

Strömungslehre 1

- Stoffeigenschaften von Fluiden
- Hydrostatik
- Aerostatik
- Kinematik - Fluide in Bewegung
- Aufgaben
- Anhang

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Stoffeigenschaften von Fluiden
 - Einleitung
 - Dichte
 - Schallgeschwindigkeit
 - Viskosität
 - Grenzflächen
- Hydrostatik
 - Hydrostatischer Druck
 - Freie Oberfläche
 - Druckkraft auf eine ebene Wand
 - Druckkraft auf eine gekrümmte Wand
 - Auftrieb und Schwimmen
- Aerostatik
- Kinematik - Fluide in Bewegung
 - Übersicht
 - Beschreibung von Strömungen
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
 - Aufgabe 7
 - Lösung von Aufgabe 7
 - Aufgabe 8
 - Lösung von Aufgabe 8
 - Aufgabe 9
 - Lösung von Aufgabe 9
 - Aufgabe 10
 - Lösung von Aufgabe 10
 - Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 11

- Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 12
- Aufgabe 13
 - Lösung von Aufgabe 13
- Aufgabe 14
 - Lösung von Aufgabe 14
- Aufgabe 15
 - Lösung von Aufgabe 15
- Anhang
 - Literatur
 - Nachweise

Stoffeigenschaften von Fluiden

- Einleitung
- Dichte
- Schallgeschwindigkeit
- Viskosität
- Grenzflächen

Einleitung

- **Fluide:**
 - **Sammelbezeichnung für Flüssigkeiten und Gase**
 - **charakterisierende Eigenschaften**
 - ändern ihre Form
 - nehmen keine Schubspannungen auf
 - i.f. immer homogen angenommen
- **Kontinuumsannahme:**
 - **Masse ist stetig über das Volumen verteilt**
 - **von Aufbau aus Molekülen wird abgesehen**
 - **gültig außer bei extrem niedrigen Dichten**
- **Technische Anwendungen:**
 - **Luftwiderstand von Autos oder Flugzeugen**
 - **Druckabfall in Leitungsrohren (z.B. Gas, Dampf, Wasser)**
 - **Strömungsmaschinen (Pumpen, Kompressoren, Turbinen)**

Dichte

- Definition der Dichte ρ :
 - für homogenes Fluid der Masse m im Volumen V
 - $\rho = m / V$
 - i.a. an verschiedenen Stellen unterschiedlich (ortsabhängig)
 - Dichte am Ort x (kleines Volumen dV mit Masse dm)

- $\rho = \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{dm}{dV}$

- Abhängigkeit von Druck und Temperatur:
 - relative Volumenänderung dV/V bei Druckänderung dp

- $\frac{dV}{V} = -\kappa dp$

- Kompressibilität κ

- relative Volumenänderung dV/V bei Temperaturänderung dT

- $\frac{dV}{V} = \gamma dT$

- Volumenausdehnungskoeffizient γ

- gesamte Änderung daher

- $\frac{dV}{V} = -\kappa dp + \gamma dT$

- Änderung der Dichte

$$\frac{d\rho}{dV} = \frac{d}{dV} \left(\frac{m}{V} \right) = -\frac{m}{V^2} = -\frac{\rho}{V}$$

- $\Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} = \kappa dp - \gamma dT$

- Dichteänderungen bei Flüssigkeiten:
 - einige Werte bei 1 bar, 20 °C

Flüssigkeit	$\gamma [10^{-3} \text{ 1/K}]$	$\kappa [10^{-5} \text{ 1/bar}]$
Wasser	0.207	4.68
Methanol	1.19	12.0
Äthanol	1.1	11.4
Glycerin	0.5	2.2

- Dichte nur wenig von Temperatur und fast gar nicht vom Druck abhängig
- Strömungen von Flüssigkeiten praktisch immer inkompressibel gerechnet ($\rho = \text{const.}$)
- Dichteänderung bei Gasen:
 - bei idealem Gas

- $$pV = mR_iT$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p}{R_iT}$$

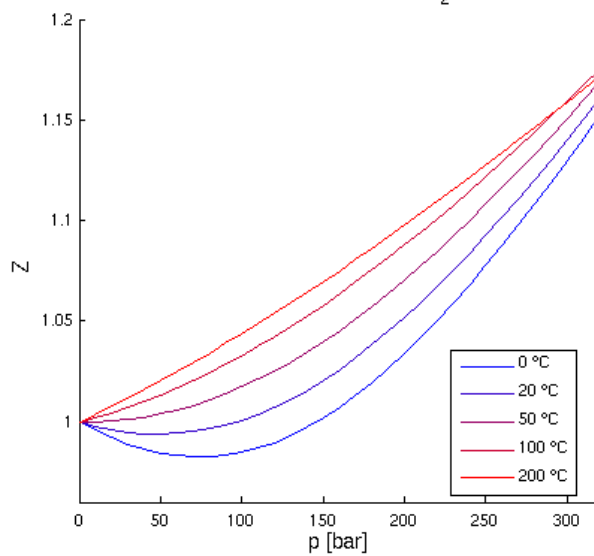
- Realgasfaktor Z = Korrektur bei realen Gasen

- $$pV = ZmR_iT$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p}{ZR_iT}$$

- Werte von Z für Stickstoff

Realgasfaktoren von N_2



- Dichte ρ_f von feuchter Luft:

- Massen von (trockener) Luft und vom Wasserdampf berücksichtigen

- $$\rho_f = \frac{m_f}{V} = \frac{m_L}{V} + \frac{m_W}{V}$$

- Gasgleichung

- $$pV = mR_iT = m \frac{R}{M} T$$

$$\Rightarrow m = \frac{pVM}{RT}$$

- damit

- $$\rho_f = \frac{1}{RT} (p_L M_L + p_W M_W)$$

- Partialdruck p_d : maximale Wasserdampfmenge

- bei relativer Luftfeuchtigkeit ϕ also

- $$p_W = \phi p_d$$

- Gesamtdruck

- $$p = p_L + \phi p_d$$

- damit wird ρ_f

$$\begin{aligned}\rho_f &= \frac{1}{RT} ((p - \varphi p_d)M_L + \varphi p_d M_W) \\ &= \frac{pM_L}{RT} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi \frac{p_d}{p} \right)\end{aligned}$$

-
- Dichte der trockenen Luft (bei gleichem Gesamtdruck p) ist

- $\rho_{tr} = \frac{pM_L}{RT}$

- insgesamt also

$$\begin{aligned}\rho_f &= \rho_{tr} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi \frac{p_d}{p} \right) \\ &\approx \rho_{tr} \left(1 - 0.377 \varphi \frac{p_d}{p} \right)\end{aligned}$$

-

Schallgeschwindigkeit

- Schall:
 - schnelle Druckänderung
 - in guter Näherung adiabatisch
 - Schallgeschwindigkeit a gegeben durch

- $$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$$

- Schallgeschwindigkeit in Flüssigkeiten:
 - isentrope Temperaturänderung dT sehr klein \rightarrow

- $$\frac{d\rho}{\rho} \approx \kappa dp$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \frac{1}{\kappa\rho}$$

- mit Kompressionsmodul $E = 1/\kappa$ also

- $$a = \sqrt{\frac{1}{\kappa\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Schallgeschwindigkeit in Gasen:
 - Adiabaten Gleichung für ideales Gas

- $$pv^\kappa = \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.}$$

- (κ = Adiabatenkoeffizient, **nicht** Kompressibilität!)

- damit

- $$\frac{dp}{d\rho} = \text{const.} \cdot \kappa\rho^{\kappa-1} = \kappa\frac{p}{\rho}$$

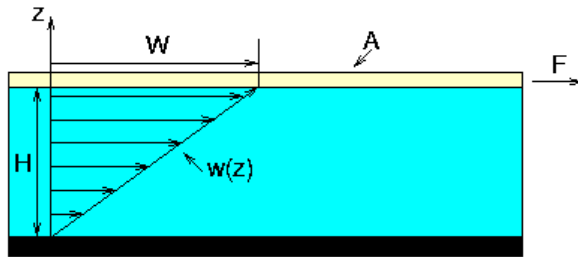
- ideale Gasgleichung ergibt

- $$a = \sqrt{\kappa\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R_i T}$$

- Aufgaben:
 - Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Aufgabe 3

Viskosität

- Couette-Strömung:
 - grundlegende Versuchsanordnung



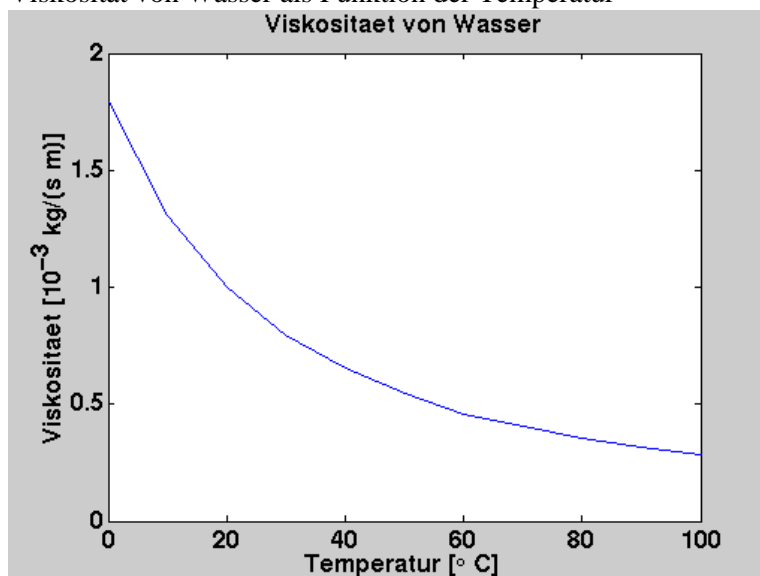
- lineares Geschwindigkeitsprofil
- Kraft F zur Bewegung der Platte erfüllt (für viele Fluide)
 - $F \sim A W/H$
- Proportionalitätskonstante η (dynamische Viskosität)
- bei beliebigen Strömungen Geschwindigkeitsänderung quer zur Strömung
 - $\frac{W}{H} \rightarrow \frac{dw}{dz}$
- mit Schubspannung $\tau = F/A$ dann
 - $\tau = \eta \frac{dw}{dz}$
- Bedeutung der Viskosität:
 - Maß für die "innere" Reibung (zwischen "Schichten" verschiedener Geschwindigkeit)
 - abhängig vom Fluid (Stoffeigenschaft)
 - für viele Fluide unabhängig vom Geschwindigkeitsgradienten dw/dz (Newtonsche Fluide)
 - gilt für alle Gase
 - sehr gut erfüllt für viele Flüssigkeiten (u.a. Wasser)
 - kinematische Viskosität
 - $\nu = \eta/\rho$
- Physikalische Deutung:
 - ungeordnete Wärmebewegung der Fluidteilchen
 - Teilchen diffundieren auch quer zur Bewegungsrichtung
 - Impulstransport quer zur Strömung
 - Teilchen geraten in "Schichten" anderer Strömungsgeschwindigkeit
 - langsamere Eindringlinge bremsen die Schicht
 - schnellere schieben an
 - außerdem Anziehungskräfte zwischen benachbarten Teilchen verschiedener Geschwindigkeit
 - Gesamteffekt: Schubkräfte zwischen Schichten
- Eigenschaften der Viskosität:
 - nahezu druckunabhängig (außer bei sehr hohen Drücken)
 - Temperaturabhängigkeit bei Gasen
 - Wärmebewegung nimmt mit Temperatur zu

- → höhere Durchmischung der Schichten
- → Viskosität steigt
- Temperaturabhängigkeit bei Flüssigkeiten
 - Wärmebewegung nimmt mit Temperatur zu
 - → Einfluss der Anziehungskräfte zwischen Teilchen nimmt ab
 - → Viskosität sinkt
- Typische Werte der Viskosität:
 - Richtwerte bei 20 °C

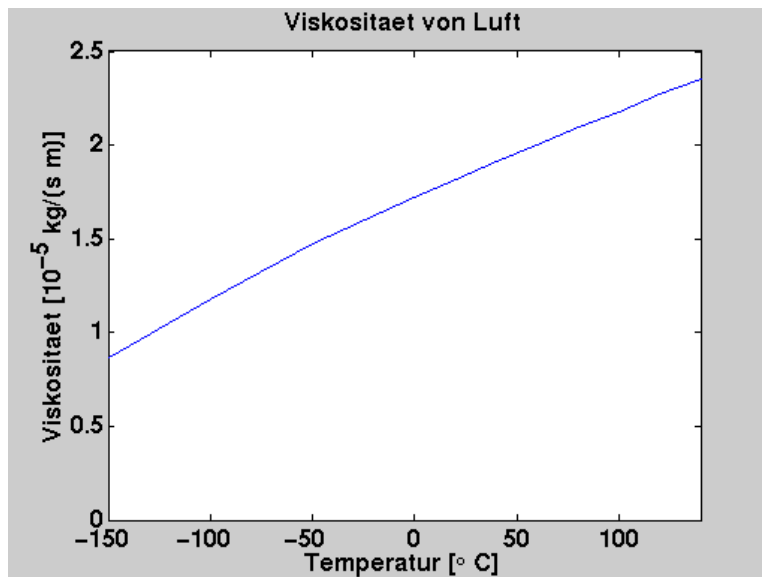
Wasser $1.00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$

Luft $1.82 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(s m)}$

- Viskosität von Wasser als Funktion der Temperatur



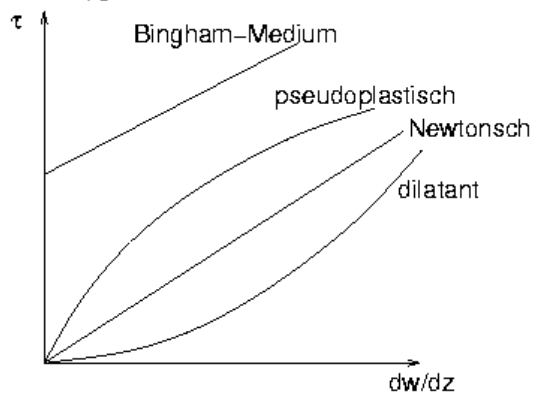
- Viskosität von Luft als Funktion der Temperatur



- Nicht-Newtonsche Fluide:
 - Schubspannung τ nicht proportional zu dw/dz
 - völlig unterschiedliche Klassen von Materialien
 - Ursachen:
 - komplizierte Kräfte zwischen Teilchen
 - Richtungsabhängigkeiten, Ausrichtung der Teilchen
 - inhomogene Fluide (z.B. Suspensionen)

- Einige Beispiele:

- Grundtypen

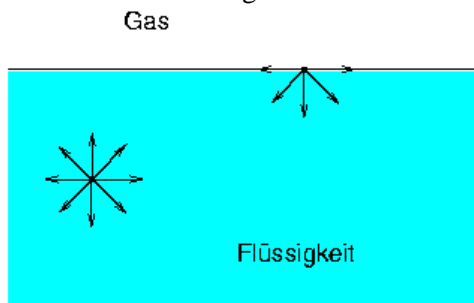


- pseudoplastische Fluide
 - Viskosität nimmt mit dw/dz ab
 - Schmelzen, hochpolymere Öle
- dilatante Fluide
 - Viskosität nimmt mit dw/dz zu
 - Suspensionen
- Bingham-Medien
 - Viskosität ist $\neq 0$ bei $dw/dz = 0$

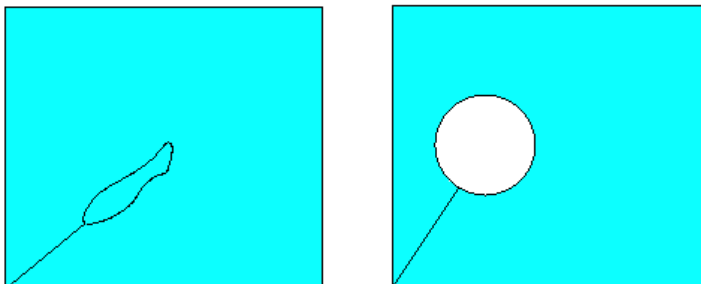
- verhalten sich teilweise wie feste Körper (plastisch)
- Zahnpasta, Mörtel
- thixotrope Substanzen
 - Viskosität nimmt bei konstanter Scherung zeitlich ab
 - Joghurt
- Aufgaben:
 - Aufgabe 4
 - Aufgabe 5

