km/h} \Rightarrow P = 2.2 \text{ kW}$
- $w = 120 \text{ km/h} \Rightarrow P = 17.8 \text{ kW}$

2. Bestimmung der Strecke:

- Zeit  $t$  zum Zurücklegen der Strecke  $s$ 
  - $t = s/w$
- Energieverbrauch

$$\begin{aligned} E &= P t \\ &= (1/2) c_w \rho A_{St} s w^2 \end{aligned}$$

- $w = 60 \text{ km/h} \Rightarrow E = 3.7 \text{ kWh}$
- $w = 120 \text{ km/h} \Rightarrow E = 14.8 \text{ kWh}$

## Lösung von Aufgabe 15

### 1. Längsumströmung:

- Reynoldszahl mit  $l = 0.2 \text{ m}$ 
  - $Re = l w / \nu = 1.77 \cdot 10^6 > Re_{krit}$
- Umschlagpunkt der Grenzschicht
  - $x_U = \nu Re_{krit} / w = 5.65 \text{ cm}$
- Berechnung von  $c_w$  nach Fall 3a (laminar + turbulent) ergibt
  - $c_w = 3.1 \cdot 10^{-3}$
- Damit Reibungswiderstand
  - $F_w = c_w (1/2) \rho w^2 2 l_1 l_2 = 6.2 \text{ N}$

### 2. Quenumströmung:

- analog mit  $l = 0.1 \text{ m}$ 
  - $Re = 8.85 \cdot 10^5 > Re_{krit}$
- $c_w$  wieder mit Fall 3a
  - $c_w = 2.7 \cdot 10^{-3}$
- Reibungswiderstand
  - $F_w = 5.4 \text{ N}$

### 3. Anströmung:

- Reiner Druckwiderstand mit konstantem  $c_w$ 
  - $F_w = c_w (1/2) \rho w^2 A = 1150 \text{ N}$

## Lösung von Aufgabe 16

1. Reiseflug:

- Mit den Beziehungen für die Standard-Athmosphäre erhält man in der Höhe  $z = 11$  km

$$\rho_1 = \rho_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{1}{n-1}} = 0.3640 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\circ T_1 = T_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{H_0}\right) = 216.7 \text{ K}$$

- Die Schallgeschwindigkeit in 11 km Höhe ergibt sich (bei dem Standardwert  $\kappa = 1.40$ ) zu

$$\circ a_1 = \sqrt{\kappa R_i T_1} = 295.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- die Geschwindigkeit ist also

$$\circ w_1 = 0.9 a_1 = 265.6 \text{ m/s}$$

- Da Auftrieb = Gewichtskraft, folgt

$$c_a \frac{\rho_1}{2} w_1^2 A_{Fl} = mg$$

$$\circ \Rightarrow c_a = \frac{2mg}{\rho_1 w_1^2 A_{Fl}} = 0.478$$

2. analog beim Abheben:

- $c_a = 2.37$

- Bemerkung: Beim Start wird weniger Auftrieb als der hier berechnete gebraucht, da der Schub der Triebwerke auch vertikal wirkt.