Grenzflächen

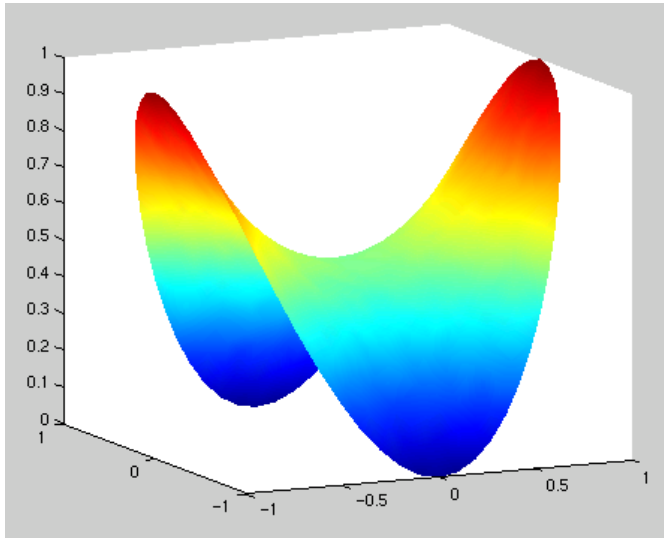
- Ursache der Oberflächenspannung:
 - Anziehungskräfte (van-der-Waals-Kräfte) zwischen Teilchen im Fluid (Kohäsion)
 - bei Flüssigkeiten größer, da Abstände kleiner
 - im Innern von allen Seiten → Gesamtkraft 0
 - an Oberfläche Flüssigkeit - Gas Nettokraft ins Innere der Flüssigkeit



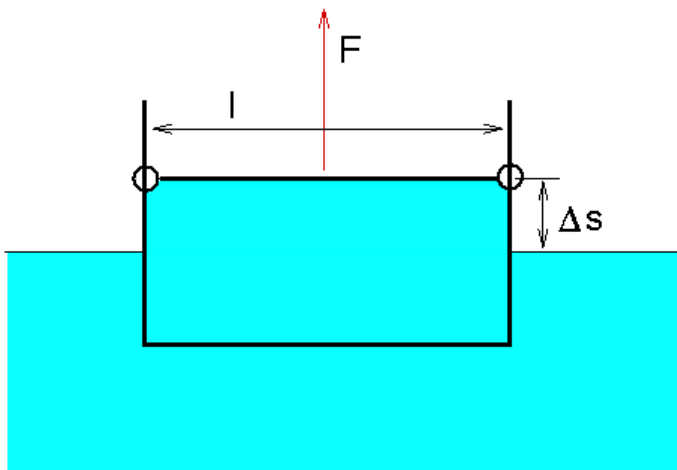
- Vergrößerung der Oberfläche benötigt Arbeit
- Oberflächenspannung = Arbeit/Oberflächenänderung
 - $\sigma = dW/dA$
- Minimalflächen:
 - Energie minimal bei möglichst kleiner Oberfläche
 - Minimalfläche = Fläche mit geringster Oberfläche bei gegebenem Rand
 - kein Rand → Kugel (Tropfen)
 - ebener Rand → ebene Fläche
 - gut zu beobachten bei Seifenhaut
 - Loch in Oberfläche maximal für gegebenen Umfang → kreisförmig



- komplizierte Formen bei nicht-ebenem Rand



- Messung der Oberflächenspannung:
 - Versuchsaufbau



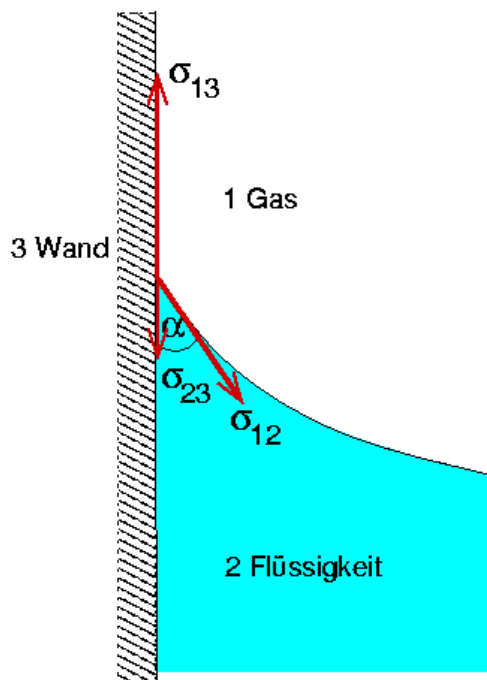
- Haut maximal ausdehnen
 - → Strecke Δs
 - benötigte Kraft F
- aus Definition von σ
 - $\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2l \Delta s} = \frac{F}{2l}$
- Faktor 2 wegen Vorder- und Rückseite
- einige Werte (gegen Luft, bei 20 °C)

Flüssigkeit	σ [N/m]
Wasser	0.073
Alkohol	0.023 - 0.025
Speiseöl	0.025 - 0.030
Quecksilber	0.47 - 0.49

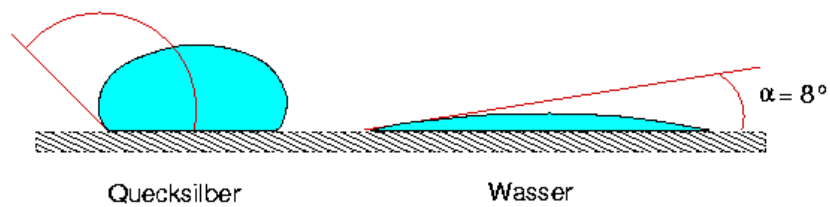
- Grenzflächendruck p_i :
 - Kräfte bei Tropfen
 - Oberflächenspannung \rightarrow Kraft nach innen
 - ausgeglichen durch erhöhten Innendruck p_i
 - Berechnung von p_i
 - betrachte Vergrößerung des Radius $r \rightarrow r + dr$
 - Arbeit dW_p durch Druck
 - $dW_p = F dr = p A dr = p 4 \pi r^2 dr$
 - Arbeit dW_σ durch Oberflächenspannung

$$\begin{aligned}
dW_\sigma &= \sigma dA \\
&= \sigma (4 \pi (r + dr)^2 - 4 \pi r^2) \\
&= \sigma 8 \pi r dr && \text{(wegen } dr \ll r)
\end{aligned}$$

- Gleichgewicht $dW_p = dW_\sigma \rightarrow$
 - $p = 2 \sigma / r$
- bei Seifenblasen weiterer Faktor 2 (Innen- und Außenseite)
- Druck höher bei kleinerem Radius
 - \rightarrow kleine Seifenblase bläst große auf
- Flüssigkeit an fester Wand:
 - Kräfte zwischen Flüssigkeits- und Wandmolekülen (Adhäsion)
 - drei Arten von Grenzflächen und Oberflächenspannungen
 - Gas - Wand: σ_{13}
 - Flüssigkeit - Wand: σ_{23}
 - Flüssigkeit - Gas: σ_{12}
 - Kräftegleichgewicht



- $\sigma_{13} - \sigma_{23} = \sigma_{12} \cos \alpha$
- Beispiele (jeweils mit Glas und Luft)
 - Kohäsion > Adhäsion
 - $\rightarrow \sigma_{13} < \sigma_{23}$
 - $\rightarrow \alpha > 90^\circ$ (Quecksilber)
 - keine Benetzung
 - Kohäsion < Adhäsion
 - $\rightarrow \sigma_{13} > \sigma_{23}$
 - $\rightarrow \alpha < 90^\circ$ (Wasser)
 - Benetzung
 - Adhäsion >> Kohäsion
 - $\rightarrow \sigma_{13} - \sigma_{23} > \sigma_{12}$
 - $\rightarrow \alpha = 0^\circ$ (Petroleum)
 - kein Gleichgewicht, Ausbreitung
 $\alpha = 137^\circ$

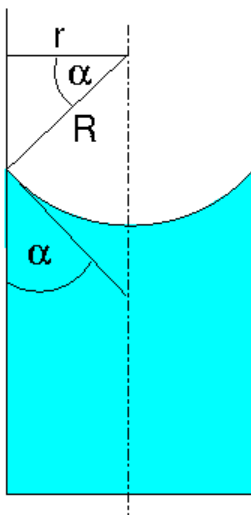


- einige Werte für Oberflächenspannungen

Flüssigkeit	Festkörper	σ [N/m]
Wasser	Glas	≤ 0.073
Wasser	Graphit	0.005
Wasser	Kupfer	≥ 0.073
Quecksilber	Glas	0.35
Quecksilber	Stahl	0.43
Glycerin	Glas	≥ 67
Luft	Glas	0.1 - 0.9

- Kapillarität:

- Flüssigkeit steigt hoch in engen Röhren (bzw. sinkt bei $\alpha > 90^\circ$)



- Steighöhe h aus Gleichgewicht von Grenzflächendruck und Gewichtskraft
- Gewichtskraft F_G

$$F_G = \rho V g$$

$$= \rho h \pi r^2 g$$

- genauer mit Auftrieb
 - $\rho \rightarrow \rho_{fl} - \rho_{Luft}$
- Grenzflächendruck p
 - $p = 2\sigma/R = 2\sigma \cos \alpha / r$
- Druckkraft F_p

$$\begin{aligned} F_p &= p \pi r^2 \\ &= 2 \sigma \pi r \cos \alpha \end{aligned}$$

○ Gleichgewicht $F_p = F_G \rightarrow$

$$\bullet \quad h = \frac{2\sigma \cos \alpha}{\rho g r}$$

● Aufgaben:

- Aufgabe 6
- Aufgabe 7

Hydrostatik

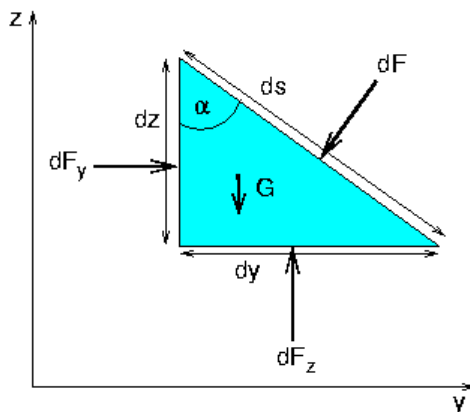
- Hydrostatischer Druck
- Freie Oberfläche
- Druckkraft auf eine ebene Wand
- Druckkraft auf eine gekrümmte Wand
- Auftrieb und Schwimmen

Hydrostatischer Druck

- Druck p im ruhenden Fluid:
 - senkrecht auf eine Fläche A wirkende Kraft F_n
 - i.a. ortsabhängig, also für sehr kleine Fläche definieren

- $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$

- SI-Einheit Pascal
 - $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
- abgeleitete Einheit
 - $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ bar} \approx$ Luftdruck auf Meereshöhe
- Richtungsunabhängigkeit des Drucks:
 - Kräftegleichgewicht im ruhenden Fluid
 - betrachten kleines Prisma, Dicke dx



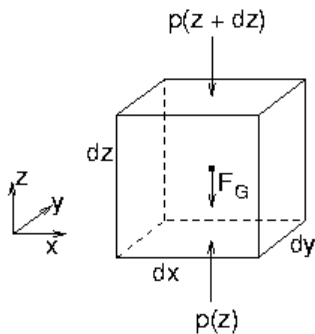
- Kräftegleichgewicht in y -Richtung

- $$\begin{aligned} dF_y &= dF \cos \alpha \\ \Rightarrow \frac{dF_y}{dA_y} &= \frac{dF \cos \alpha}{dz dx} = \frac{dF}{ds dx} = \frac{dF}{dA} \end{aligned}$$

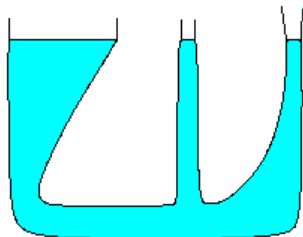
- Kräftegleichgewicht in z -Richtung

- $$\begin{aligned} dF_z &= dF \sin \alpha + F_G = dF \sin \alpha + \frac{1}{2} \rho g dx dy dz \\ \Rightarrow \frac{dF_z}{dA_z} &= \frac{dF \sin \alpha}{dx dy} + \frac{1}{2} \rho g dz \\ &= \frac{dF}{dx ds} + \frac{1}{2} \rho g dz \\ &\xrightarrow{dz \rightarrow 0} \frac{dF}{dA} \end{aligned}$$

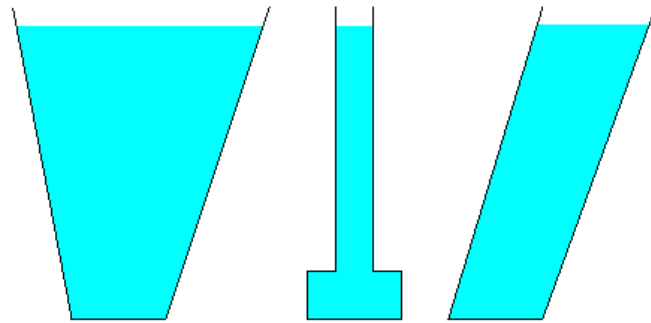
- Druck ist unabhängig von der Orientierung für alle Schnittflächen gleich
- Druck im Schwerfeld:
 - Kräftegleichgewicht bei Schwerkraft



- Kräfte in horizontaler Richtung heben sich auf
- Gewichtskraft
 - $F_G = - m g = -\rho \, dx \, dy \, dz \, g$
- Gleichgewicht in z-Richtung
 - $- p(z + dz) \, dx \, dy + F_G + p(z) \, dx \, dy = 0$
- Änderung des Drucks in erster Ordnung (Tangente)
 - $p(z + dz) \approx p(z) + dz \frac{dp}{dz}$
- Einsetzen liefert
 - $dp = -\rho \, dz \, g$
- bei Flüssigkeit (konstante Dichte) daher
 - $p(z) = - \rho \, g \, z + C$
- Randbedingung: Atmosphärendruck p_0 an der Oberfläche \Rightarrow
 - $p(z) = p_0 - \rho \, g \, z$
- Druck ist gleich in Punkten gleicher Tiefe
- Konsequenzen:
 - Kommunizierende Röhren
 - verbundene Röhren mit homogenem Fluid gefüllt
 - \rightarrow Oberflächen auf gleicher Höhe

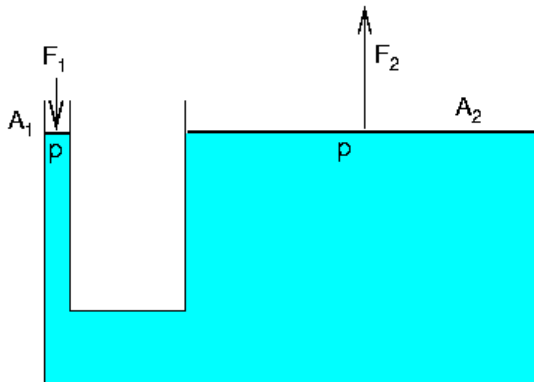


- Hydrostatisches Paradoxon
 - Druckkraft am Boden unabhängig von der Gefäßform



- Anwendungen:

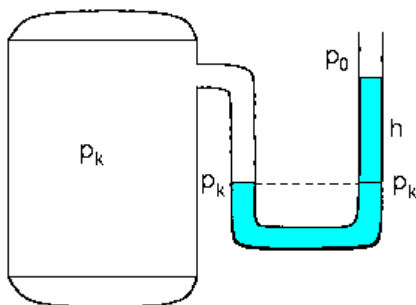
- Hydraulische Presse



- kleine Kraft F_1 bei kleiner Fläche A_1
- Druck bei A_1 und A_2 gleich groß
- → große Kraft F_2

- $F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$

- U-Rohr-Manometer



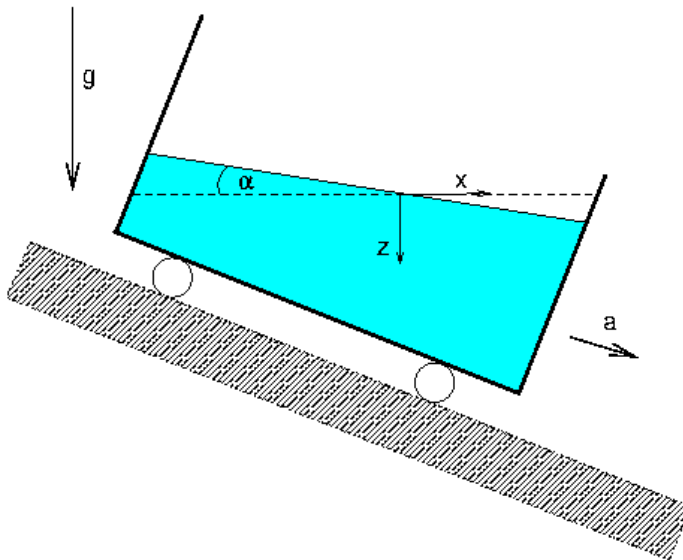
- Kesseldruck p_K bei gleicher Höhe im rechten Schenkel →
- $p_K = \rho g h + p_0$

- Aufgaben:

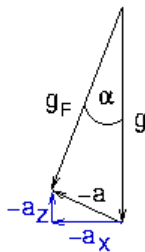
- Aufgabe 8

Freie Oberfläche

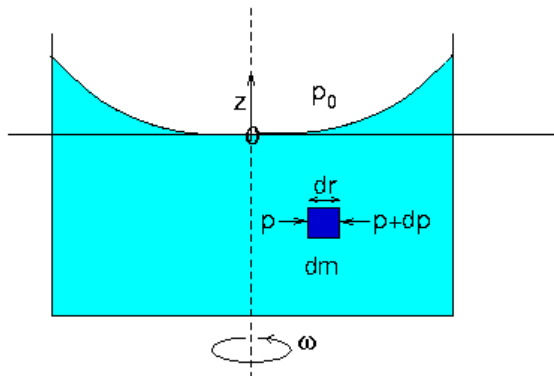
- Fluid bei konstanter Beschleunigung:
 - Gefäß mit Fluid unter konstanter Beschleunigung a



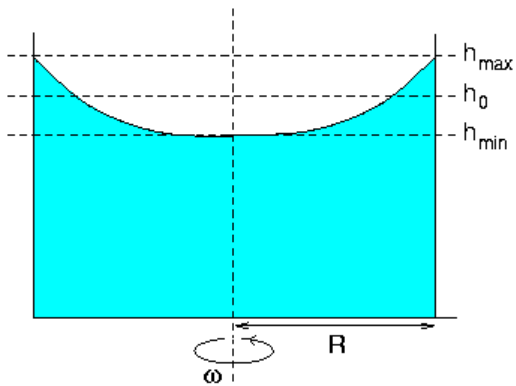
- Gesamtkraft = Schwerkraft + Trägheitskraft



- Winkel α = Abweichung der Gesamtkraft von der Senkrechten
 - $\tan \alpha = \frac{a_x}{g - a_z}$
- Oberfläche um α geneigt
- Druckverteilung wie im ruhenden Fluid, aber
 - Tiefe senkrecht zur Oberfläche gemessen
 - mit effektiver Schwerebeschleunigung g_F
- Fluid bei gleichförmiger Rotation:
 - Gefäß mit Fluid bei Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω



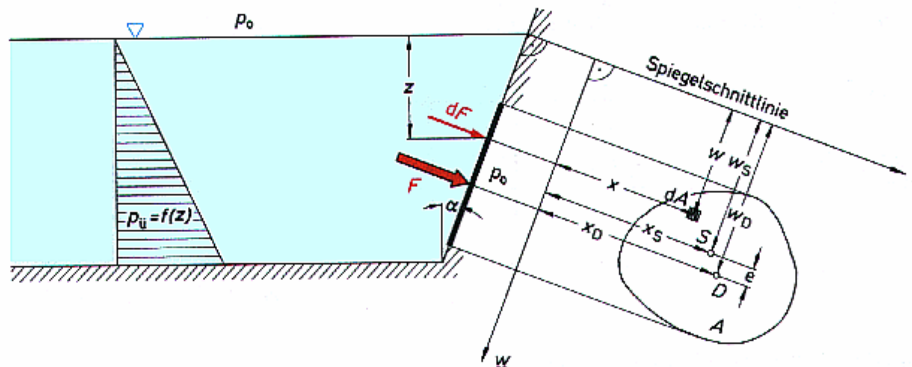
- betrachten Fluidelement $dm = \rho \, dA \, dr$ im Abstand r
- Zentrifugalkraft auf dm
 - $dZ = dm \, \omega^2 \, r = \rho \, dA \, \omega^2 \, r \, dr$
- Druckkraft auf dm
 - $dF = (p + dp) \, dA - p \, dA = dp \, dA$
- Gleichgewicht \rightarrow
 - $\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 r$
- Integration längs $r \rightarrow$
 - $p(z, r) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 + C(z)$
- auf der Achse hydrostatischer Druck
 - $p(z, r = 0) = p_0 - \rho g z$
- insgesamt
 - $p(z, r) = p_0 + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z$
- Form der Oberfläche $z_0(r)$:
 - Oberfläche gegeben durch
 - $p(z_0, r) = p_0$
 - $\Rightarrow z_0(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$
 - Rotations-Paraboloid



- Zusammenhang zwischen Ruheshöhe h_0 , h_{\min} und h_{\max} aus Vergleich der Volumina
 - $V_{\text{zylinder}}(h_0 - h_{\min}, R) = V_{\text{zylinder}}(h_{\max} - h_{\min}, R) - V_{\text{paraboloid}}(h_{\max} - h_{\min}, R)$
- durch Integration oder aus Tabelle
 - $V_{\text{zylinder}}(h, R) = \pi R^2 h$
 - $V_{\text{paraboloid}}(h, R) = \pi R^2 h/2$
- damit
 - $h_0 = (h_{\max} + h_{\min})/2$
- Aufgaben:
 - Aufgabe 9

Druckkraft auf eine ebene Wand

- Geneigte Behälterwand:
 - Behälter, gefüllt mit Flüssigkeit, Dichte ρ
 - Wand geneigt um Winkel α
 - betrachten beliebige Teilfläche A der Behälterwand



- x-Achse: Schnitt von Seitenwand und Oberfläche
- Koordinaten x und w auf Fläche A
- Zusammenhang zwischen w und Tiefe z
 - $z = w \cos \alpha$
- Flächenschwerpunkt $S = (x_S, w_S)$
- $F =$ auf A wirkende Druckkraft
- Angriffspunkt der Kraft $D = (x_D, w_D)$
- Bestimmung der Druckkraft:
 - betrachten kleine Fläche dA bei $P = (x, w)$
 - Druck am Punkt P
 - $p = p_0 + \rho g w \cos \alpha$
 - Kraft auf dA
 - $dF = (p - p_0) dA = \rho g w \cos \alpha dA$
 - Gesamtkraft auf A durch Integration
 - $F = \rho g \cos \alpha \iint_A w dA$
 - Flächenschwerpunkt S erfüllt
 - $w_S A = \iint_A w dA$
 - damit
 - $F = \rho g w_S \cos \alpha A$
 - oder mit Tiefe des Schwerpunkts $h_S = w_S \cos \alpha$
 - $F = \rho g h_S A = (p_S - p_0) A$
 - Druckkraft auf A gegeben durch Druck am Schwerpunkt
- Berechnung des Angriffspunkts:
 - Angriffspunkt D gegeben durch Momentengleichgewicht

- konkret um x-Achse

- $w_D F = \iint_A w dF$

- Einsetzen von F und dF →

$$w_D w_S A = \iint_A w^2 dA =: I_W$$

- $\Rightarrow w_D = \frac{I_W}{w_S A}$

- I_W = Flächenträgheitsmoment
- Zusammenhang zum Trägheitsmoment I_S bzgl. Schwerpunkt (Satz von Steiner)
 - $I_W = I_S + w_S^2 A$
- (senkrechter) Abstand e von Angriffspunkt D zum Schwerpunkt S

$$e := \frac{w_D - w_S}{\frac{I_W - w_S^2 A}{w_S A}}$$

- $= \frac{I_S}{w_S A}$

- Momentengleichgewicht um w-Achse liefert analog

- $x_D = \frac{I_{wx}}{w_S A}$

- mit Zentrifugalmoment

- $I_{wx} = \iint_A wx dA$

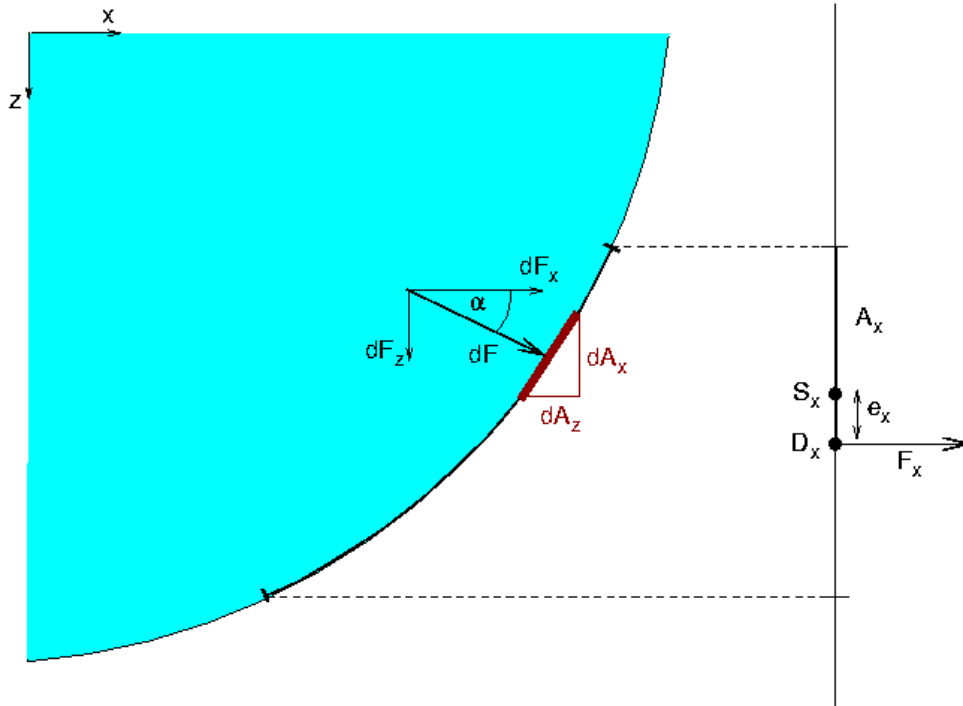
- Werte für I_S

Rechteck, Breite b, Höhe h	$b h^3 / 12$
Kreis, Durchmesser d	$\pi d^4 / 64$

- $I_{wx} = 0$ bei symmetrischem A
- Aufgaben:
 - Aufgabe 10
 - Aufgabe 11

Druckkraft auf eine gekrümmte Wand

- Behälter mit gekrümmter Wand:
 - zunächst nur zylindrisch (ebenes Problem)
 - Aufteilung der Gesamtkraft in Horizontalkomponente F_x und Vertikalkomponente F_z



- Berechnung von F_x :
 - horizontaler Anteil auf Flächenelement dA

$$\begin{aligned} dF_x &= dF \cos \alpha \\ &= (p - p_0) dA \cos \alpha \end{aligned}$$

- mit Projektion dA_x von dA senkrecht zur x -Achse \rightarrow

$$\begin{aligned} dF_x &= (p - p_0) dA_x \\ &= \rho g z dA_x \end{aligned}$$

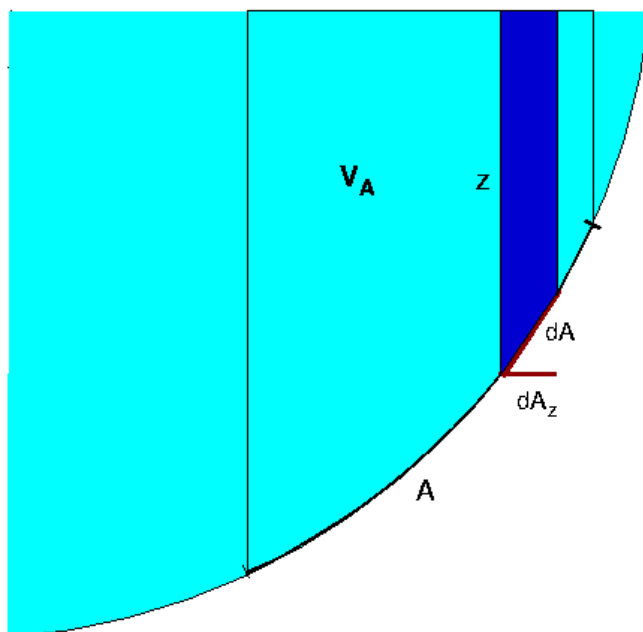
- gesamte Kraft durch Integration

$$\begin{aligned} F_x &= \rho g \iint_{A_x} z dA_x \\ &= \rho g z_S A_x \\ \bullet &= (p(z_S) - p_0) A_x \end{aligned}$$

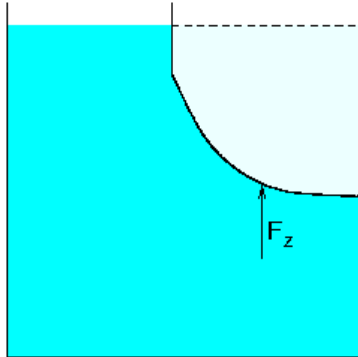
- mit Tiefe z_S des Schwerpunkts der projizierten Fläche A_x
 - Abstand e_x der Wirkungslinie zum Schwerpunkt (in Projektion) wie oben
 - $e_x = \frac{I_S}{z_S A_x}$
- Berechnung von F_z :
 - vertikaler Anteil auf Flächenelement dA

$$dF_z = dF \sin \alpha$$

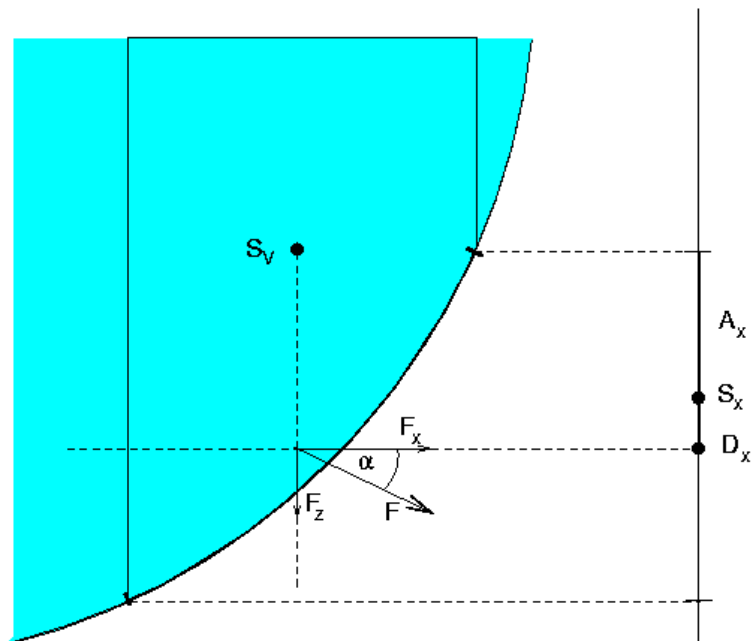
$$= \rho g z dA \sin \alpha$$
 - $= \rho g z dA_z$
 - Integration liefert
 - $F_z = \rho g \iint_{A_x} z dA_z$
 - $z dA_z =$ Volumen der Flüssigkeitssäule über dA



- mit dem gesamten Flüssigkeitsvolumen V_A oberhalb von A daher
 - $F_z = \rho g V_A$
 - Wirkungslinie von $F_z =$ Vertikale vom Schwerpunkt von V_A aus
- Physikalische Bedeutung:
 - $F_z =$ Gewichtskraft der Säule oberhalb von A
 - bei Flüssigkeit von unten



- F_z ist negativ (nach oben gerichtet)
 - gegeben durch Gewicht der fehlenden Flüssigkeit
- Erklärung für Hydrodynamisches Paradoxon
- Gesamtkraft F :
 - gegeben als Vektorsumme von F_x und F_z



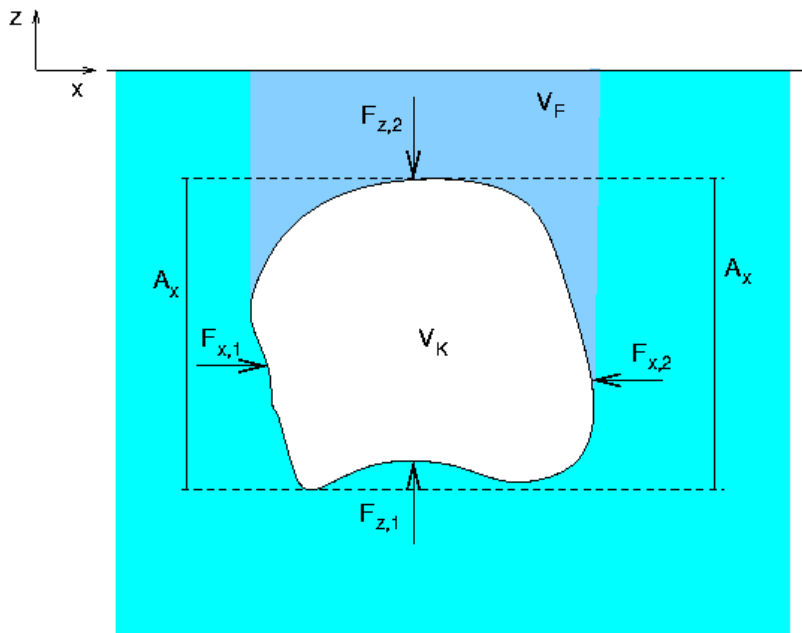
- Betrag
 - $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$
- Winkel α_F zur Horizontalen
 - $\tan \alpha_F = \frac{F_z}{F_x}$
- Wirkungslinie
 - in Richtung von F
 - durch Schnittpunkt der Wirkungslinien der Komponenten
- bei nicht-zylindrischer Wand

- zusätzliche dritte Kraftkomponente F_y analog F_x
- Aufgaben:
 - Aufgabe 12

Auftrieb und Schwimmen

- Statischer Auftrieb:

- Körper mit Volumen V_K sei vollständig untergetaucht



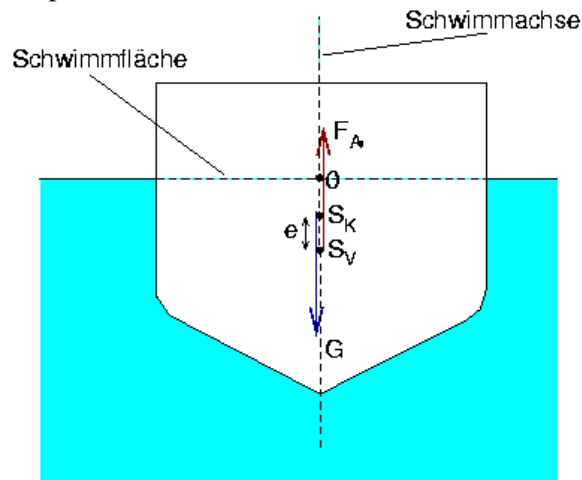
- horizontale Druckkraft F_x
 - Körper senkrecht geteilt denken
 - Druckkräfte von links und von rechts
 - projizierte Fläche A_x für beide Kräfte gleich
 - heben sich auf $\rightarrow F_x = 0$
- vertikale Druckkraft F_A (Auftrieb)
 - Körper horizontal geteilt denken
 - Druckkräfte $F_{z,1}$ von unten und $F_{z,2}$ von oben
 - Gesamtkraft

$$\begin{aligned}
 F_A &= F_{z,1} + F_{z,2} \\
 &= \rho g (V_K + V_F) - \rho g V_F \\
 &= \rho g V_K
 \end{aligned}$$

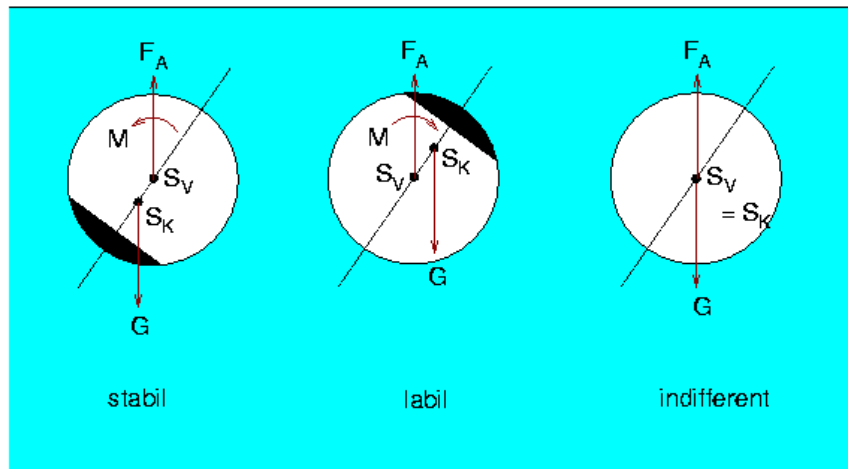
- Auftrieb eines untergetauchten Körpers = - Gewichtskraft des verdrängten Fluid-Volumens (Gesetz von Archimedes)
- Auftrieb in Gasen häufig vernachlässigbar
- zusätzliche Auftriebskräfte in inhomogenen Medien (z.B. bei Temperaturunterschieden) oder in Strömungen

- Schwimmen:

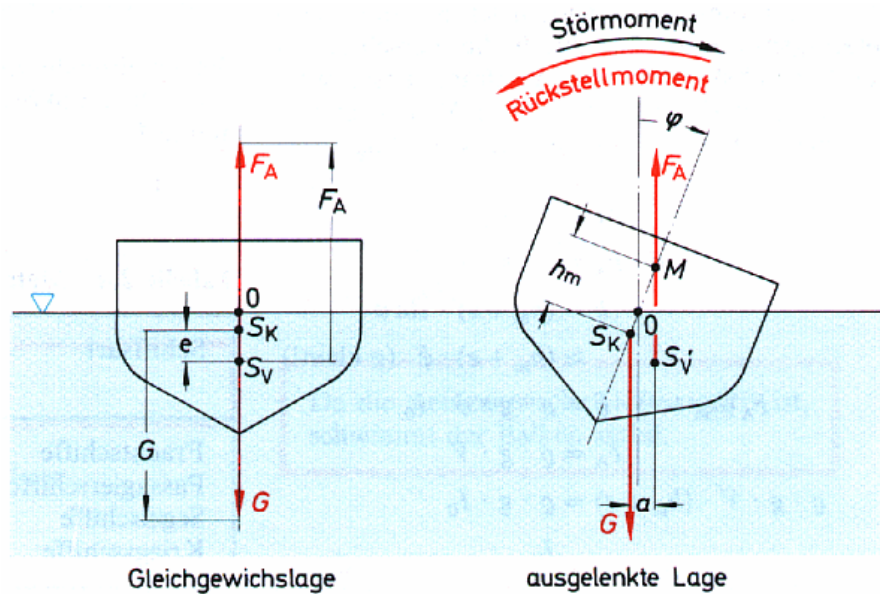
- mittlere Dichte eines Körpers kleiner als die des Fluids →
 - Auftrieb $F_A >$ Gewichtskraft G
 - Körper taucht nur teilweise ein



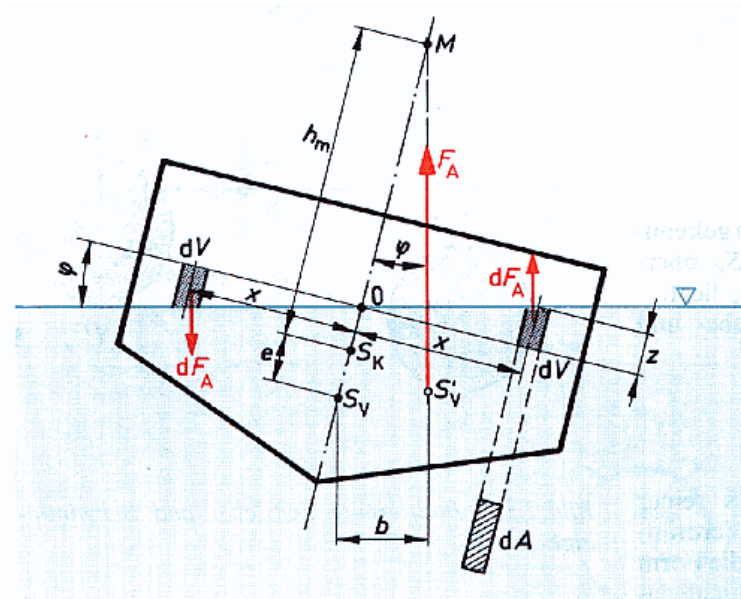
- Eintauchtiefe so groß, dass Gewicht des verdrängten Fluids = Gewicht des Körpers
- Schwimmfläche
 - Schnitt der Wasseroberfläche durch schwimmenden Körper
- Körperschwerpunkt S_K
 - Angriffspunkt der Gewichtskraft
- Verdrängungsschwerpunkt S_V
 - Schwerpunkt des verdrängten Fluids
 - Angriffspunkt des Auftriebs
- Schwimmachse
 - Verbindungslinie von S_K und S_V
 - im Gleichgewicht vertikal
- Stabilität eines untergetauchten Körpers:
 - Auslenkung aus Gleichgewichtslage →
 - S_K und S_V nicht übereinander
 - zusätzliches Moment



- stabile Schwimmelage
 - Moment dreht Körper in Gleichgewichtslage zurück
 - bei S_K unterhalb S_V
- instabile Schwimmelage
 - Moment verstärkt Auslenkung
 - bei S_K oberhalb S_V
- indifferente Schwimmelage
 - Moment verschwindet
 - bei $S_K = S_V$
 - z.B. bei homogenem Körper
- Stabilität eines schwimmenden Körpers:
 - Auslenkung aus Gleichgewichtslage →
 - Form des verdrängten Fluids ändert sich
 - S_V ändert sich zu S_V'



- Metazentrum M bei Auslenkung
 - Schnittpunkt der (ursprünglichen) Schwimmachse und der Vertikalen durch S_V'
- metazentrische Höhe h_m
 - Abstand von S_K und M
- stabile Schwimmelage, wenn
 - S_K unterhalb von S_V (Gewichtsstabilität)
 - oder h_m positiv (Formstabilität)
- Berechnung der metazentrischen Höhe:
 - betrachten Auslenkung um kleinen Winkel φ
 - bestimmen Rückstellmoment M durch Untersuchung der Änderungen gegenüber senkrechter Lage



- zunächst Änderung der Auftriebskräfte durch zusätzlich eingetauchte bzw. jetzt aufgetauchte Volumenelemente dV
- Auftriebskraft auf neu eingetauchtes Volumenelement dV

$$\begin{aligned}
 dF_A &= \rho g dV \\
 &= \rho g z dA \\
 &= \rho g x \tan \phi dA \\
 &\approx \rho g x \phi dA
 \end{aligned}$$

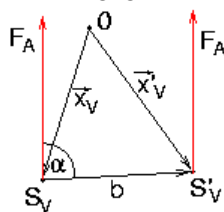
- zusätzliches Drehmoment bezüglich Symmetrieachse um 0
 - $dM = x dF_A = \rho g x^2 \phi dA$
- gesamtes Rückstellmoment

$$\begin{aligned}
 M &= \rho g \phi \iint_A x^2 dA \\
 &= \rho g \phi I_0
 \end{aligned}$$

- mit Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche

$$\bullet I_0 = \iint_A x^2 dA$$

- M auch gegeben durch Verschiebung der Auftriebskraft um b



○ vorher

- $\vec{M}_V = \vec{x}_V \times \vec{F}_A$

○ nachher

- $\vec{M}'_V = \vec{x}'_V \times \vec{F}_A$

○ Änderung also

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{M}'_V - \vec{M}_V \\ \bullet &= (\vec{x}'_V - \vec{x}_V) \times \vec{F}_A\end{aligned}$$

○ Betrag des Rückstellmoments

$$\begin{aligned}M &= |\vec{x}'_V - \vec{x}_V| F_A \sin(\alpha) \\ &= b F_A \sin(\alpha) \\ \bullet &\approx b F_A\end{aligned}$$

○ da Verschiebung des Verdrängungsschwerpunkts für kleine ϕ nahezu waagrecht

○ Damit:

$$\begin{aligned}M &= F_A b \\ &= \rho g V_v b \\ &= \rho g V_v (h_m + e) \sin \phi \\ &\approx \rho g V_v (h_m + e) \phi\end{aligned}$$

○ Gleichsetzen der Beziehungen für M liefert

- $h_m = \frac{I_0}{V_v} - e$

- $e =$ Abstand S_K und S_V in Ruhelage

● Aufgaben:

○ Aufgabe 13

Aerostatik

- Luft im Schwerfeld:
 - gesucht: Änderung des Drucks p mit der Höhe z
 - Grundbeziehung aus Kräftegleichgewicht wie oben
 - $dp = -\rho g dz$
 - ρ nicht konstant
 - von Druck und Temperatur abhängig
 - ideale Gasgleichung verknüpft p, ρ, T
 - $p = \rho R_i T$
 - eine weitere Beziehung nötig
 - i.a auch g nicht konstant
 - nimmt mit der Höhe ab
 - grundsätzlich leicht zu berücksichtigen
 - wird hier nicht weiter betrachtet
 - Integration liefert formal

$$dz = -\frac{dp}{\rho g}$$

$$\Rightarrow z = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{\rho(p, T)}$$

- mit Druck p_0 am Boden (bei $z = 0$)

- Isotherme Atmosphäre:
 - Ansatz: Temperatur $T = T_0 = \text{konstant}$
 - aus Gasgleichung daher

$$\rho = \frac{p}{R_i T_0}$$

-

- Integration liefert

$$z = -\frac{R_i T_0}{g} \int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p}$$

$$= -H_0 \ln \frac{p}{p_0}$$

-

- mit $H_0 := R_i T_0 / g$

- Auflösen nach p ergibt

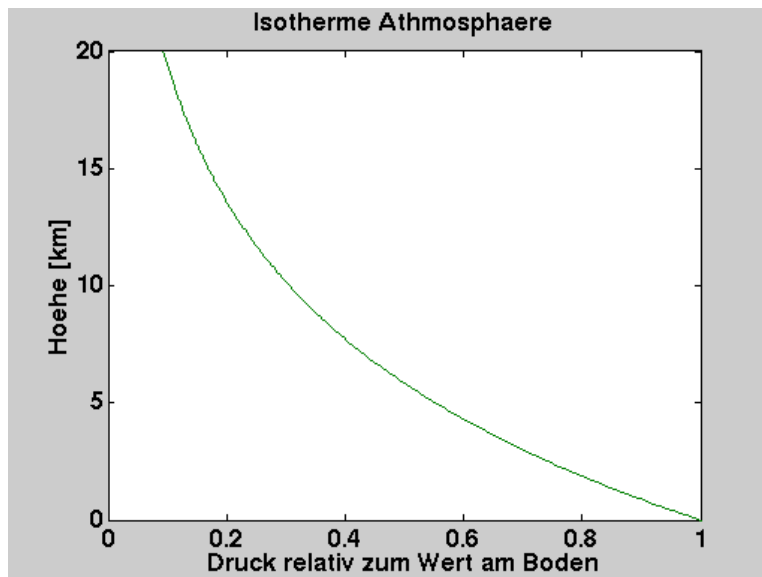
- $p = p_0 e^{-z/H_0}$ (barometrische Höhenformel)

- damit für die Dichte

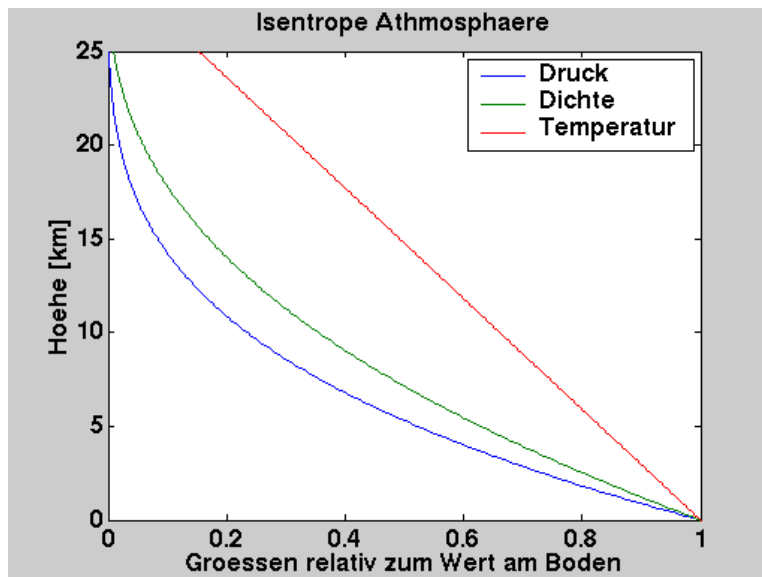
- $\rho = \rho_0 e^{-z/H_0}$

- mit $\rho_0 = p_0 / (R_i T_0)$

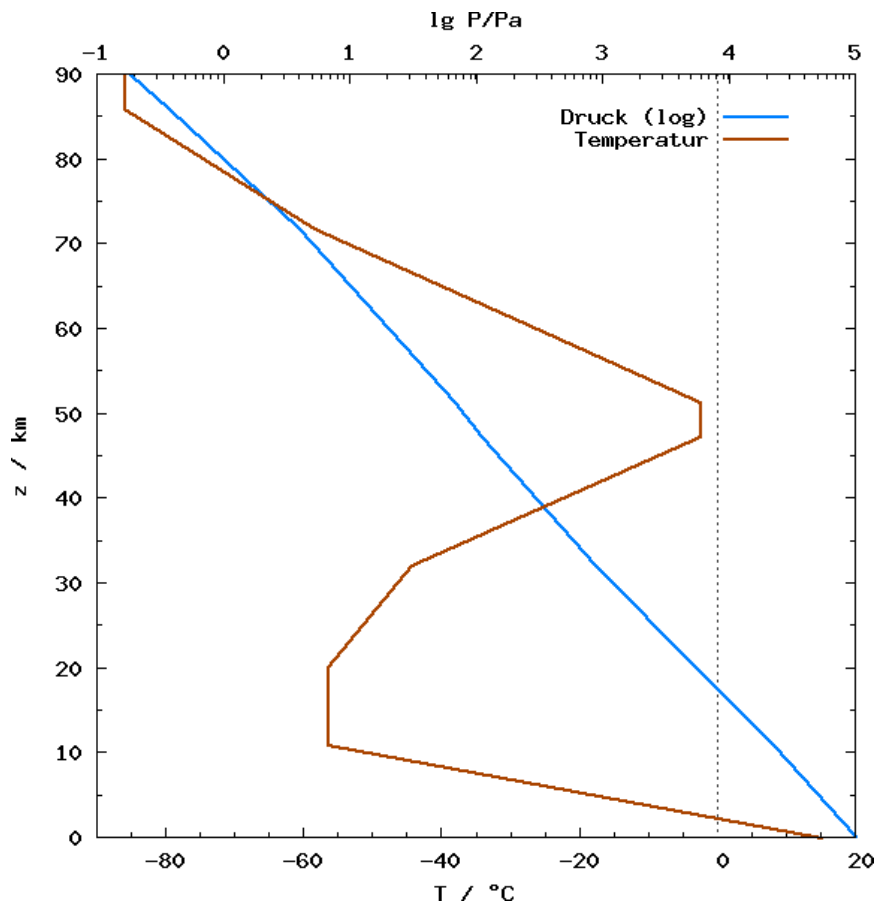
- graphisch



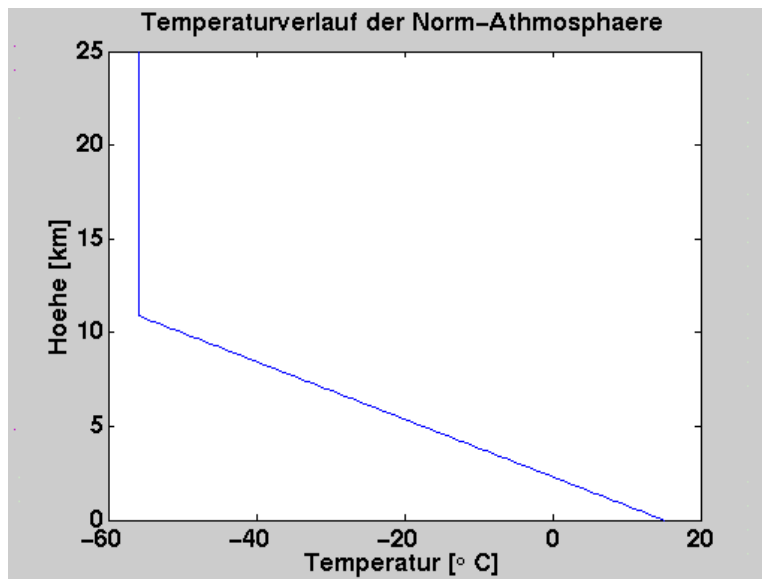
- Isentrope Athmosphäre:
 - Annahme: vertikaler Lufttransport ist adiabatisch
 - Zusammenhang zwischen p und ρ
 - $p/\rho^\kappa = \text{const.}$ (Adiabatengleichung)
 - Integration und Auflösen nach p liefert dann
 - $$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$
 - $$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{z}{H_0}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}$$
 - Temperatur folgt aus der Gasgleichung zu
 - $$\frac{T}{T_0} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{z}{H_0}$$
 - Temperatur nimmt linear mit der Höhe ab
 - Abnahme bei Standardbedingungen $p_0 = 1013 \text{ mbar}$, $T_0 = 15 \text{ °C}$
 - $dT/dz = - 10 \text{ K/km}$
 - graphisch



- Polytrope Athmosphäre:
 - statt Adiabate Polytrope mit Exponent n
 - Beziehungen wie bei Adiabate mit $\kappa \rightarrow n$
 - daher Zusammenhang zwischen Temperaturabnahme und n
 - $$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{R_i} \frac{n-1}{n}$$
- Erdathmosphäre:
 - komplizierte Schichtung aufgrund von
 - Sonneneinstrahlung
 - Erdtopographie und -bodenbeschaffenheit
 - chemischen Prozessen



- Troposphäre
 - bis ca. 11 km
 - näherungsweise polytrop mit $dT/dz = -6.5 \text{ K/km}$ ($n = 1.235$)
 - instabil (warme Luft unten)
 - Bereich des Wetters
- Stratosphäre
 - bis etwa 47 km
 - zunächst $T = \text{const.}$, dann Zunahme
 - chemische Prozesse durch UV-Licht der Sonne (Ozon-Schicht)
- Standard-Atmosphäre:
 - Basis für Berechnungen in Luft- und Raumfahrt
 - Werte am Boden
 - $p_0 = 1013.25 \text{ mbar}$
 - $T_0 = 15 \text{ °C}$
 - $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$
 - Temperaturverlauf



- bis 11 km polytrop mit $n = 1.235$
- darüber bis 25 km isotherm mit $T = -56.5\text{ °C}$
- Aufgaben:
 - Aufgabe 14

Kinematik - Fluide in Bewegung

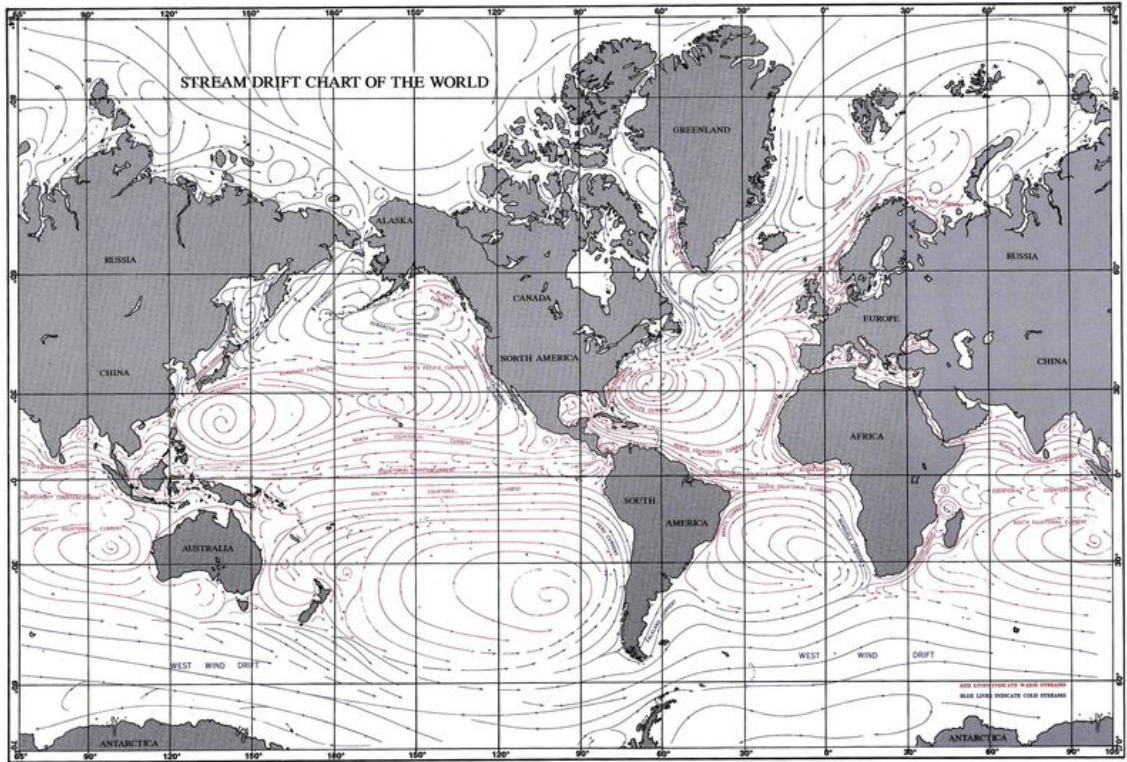
- Übersicht
- Beschreibung von Strömungen

Übersicht

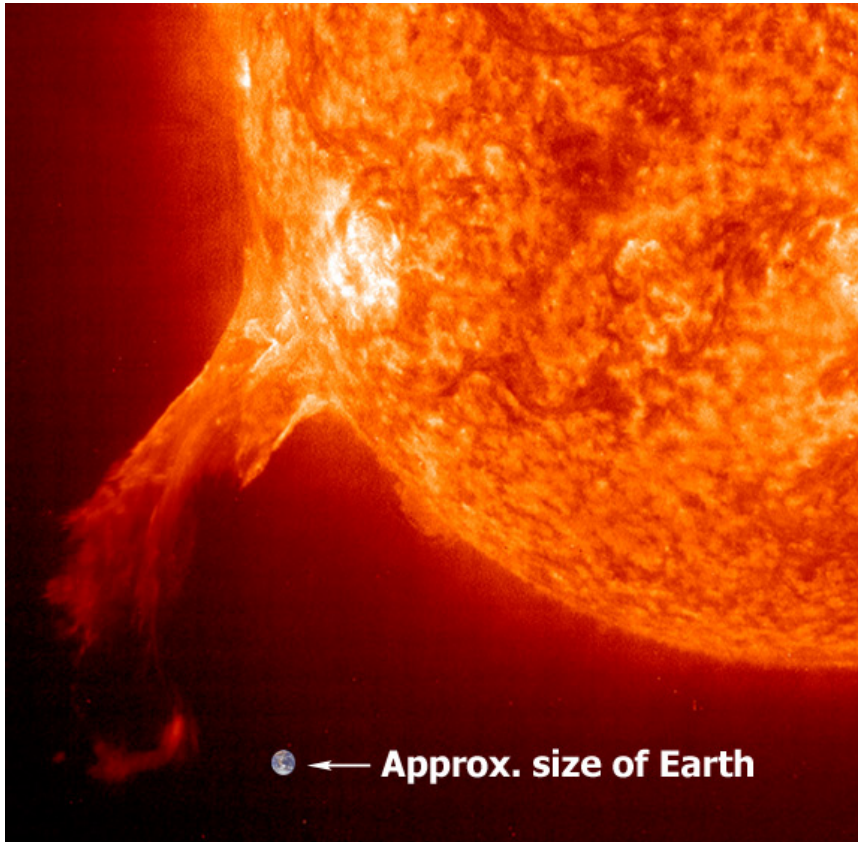
- Strömungen in Natur und Technik:
 - Luftströmungen in der Athmosphäre



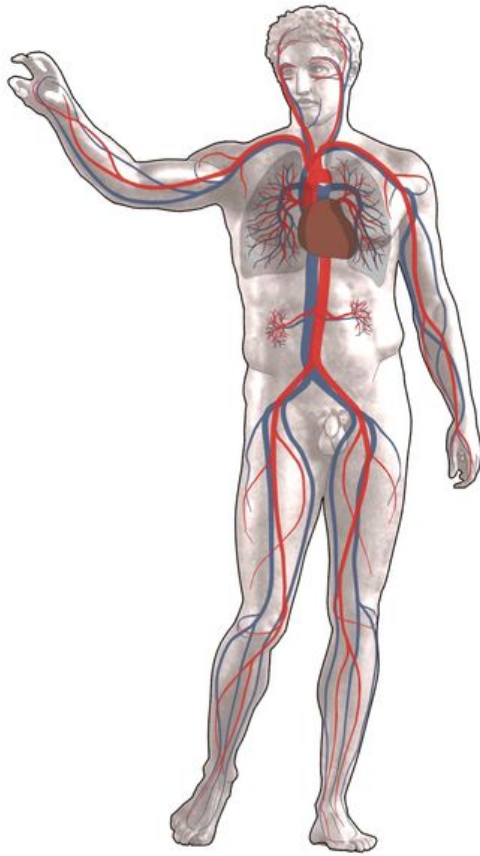
- Wasserströmungen im Ozean



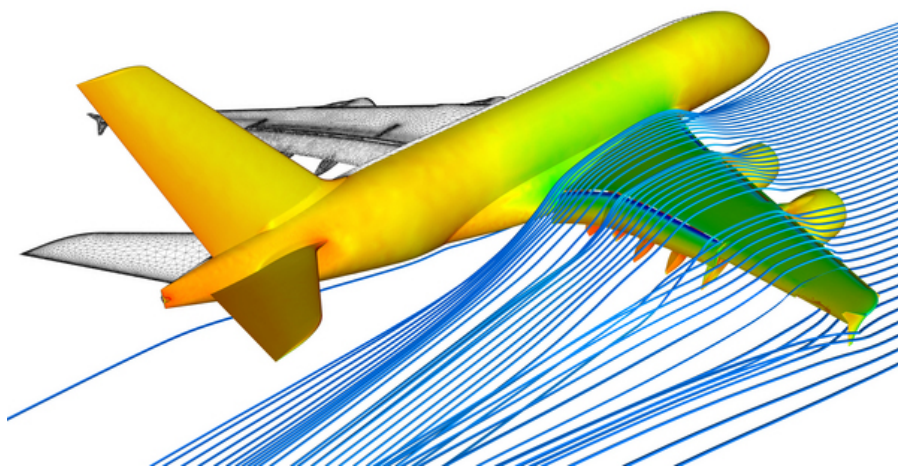
- Plasmaströmungen an der Sonnenoberfläche



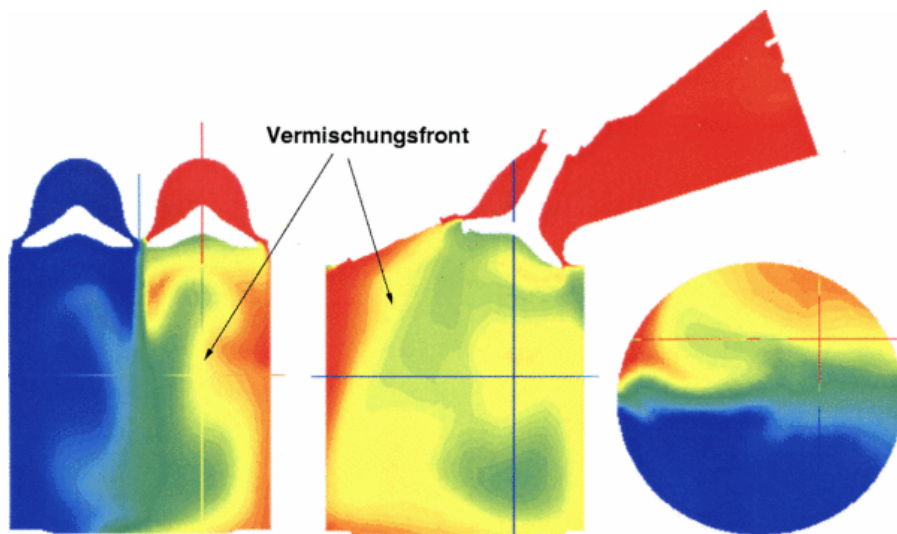
- Blutströmung in den Gefäßen



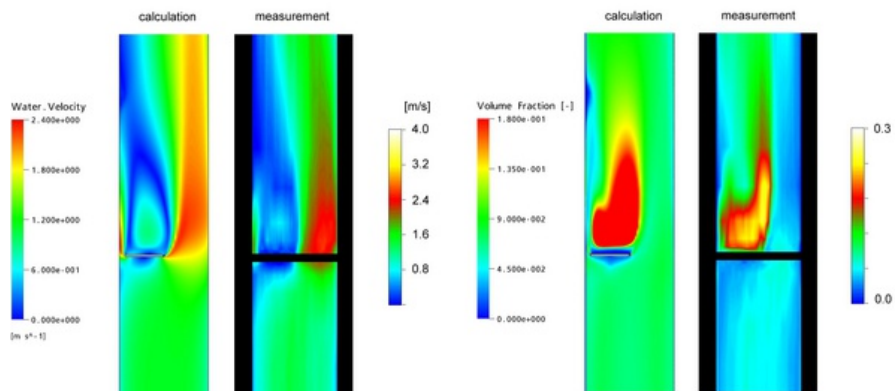
- Umströmung eines Flugzeugs



- Gemischströmung im Otto-Motor

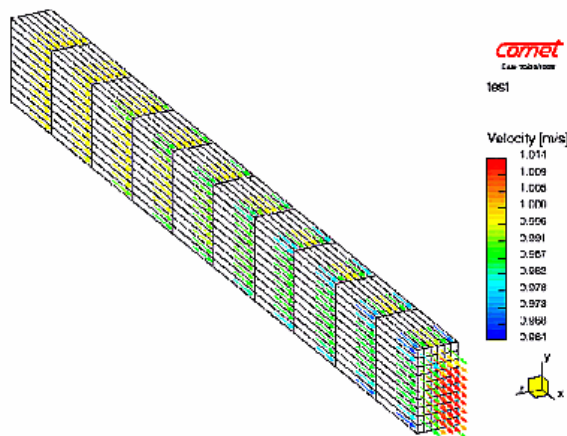


○ Zweiphasenströmung

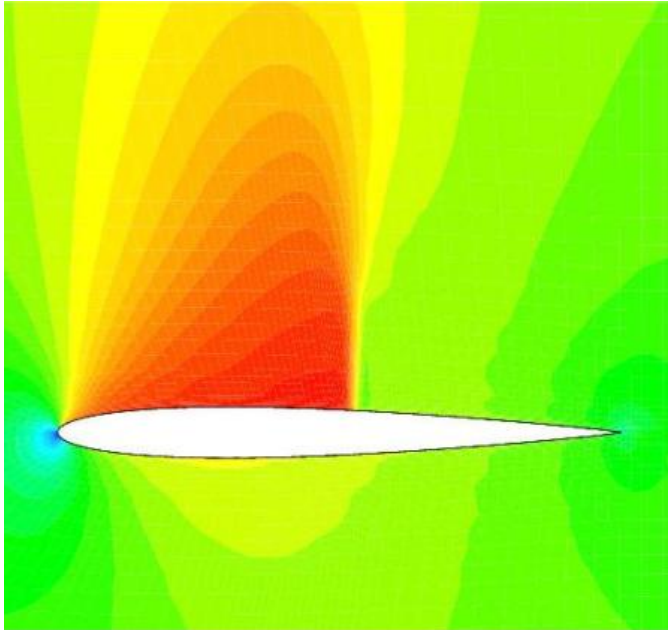


● Unterschiedliche Strömungsformen:

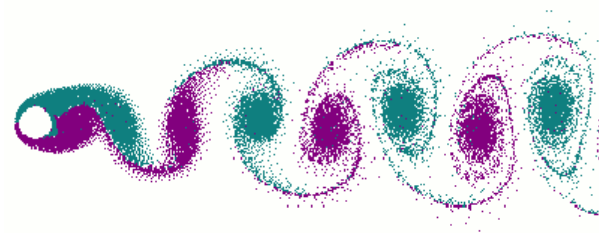
- gleichmäßige Strömung durch ein Rohr



- Überschallströmung über einer Tragfläche

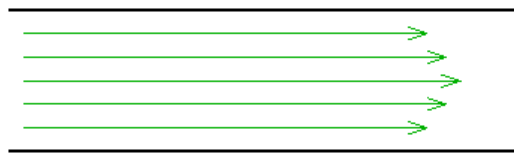


- Wirbelstraße hinter einem umströmten Zylinder

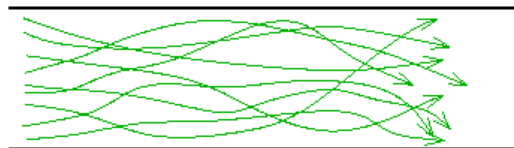


- Unterteilung nach Art des Fluids:
 - Newtonsches Fluid
 - linearer Zusammenhang zwischen Schubspannung und Geschwindigkeitsgradient
 - $\tau = \eta \, dw/dz$
 - dynamische Viskosität η
 - viele Gase, Wasser
 - Nicht-Newtonsches Fluid
 - sehr verschiedenartige Eigenschaften möglich
 - Joghurt, Zahnpasta, Mörtel, ...
 - hier nicht weiter betrachtet
- Unterteilung nach Verhalten der Dichte:
 - inkompressibel
 - Dichte ρ konstant
 - in Wasser und vielen anderen Flüssigkeiten
 - in Gasen bei niedrigen Geschwindigkeiten (z.B. $w < 0.2 \, c$)
 - kompressibel
 - Dichte veränderlich

- zusätzliche Gleichung für ρ nötig
- thermodynamische Beziehungen berücksichtigen
- Unterteilung nach Zeitabhängigkeit:
 - zeitunabhängig (stationär)
 - Strömungsbild zeitlich unveränderlich
 - manchmal nur erfüllt in größeren Skalen (quasistatisch)
 - zeitabhängig (instationär)
 - i.a. komplizierte Bewegungsformen
 - schwierig zu visualisieren
- Unterteilung nach Strömungsform
 - laminar
 - Teilchen bewegen sich längs nur langsam veränderlicher Stromfäden
 - Schichtenaufbau der Strömung
 - keine Vermischung der Schichten

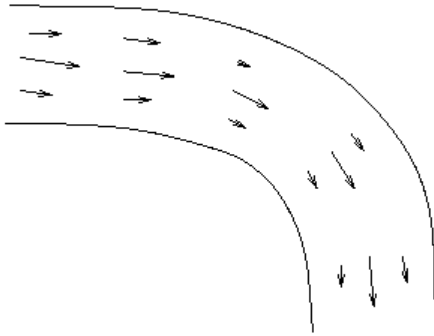


- turbulent
 - Teilchen bewegen sich auf unregelmäßigen Bahnen
 - starke Schwankungen in Querrichtung
 - tritt auf bei höherer Geschwindigkeit oder niedrigerer Viskosität

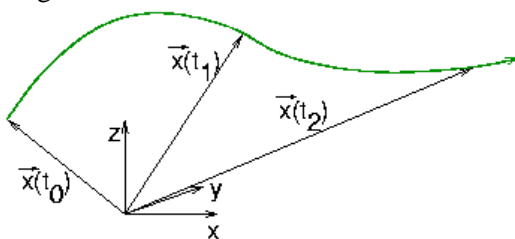


Beschreibung von Strömungen

- Strömungsfeld \vec{w} :
 - Strömung $\vec{w} = (u, v, w)$ gegeben durch Geschwindigkeit der Teilchen am Ort $\vec{x} = (x, y, z)$ zur Zeit t
 - $\vec{w} = \vec{w}(\vec{x}, t)$
 - in Koordinaten
 - $u = u(x, y, z, t)$
 - $v = v(x, y, z, t)$
 - $w = w(x, y, z, t)$
 - Eulersche Beschreibung
 - Darstellung durch Richtungspfeile (für jede Zeit t)

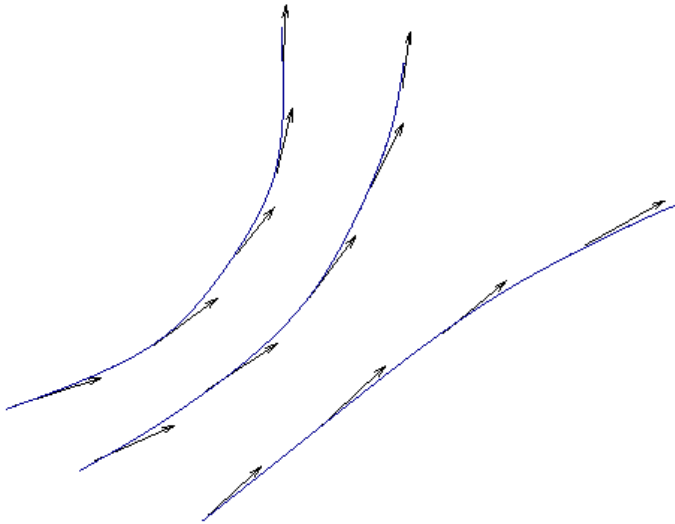


- bezogen auf ein Koordinatensystem, z.B.
 - ortsfest
 - mit konstanter Geschwindigkeit
 - mit Körper mitbewegt (z.B. Flugzeug)
- stationäre Strömung: \vec{w} hängt nicht von t ab
- Teilchenbahn:
 - Weg eines Fluidteilchens oder kleinen Fluidvolumens in der Strömung

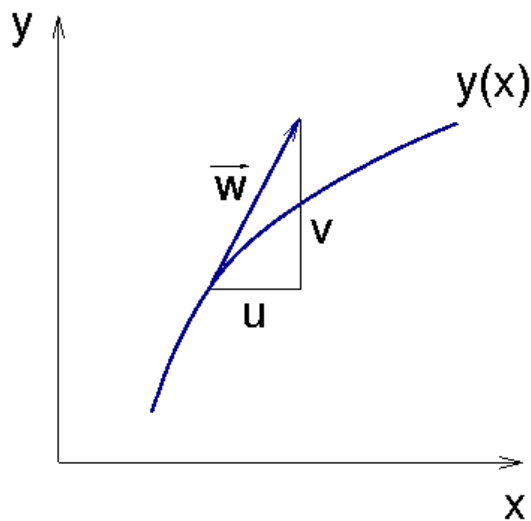


- experimentell: Teilchen anfärben oder Testteilchen einbringen (Aluminiumfitter) und lange belichten
- Bahnkurve bestimmt durch Anfangsort \vec{x}_0 zur Zeit t_0
 - $\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0)$;
- beschreibt die Strömung vollständig (Lagrangesche Beschreibung)
- Geschwindigkeit der Teilchen
 - $\vec{w}(\vec{x}, t) = d\vec{x}/dt$
- Berechnung der Teilchenbahnen:

- Differentialgleichungen für \vec{x} bei gegebenem \vec{w}
- in Koordinaten
 - $dx/dt = u(x, y, z, t)$
 - $dy/dt = v(x, y, z, t)$
 - $dz/dt = w(x, y, z, t)$
- Anfangsbedingung wählt ein Teilchen aus
 - $\vec{x}_0 = \vec{x}(t_0)$
- Stromlinien:
 - Richtungsfeld von \vec{w} zu einer bestimmten Zeit t



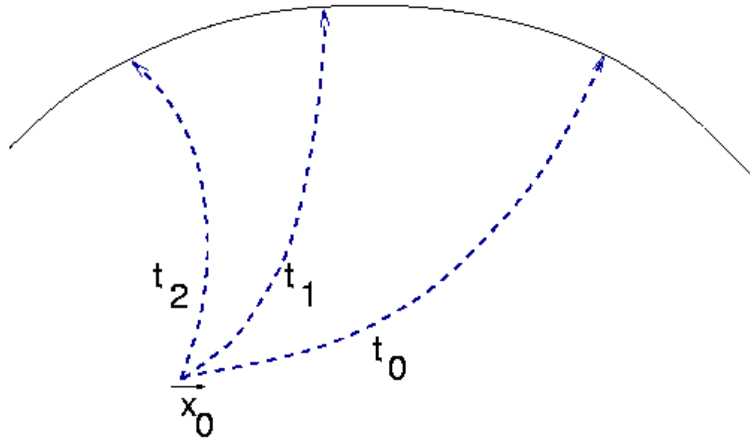
- Bild ändert sich mit der Zeit t
- daher Stromlinien i.a. verschieden von Bahnlinien
- Berechnung in 2 Dimensionen: $\vec{w}(x, y) = (u, v)$



- $dy/dx = v/u$
- experimentell: viele Markierungsteilchen, kurze Belichtungszeit

- Streichlinien:

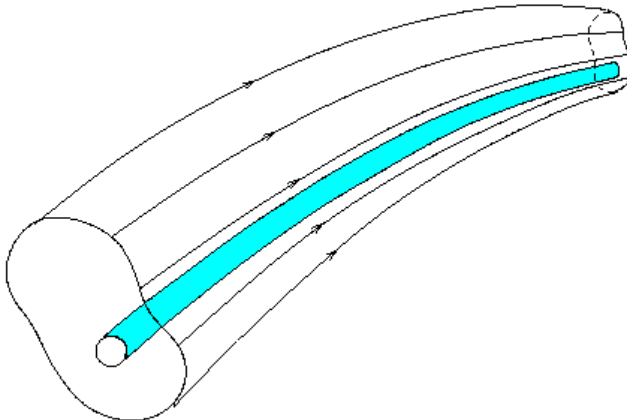
- experimentell: an fester Stelle \vec{x}_0 werden ständig Markierungsteilchen hinzugefügt (Farbe, Rauch)



- Streichlinie = Verbindungslinie dieser Teilchen
- zur Zeit t gegeben durch
 - $\vec{x}(t_0) = \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0)$;
- Parameter der Kurve ist t_0 = Zeit, zu der Teilchen eingesetzt wurde

- Stromfadentheorie:

- Stationäre Strömung → Bahnlinie = Stromlinie = Streichlinie
- Näherung: Größen hängen nur von der Koordinate längs ihrer Stromlinie ab



- Bündel aus vielen Stromlinien: Stromröhre, ganz dünn: Stromfaden
- Stromlinien = Bahnlinien → kein Stofftransport durch die Mantelfläche einer Stromröhre

- Aufgaben:

- Aufgabe 15

Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12
- Aufgabe 13
- Aufgabe 14
- Aufgabe 15

Aufgabe 1

- Um die Kontinuumsannahme zu überprüfen, soll die Zahl der Moleküle abgeschätzt werden in
 1. einem Wassertropfen (Kugel, $d = 5 \text{ mm}$)
 2. der Düse eines Vergasers (Zylinder, Durchmesser 1.5 mm , Höhe 2 cm , Luft bei 20 °C und 1 bar)
 3. 1 cm^3 Luft bei 20 °C in einem Ultrahoch-Vakuum ($p = 10^{-12} \text{ Pa}$)
- Lösung

Aufgabe 2

- Um wieviel Prozent nimmt die Dichte von anfangs trockener Luft von 19.3 °C und 0.997 bar ab, wenn die Luftfeuchtigkeit auf 78 % steigt (bei konstantem T und p)?
- Partialdruck p_d des Wasserdampfs bei 19.3 °C:
 - $p_d = 0.02239$ bar
- Lösung

Aufgabe 3

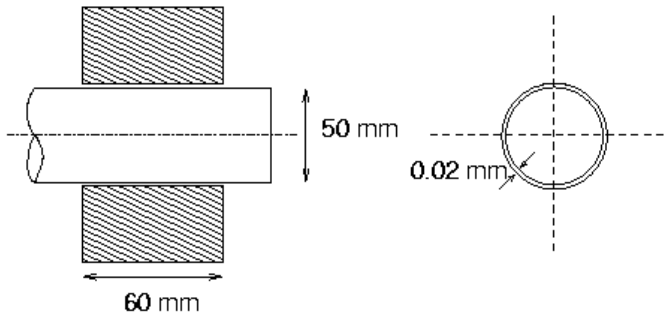
- Die Schallgeschwindigkeit von Luft bei 0 °C und Normaldruck beträgt $a_0 = 331.4$ m/s.
 1. Bestimmen Sie eine lineare Näherungsformel für a , die für Temperaturen in der Nähe von 0 °C gilt.
 2. Ermitteln Sie damit a für 20 °C und 100 °C und vergleichen Sie mit den genauen Werten.
- Lösung

Aufgabe 4

- Eine Platte von 1 m^2 wird mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s über eine andere Platte im Abstand von 1 mm gezogen. Zwischen beiden Platten befindet sich
 1. Wasser bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\eta = 1.00 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$),
 2. Luft bei $20 \text{ }^\circ\text{C}$ ($\eta = 1.82 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(s m)}$).
- Bestimmen Sie jeweils Kraft und Spannung sowie die Verlustleistung der Dissipation.
- Lösung

Aufgabe 5

- Ein Zapfen mit einem Durchmesser $d = 50 \text{ mm}$ hat in einer Aufnahmebohrung der Länge $l = 60 \text{ mm}$ ein Spiel (= Differenz der Durchmesser) von $s = 0.04 \text{ mm}$. Im Spalt befindet sich Spindelöl bei 60 °C ($\eta = 4.179 \cdot 10^{-3} \text{ kg/(s m)}$).



- Wie groß sind Schubspannung, Reibungsmoment und Verlustleistung, wenn der Zapfen zentrisch mit einer Drehzahl $n = 3000 \text{ U/min}$ läuft?
- Hinweis:
 - Die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt kann näherungsweise als linear angenommen werden.
- Lösung

Aufgabe 6

- Wie groß sind die kapillaren Steighöhen (bzw. Fallhöhen)
 1. für Wasser in einem Glasröhrchen, $d = 1 \text{ mm}$,
 2. bei einem typischen Manometer-Rohr (Wasser - Glas, $d = 7 \text{ mm}$),
 3. beim Quecksilber-Thermometer (Quecksilber-Glas, $d = 3 \text{ mm}$) ?
- Verwenden Sie folgende Werte:
 - Oberflächenspannungen:

Grenzschicht	$\sigma \text{ [N/m]}$
Wasser - Luft	0.073
Glas - Luft	0.14
Wasser - Glas	0.068
Quecksilber - Luft	0.47
Quecksilber - Glas	0.35

- Dichten:

Flüssigkeit	$\rho \text{ [kg/m}^3 \text{]}$
Wasser	1000
Quecksilber	13550

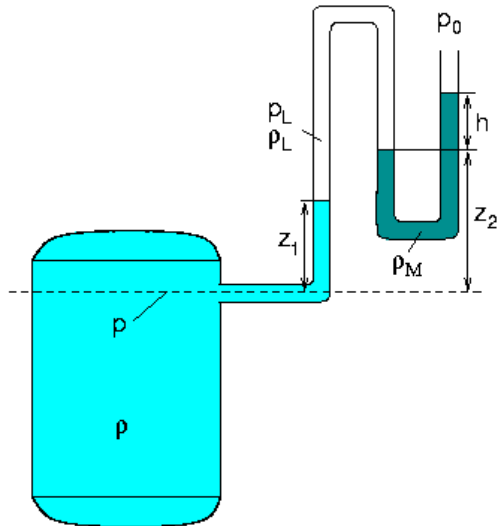
- Lösung

Aufgabe 7

- Ein Wassertropfen mit dem Radius $r_1 = 1 \text{ mm}$ wird zerstäubt in viele Tröpfchen mit dem Radius $r_2 = 10^{-4} \text{ mm}$. Auf das Wievielfache erhöht sich dabei die Oberflächenenergie?
- Lösung

Aufgabe 8

- In ein U-Rohr-Manometer mit Quecksilber sei eine Luftblase eingeschlossen:



Bestimmen Sie den Überdruck im mit Wasser gefüllten Kessel, wobei Sie das Gewicht der Luftblase vernachlässigen können.

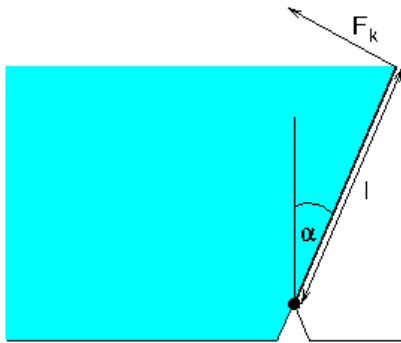
- Werte:
 - $z_1 = 0.6 \text{ m}$
 - $z_2 = 0.8 \text{ m}$
 - $h = 0.32 \text{ m}$
 - $\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$
 - $\rho_M = 13600 \text{ kg/m}^3$
- Lösung

Aufgabe 9

- Im Zentrum einer Zentrifuge befindet sich ein Reagenzglas mit einem Durchmesser von 1 cm und einer Höhe von 25 cm, teilweise gefüllt mit einer wässrigen Lösung ($\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$). Die Drehzahl betrage $n = 4000 \text{ U/min}$.
 1. Wie hoch darf das Reagenzglas höchstens gefüllt sein, damit keine Flüssigkeit überläuft?
 2. Welcher Druck herrscht dann an der Wand in 1 cm Höhe?
 3. Was geschieht bei einer Drehzahl von $n = 6000 \text{ U/min}$?
- Lösung

Aufgabe 10

- Eine geneigte Verschlussklappe, Länge l , Breite b , die durch ein Seil gehalten wird, begrenzt ein Wasservolumen:

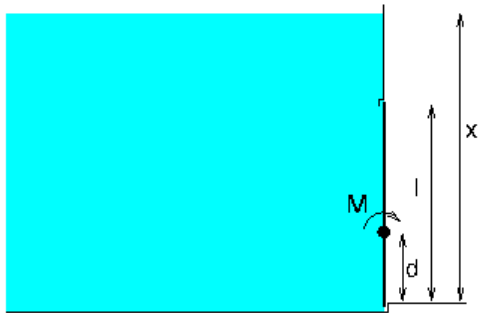


Welche Kraft F_k wirkt auf das Seil?

- Werte:
 - $l = 1.20 \text{ m}$
 - $b = 1.00 \text{ m}$
 - $\alpha = 30^\circ$
- Lösung

Aufgabe 11

- Eine in einen Wasserbehälter eingebaute quadratische Klappe (Seitenlänge $l = 1\text{ m}$) ist im Punkt M (in der Höhe $d = 0.45\text{ m}$) um eine horizontale Achse drehbar.

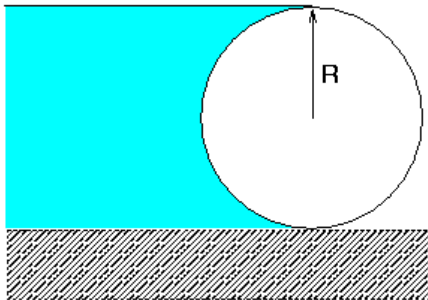


Bei welcher Höhe x des Wasserspiegels öffnet sich die Klappe selbsttätig?

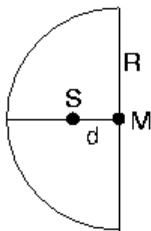
- Lösung

Aufgabe 12

- Auf einer Seite einer zylindrischen Walze, Länge $b = 3 \text{ m}$, Radius $R = 0.5 \text{ m}$, befindet sich Wasser, das genau bis zur oberen Scheitellinie reicht. Wie groß (Betrag und Richtung) ist die Druckkraft und wo greift sie an?



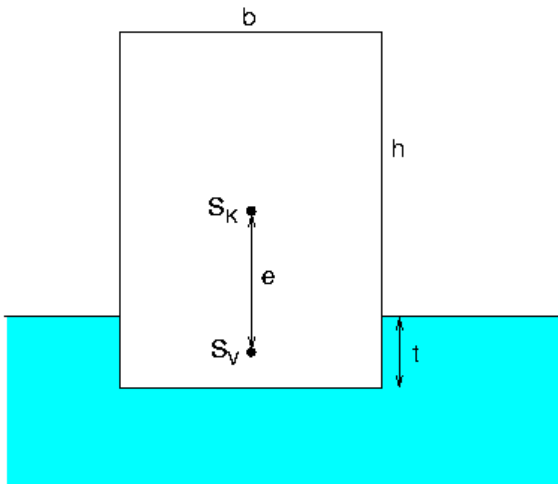
- Hinweis:
 - Der Flächenmittelpunkt eines Halbkreises befindet sich im Abstand $d = 4R/(3\pi)$ vom Kreismittelpunkt:



- Lösung

Aufgabe 13

- Ein rechteckiger Balken aus Balsaholz mit einer Breite von 8 cm und einer Höhe von 10 cm schwimmt in Wasser.



1. Wie groß ist die Eintauchtiefe t ?
 2. Ist seine Schwimmelage stabil? Berechnen und skizzieren Sie h_m !
 3. Wie ändert sich die Situation für einen Balken der Höhe $h = 15$ cm?
 4. Ab welcher Höhe h wird die Schwimmelage instabil?
- Werte:
 - Dichte von Wasser $\rho_W = 1000 \text{ kg/m}^3$
 - Dichte von Balsaholz $\rho_B = 100 \text{ kg/m}^3$
 - Lösung

Aufgabe 14

- Ein Ballon habe die Masse $m = 500 \text{ kg}$ und das (konstante!) Volumen $V = 700 \text{ m}^3$. Wie hoch steigt er auf bei
 1. isothermer Schichtung
 2. isentroper Schichtung
 3. Normatmosphäre?
- Am Boden liegen jeweils die Normwerte vor.
- Lösung

Aufgabe 15

- Gegeben sei das zweidimensionale stationäre Strömungsfeld
 - $\vec{w} = (u, v) = \omega (-y, x)$
 - 1. Stellen Sie die Strömung graphisch dar.
 - 2. Berechnen Sie die Bahnlinien.
 - 3. Bestimmen Sie die Stromlinien.
 - 4. Am Punkt $\vec{x}_0 = (1, 0)$ werden Markierungsteilchen eingeleitet. Bestimmen Sie die entstehende Streichlinie.
- Lösung

Anhang

- Literatur

- Nachweise

Literatur

1. W.Bohl, Technische Strömungslehre
Vogel, 11. Aufl 1998, ISBN: 3-8023-1740-8
2. K.Gersten, Einführung in die Strömungsmechanik
Vieweg, 6. Aufl 1991, ISBN 3-528-43344-2
3. H. Oertel, Strömungsmechanik
Vieweg 1999, ISBN 3-528-03893-4
4. K.Gersten, H.Herwig: Strömungsmechanik
Vieweg 1992, ISBN 3-528-06472-2
5. H. Iben: Strömungslehre in Fragen und Aufgaben
Teubner 1997, ISBN: 3-8154-3033-X
6. L. Böswirth: Technische Strömungslehre
Vieweg, 3. Aufl. 2000, ISBN: 3-528-24925-5
7. H. Oertel, M. Böhle, T. Ehret: Übungsbuch Strömungsmechanik
Vieweg, 2. Aufl. 1998, ISBN: 3-528-07435-3
8. Cerbe, Hoffmann: Einführung in die Thermodynamik
Carl Hanser, 12. Aufl. 1999, ISBN: 3-446-21110-1

Nachweise

- Bilder:
 -

Bild-Nr	Herkunft
26, 41, 42	[1]

- Bild 48 basiert auf dem Bild Standardatmosphäre 1976 90km.png aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und steht unter der Creative Commons Attribution 3.0 Unported License. Der Urheber des Bildes ist User:SiriusB.
 - Bild 51 ist im Rahmen des Skylab-3-Programms aufgenommen worden. Es stammt von der NASA (Quelle) und ist gemeinfrei (public domain).
 - Bild 52 basiert auf dem Bild Meeresstroemungen.jpg aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und ist gemeinfrei. Der Urheber des Bildes ist die US Navy.
 - Bild 53 basiert auf dem Bild A closeup of an erupting prominence with Earth inset at the approximate scale of the image. Copyright: SOHO (ESA & NASA).
 - Bild 54 basiert auf dem Bild Grafik_blutkreislauf.jpg aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und steht unter der Creative Commons Attribution ShareAlike 2.5 License.. Der Urheber des Bildes ist User:Sansculotte.
 - Bild 55 basiert auf dem Bild Numerische Strömungssimulation an einem Airbus A380. Copyright: DLR.
 - Bild 56 basiert auf dem Bild Zylinderinnenströmung im Motor. Copyright: Karlsruher Instituts für Technologie.
 - Bild 57 basiert auf dem Bild Validierung von CFD Codes für komplexe Strömungen. Copyright: Forschungszentrum Dresden Rossendorf
 - Bild 60 basiert auf dem Bild Vortex-street-animation.gif aus der freien Enzyklopädie Wikipedia. Der Urheber des Bildes ist Cesareo de La Rosa Siqueira.
- Tabellen:
 -

Tabelle	Herkunft
1, 2, 3	[1]
4, 5	[6]

Lösung von Aufgabe 1

1. Zahl der Moleküle im Wassertropfen:

- Volumen des Tropfens
 - $V = 4 \pi r^3 / 3 = 6.54 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$
- Masse daher (mit Dichte von Wasser $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$)
 - $m = \rho V = 6.54 \cdot 10^{-5} \text{ kg}$
- Zahl der Teilchen (mit Molmasse $M = 18 \text{ g/mol}$, Avogadrozahl $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} / \text{mol}$)
 - $N = N_A m / M = 2.19 \cdot 10^{21}$

2. Zahl der Moleküle in der Düse eines Vergasers:

- Volumen des Zylinders
 - $V = h \pi d^2 / 4 = 3.53 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3$
- Zahl der Teilchen dann mit Gasgleichung (wobei $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$)
 - $N = p V / (k_B T) = 8.73 \cdot 10^{17}$

3. genauso beim Ultrahoch-Vakuum:

- Zahl der Moleküle
 - $N = p V / (k_B T) = 247.2$
- Hier gilt die Kontinuumsannahme sicher nicht mehr.

Lösung von Aufgabe 2

- Relative Änderung der Dichte
 - $\rho_f / \rho_{tr} = 1 - 0.337 \phi p_d/p = 0.9934$
- \Rightarrow Dichte nimmt um 0.66 % ab.

Lösung von Aufgabe 3

1. Lineare Näherungsformel für a:

- Lineare Näherung einer Funktion $f(x)$ bei x_0 durch Tangente

- $\hat{f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
- (Taylorentwicklung 1. Ordnung)

- Für $a(T)$ also

$$\begin{aligned}\hat{a}(T) &= a(T_0) + a'(T_0)(T - T_0) \\ &= a(T_0) + \frac{\sqrt{\kappa R_i}}{2\sqrt{T_0}}(T - T_0)\end{aligned}$$

- Mit den Werten

- $\kappa = 1.40$
- $R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$
- $T_0 = 273.15 \text{ K}$

- und t in $^{\circ}\text{C}$ erhält man

- $\hat{a}(t) = 331.4 \text{ m/s} + 0.607 \text{ (m/s)/}^{\circ}\text{C } t$

2. Einsetzen in Beziehungen für a und \hat{a} liefert

t [$^{\circ}\text{C}$]	\hat{a} [m/s]	a [m/s]
20	343.5	343.3
100	392.1	387.3

Lösung von Aufgabe 4

1. Werte bei Wasser:

- Spannung:

$$\circ \tau = \eta \frac{dw}{dz} = \eta \frac{w}{h} = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

- Kraft:

$$\circ F = \tau A = 1 \text{ N}$$

- Verlustleistung

$$\circ P_V = F w = 1 \text{ W}$$

2. Analog für Luft mit dem angegebenen Wert für η

- $\tau = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^2$
- $F = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ N}$
- $P_V = 1.82 \cdot 10^{-2} \text{ W}$

Lösung von Aufgabe 5

- Geschwindigkeit am Lager
 - $w = n \pi d = 7.854 \text{ m/s}$
- Schubspannung
 - $\tau = \eta \, dw/dz \approx \eta \, w/(s/2) = 1641 \text{ N/m}^2$
- Wandkraft
 - $F = \tau A = \tau l \pi d = 15.47 \text{ N}$
- Reibungsmoment
 - $M_R = F d/2 = 0.3867 \text{ N m}$
- Verlustleistung
 - $P_V = F w = 121.5 \text{ W}$

Lösung von Aufgabe 6

1. Wasser im Glasröhrchen:

- Der Berührungswinkel ergibt sich aus

- $\cos \alpha = \frac{\sigma_{13} - \sigma_{23}}{\sigma_{12}}$

- mit den angegebenen Werten für Wasser zu

- $\alpha = 9.5^\circ$

- Damit ist die Steighöhe bei $d = 1 \text{ mm}$

- $h = 29 \text{ mm}$

2. U-Rohr-Manometer :

- Für $d = 7 \text{ mm}$ folgt wie oben

- $h = 4.1 \text{ mm}$

3. Quecksilber-Thermometer:

- Benetzungswinkel

- $\alpha = 117^\circ$

- "Steighöhe" (< 0 !)

- $h = -2.1 \text{ mm}$

Lösung von Aufgabe 7

- Oberflächenenergie
 - $W = \sigma A$
- bei Kugel mit Radius r_1
 - $W_1 = 4 \pi \sigma r_1^2$
- Anzahl der Kugeln mit Radius r_2
 - $N = V_1/V_2 = (r_1/r_2)^3 = 10^{12}$
- Oberflächenenergie der kleinen Kugeln

$$\begin{aligned}W_2 &= \sigma N 4 \pi r_2^2 \\ &= 4 \pi \sigma r_1^3 / r_2\end{aligned}$$

- Verhältnis der Oberflächenenergien
 - $W_2/W_1 = r_1/r_2 = 10^4$

Lösung von Aufgabe 8

- Druck an der Grenzschicht Wasser - Luft:
 - $p_L = p - \rho_W g z_1$
- Bei Vernachlässigung des Gewichts der Luftsäule herrscht der Druck p_L auch an der Grenzschicht Luft - Quecksilber. Daher:
 - $p_L = p_0 + \rho_M g h$
- Daher gilt insgesamt
 - $p - p_0 = \rho_M g h + \rho_W g z_1 = 0.486 \text{ bar}$

Lösung von Aufgabe 9

1. Maximale Füllhöhe des Reagenzglases:

- Die Winkelgeschwindigkeit beträgt
 - $\omega = 2 \pi n = 418.9 \text{ 1/s}$
- Ruhelage h_0 liegt in der Mitte zwischen Tiefst- und Höchststand
 - $h_0 = (h_{\min} + h_{\max})/2$
- Aus der Gleichung für die Oberfläche folgt
 - $h_{\max} = h_{\min} + \omega^2 R^2 / (2g)$
- Elimination von h_{\min} liefert somit
 - $h_0 = h_{\max} - \omega^2 R^2 / (4g)$
- Bei Maximalstand ist $h_{\max} = h$, also
 - $h_0 = 13.8 \text{ cm.}$

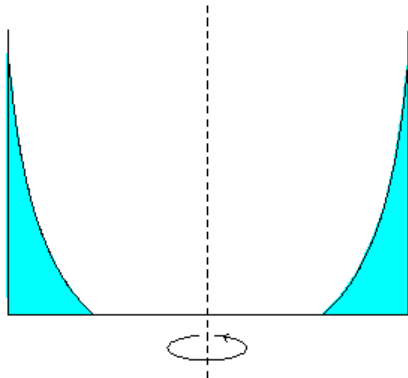
2. Druck an der Wand:

- Der Scheitel der Parabel hat die Höhe
 - $h_{\min} = 2 h_0 - h_{\max} = 2.6 \text{ cm,}$
- daher ist das z in der Formel für den Druck (ab h_{\min} gemessen!)
 - $z = 1 \text{ cm} - h_{\min} = -1.6 \text{ cm}$
- Damit

$$\begin{aligned}
 p &= p_0 + (1/2) \rho \omega^2 R^2 - \rho g z \\
 &= p_0 + 2350 \text{ Pa}
 \end{aligned}$$

3. Verhalten bei 6000 U/min:

- Bei $n = 6000 \text{ U/min}$ ist
 - $\omega^2 R^2 / (4g) = 25.2 \text{ cm} > h$
- Ein großer Teil des Bodens ist unbedeckt, die Flüssigkeit befindet sich hauptsächlich an der Wand



Lösung von Aufgabe 10

- Schwerpunkt liegt in der Mitte, Tiefe

- $h_S = \frac{1}{2} l \cos \alpha = 0.5196 \text{ m}$

- damit Druckkraft auf Klappe

- $F = \rho g h_S b l = 6117 \text{ N}$

- Trägheitsmoment

- $I_S = l^3 b / 12 = 0.144 \text{ m}^4$

- Lage des Angriffspunkts

- $w_D = w_S + e = w_S + \frac{I_S}{w_S A} = 0.8 \text{ m}$

- Momentengleichgewicht um Gelenk

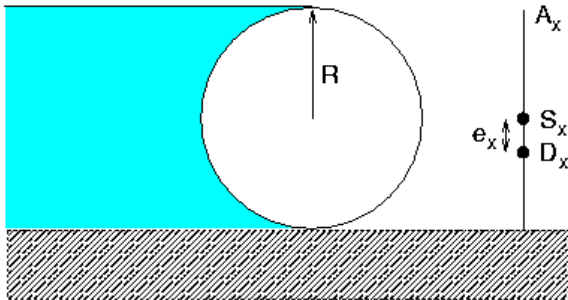
- $$F_k l = F(l - w_D)$$
$$\Rightarrow F_k = \left(1 - \frac{w_D}{l}\right) F = F/3 = 2039 \text{ N}$$

Lösung von Aufgabe 11

- Klappe öffnet sich, wenn der Angriffspunkt D oberhalb des Drehpunkts liegt, also bei
 - $e < (l/2) - d$
- Es war
 - $e = I_S / (w_S A)$
- Tiefe des Schwerpunkts bei Füllhöhe x
 - $w_S = x - l/2$
- Trägheitsmoment
 - $I_S = l^4 / 12$
- Fläche
 - $A = l^2$
- In e einsetzen und Ungleichung nach x auflösen →
 - $x > \frac{l}{2} + \frac{l^2}{12(\frac{l}{2} - d)} = 2.17 \text{ m}$

Lösung von Aufgabe 12

- Horizontalkomponente:



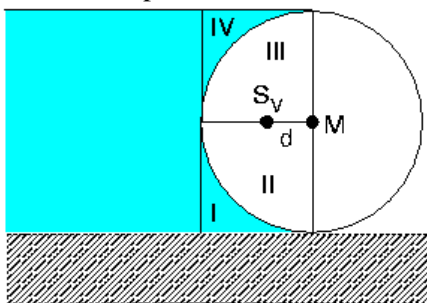
- Schwerpunkt S_x in Tiefe R , daher

$$\begin{aligned} F_x &= \rho g S_x A_x \\ &= \rho g R (2Rb) \\ &= 2\rho g R^2 b = 14715 \text{ N} \end{aligned}$$

- Lage des Angriffspunkts D_x

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{I_S}{z_S A_x} \\ &= \frac{(2R)^3 b / 12}{R(2Rb)} \\ &= \frac{1}{3} R = 0.1667 \text{ m} \end{aligned}$$

- Vertikalkomponente:



- Kraft (nach oben) auf unteren Viertelzylinder

- $F_{z,1} = -\rho g (V_{II} + V_{III} + V_{IV})$

- Kraft auf oberen Viertelzylinder

- $F_{z,2} = \rho g V_{IV}$

- gesamte Vertikalkomponente

$$\begin{aligned} F_z &= F_{z,1} + F_{z,2} \\ &= -\rho g (V_{II} + V_{III}) \\ &= -\rho g \frac{1}{2} \pi R^2 b = -11557 \text{ N} \end{aligned}$$

- Angriffspunkt durch Flächenschwerpunkt des Halbkreises mit

- $d = \frac{4R}{3\pi} = 0.212 \text{ m}$

- Gesamtkraft:

- Betrag

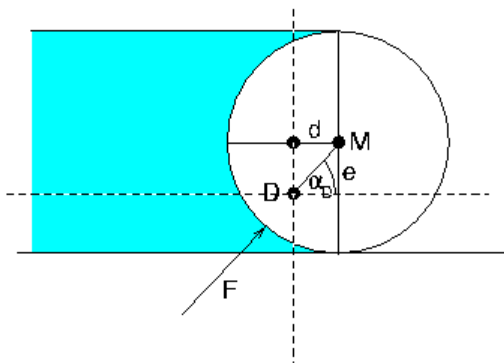
- $F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = 18711 \text{ N}$

- Richtung

- $\alpha_F = \arctan \frac{F_z}{F_x} = -38.2^\circ$

- Wirkungslinie:

- durch den Schnittpunkt der Wirkungslinien von F_z und F_x



- Neigungswinkel α_D der Strecke DM

- $\alpha_D = \arctan \frac{e}{d} = 38.2^\circ = -\alpha_F$

- Kraft F zeigt zum Walzen-Mittelpunkt M

Lösung von Aufgabe 13

1. Eintauchtiefe:

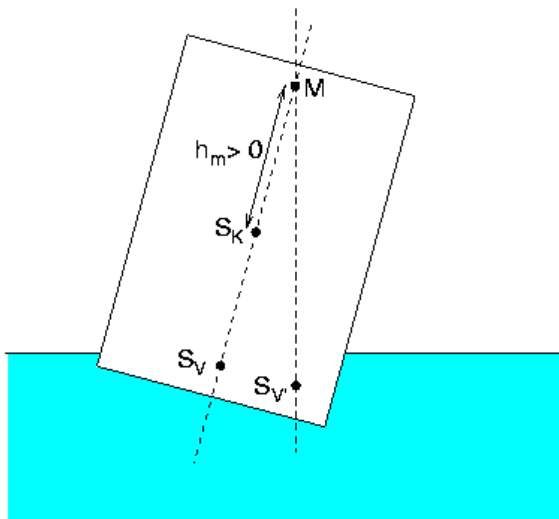
- Länge des Balkens sei l . Dann beträgt die Gewichtskraft
 - $G = \rho_B g V = \rho_B g h b l$
- Auftriebskraft
 - $F_A = \rho_W g V_v = \rho_W g t b l$
- Schwimmen bei $F_A = G \rightarrow$
 - $t = \frac{\rho_B}{\rho_W} h = 1 \text{ cm}$

2. Stabilität:

- Flächenträgheitsmoment für eine rechteckige Schwimmfläche
 - $I_0 = l b^3 / 12$
- damit ist

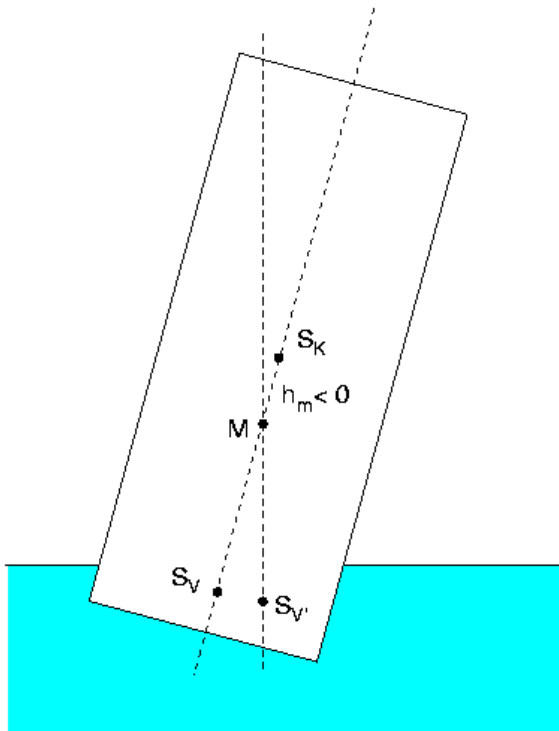
$$\begin{aligned}
 h_m &= \frac{I_0}{V_v} - e \\
 &= \frac{l b^3 / 12}{t l b} - \frac{1}{2}(h - t) \\
 &= \frac{b^2}{12t} - \frac{1}{2}(h - t) = 0.83 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

-
- Skizze



3. Balken der Höhe $h = 15 \text{ cm}$:

- Eintauchtiefe
 - $t = 1.5 \text{ cm}$
- metazentrische Höhe
 - $h_m = -3.2 \text{ cm}$
- Schwimmelage ist instabil



4. Instabile Schwimmelage:

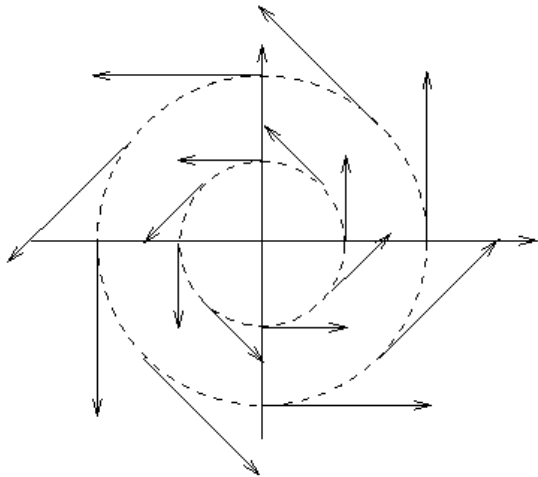
- tritt auf bei $h_m < 0$, also
 - $h_m = \frac{b^2}{12t} - \frac{1}{2}(h - t) < 0$
- Mit der Abkürzung
 - $\alpha := \rho_B / \rho_W$
- ist die Eintauchtiefe
 - $t = \alpha h$
- daher wird aus Beziehung für h_m
 - $\frac{b^2}{12\alpha h} - \frac{h}{2}(1 - \alpha) < 0$
- Nach h auflösen \rightarrow
 - $h > \frac{b}{\sqrt{6\alpha(1 - \alpha)}} = 10.9 \text{ cm}$

Lösung von Aufgabe 14

- Der Ballon steigt, bis seine Dichte mit der der umgebenden Luft übereinstimmt. Diese beträgt
 - $\rho_B = m/V = 0.714 \text{ kg/m}^3$
- Nun muss für jeden Fall die Beziehung
 - $\rho(z_B) = \rho_B$
- nach z_B aufgelöst werden.
- bei isothermer Schichtung
 - $z_B = H_0 \ln \frac{\rho_0}{\rho_B} = 4550 \text{ m}$
- bei isentroper Schichtung
 - $z_B = \left(1 - \left(\frac{\rho_B}{\rho_0}\right)^{\kappa-1}\right) \frac{\kappa}{\kappa-1} H_0 = 5730 \text{ m}$
- bei der Normatmosphäre
 - $z_B = \left(1 - \left(\frac{\rho_B}{\rho_0}\right)^{n-1}\right) \frac{n}{n-1} H_0 = 5280 \text{ m}$

Lösung von Aufgabe 15

1.



2. Bahnlinien für $\vec{x} = (x, y)$ aus $d\vec{x}/dt = \vec{w}$:

- In Koordinaten lautet die Dgl:

$$\dot{x} = -\omega y \quad (1)$$

$$\dot{y} = \omega x \quad (2)$$

- (1) ableiten und (2) einsetzen \rightarrow
 - $\ddot{x} = -\omega \dot{y} = -\omega^2 x$
- Schwingungsdgl., also Lösung für x:
 - $x(t) = a \cos(\omega t + \phi)$
- in (1) einsetzen \rightarrow
 - $y(t) = -\dot{x}/\omega = a \sin(\omega t + \phi)$
- also

$$\vec{x}(t) = a \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \phi) \\ \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix}$$

- Kreise um den Ursprung. Radius a und Phase ϕ aus den Anfangsbedingungen.

3. Stromlinien:

- aus
 - $dy/dx = v/u = -x/y$
 - $\Rightarrow y dy = -x dx$
 - $\Rightarrow 1/2 y^2 = -1/2 x^2 + C$
 - $\Rightarrow x^2 + y^2 = 2C$
- Kreise um den Ursprung, Radius durch Anfangspunkt gegeben.

4. Streichlinien:

- Zunächst Anfangsbedingung bei Bahnlinien einbauen

$$\begin{aligned}\vec{x}(t_0) &= \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{x}(t_0) &= a \begin{pmatrix} \cos(\omega t_0 + \varphi) \\ \sin(\omega t_0 + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow a &= 1, \quad \varphi = -\omega t_0\end{aligned}$$

$$\circ \Rightarrow \vec{x}(t; \vec{x}_0, t_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) \\ \sin(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix}$$

- Zu jeder festen Zeit t ist dies ein Kreis um den Ursprung mit Radius 1, beschrieben durch den Parameter t_0 .