

- Gemische
- Verbrennung
- Wärmeübertragung
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 27. 6. 2022

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Gemische
 - Beschreibung von Gemischen
 - Gemische idealer Gase
 - Eigenschaften von Gas-Dampf-Gemischen
 - Enthalpie feuchter Luft
- Verbrennung
 - Brennstoffe
 - Verbrennungsrechnung
 - Verbrennungsenthalpie
- Wärmeübertragung
 - Übersicht
 - Wärmeleitung
 - Wärmeströmung
 - Wärmestrahlung
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
 - Aufgabe 7
 - Lösung von Aufgabe 7
 - Aufgabe 8
 - Lösung von Aufgabe 8
 - Aufgabe 9
 - Lösung von Aufgabe 9
 - Aufgabe 10
 - Lösung von Aufgabe 10
 - Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 11
 - Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 12
 - Aufgabe 13
 - Lösung von Aufgabe 13
- Anhang
 - Tabellen
 - h,x-Diagramm von Mollier
 - Applets
 - Matlab-Beispiele
 - exercise5.m
 - exercise7.m
 - Nachweise

- Beschreibung von Gemischen
- Gemische idealer Gase
- Eigenschaften von Gas-Dampf-Gemischen
- Enthalpie feuchter Luft

- Gemisch:

Mischung mehrerer homogener Stoffe (**Komponenten**)

selbst homogen (häufig bei Gasen) oder inhomogen (etwa bei Wasser und Luft)

keine chemischen Reaktionen zwischen Komponenten

u.U. Mischungseffekte wie Volumenkontraktion

- Anteile der Komponenten:

Gesamtmasse

$$m_g = \sum_i m_i$$

mit Masse m_i von Komponente i

Massenanteil μ_i

$$\mu_i := m_i/m_g$$

natürlich gilt

$$\sum_i \mu_i = 1$$

analog **Molanteil** y_i

$$y_i := n_i/n_g$$

- Molmasse M_g des Gemischs:

definiert als

$$M_g := m_g/n_g$$

bestimmbar aus den Molanteilen

$$\begin{aligned} M_g &= \sum_i \frac{m_i}{n_g} \\ &= \sum_i \frac{m_i}{n_i} \frac{n_i}{n_g} \\ &= \sum_i M_i y_i \end{aligned}$$

bestimmbar aus den Massenanteilen

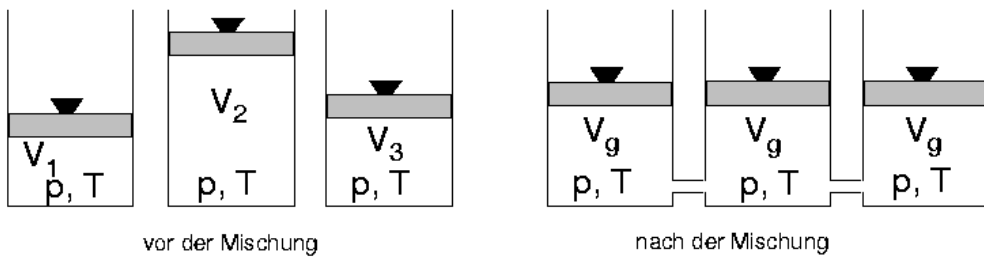
$$\begin{aligned} \frac{1}{M_g} &= \frac{n_g}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{n_i}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{n_i}{m_i} \frac{m_i}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{\mu_i}{M_i} \end{aligned}$$

- Ideales Gemisch:

keine Wechselwirkung zwischen Komponenten

bei gleichem p und T addieren sich die Volumina

$$V_g = \sum_i V_i$$



gut erfüllt bei vielen Gasen

meistens schlecht bei Flüssigkeiten

- Zustandsgleichung des Gemischs:

ideale Gasgleichung der Komponenten vor der Mischung

$$p V_i = n_i R T = m_i R_i T$$

nach der Mischung p und T gleich

Addition der Gleichungen \rightarrow

$$\begin{aligned} pV_g &= \sum_i pV_i \\ &= \sum_i m_i R_i T \\ &= \sum_i \mu_i m_g R_i T \\ &= m_g R_g T \end{aligned}$$

mit Gaskonstante des Gemischs

$$R_g = \sum_i \mu_i R_i$$

- **Partialdruck** p_i^* :

Komponente i nach Mischung auf Gesamtvolumen V_g verteilt

übt Teildruck (Partialdruck) p_i^* aus mit

$$p_i^* = \frac{n_i RT}{V_g}$$

Gesamtdruck p erfüllt

$$\begin{aligned} p &= \frac{n_g RT}{V_g} \\ &= \sum_i \frac{n_i RT}{V_g} \\ &= \sum_i p_i^* \end{aligned}$$

Division liefert

$$\frac{p_i^*}{p} = \frac{n_i}{n_g} = y_i$$

- **Volumen und Dichte:**

Volumenanteil r_i

$$r_i := \frac{V_i}{V_g}$$

durch Molanteil gegeben wegen

$$\begin{aligned} r_i &= \frac{pV_i}{pV_g} \\ &= \frac{n_i RT}{n_g RT} \\ &= \frac{n_i}{n_g} \\ &= y_i \end{aligned}$$

Dichte des Gemischs

$$\rho_g = \frac{m_g}{V_g} = \sum_i \frac{m_i}{V_g} = \sum_i \rho_i^*$$

mit den Partialdichten ρ_i^*

aus den Massenanteilen bestimmt zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_g} &= \frac{V_g}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{V_i}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{V_i}{m_i} \frac{m_i}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{\mu_i}{\rho_i} \end{aligned}$$

mit den Dichten ρ_i bei gleichem p und T

mit der Gasgleichung für die Komponenten

$$\rho_i^* V_g = n_i R T = m_i R_i T$$

gilt außerdem

$$\rho_g = \sum_i \frac{m_i}{V_g} = \sum_i \frac{p_i^*}{R_i T}$$

- Extensive Größen Z_i :

z.B. Enthalpie H , Wärmekapazitäten C_p , C_v

addieren sich im Gemisch

$$Z_g = \sum_i Z_i$$

nicht Entropie (s.u.)

bezogen auf Massen

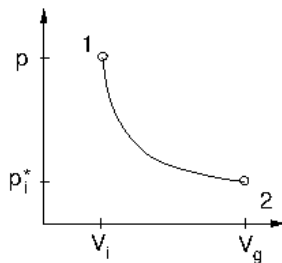
$$\begin{aligned} z_g &= \frac{Z_g}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{Z_i}{m_g} \\ &= \sum_i \frac{Z_i}{m_i} \frac{m_i}{m_g} \\ &= \sum_i \mu_i z_i \end{aligned}$$

analog für molare Größen

$$Z_{m,g} = \sum_i y_i Z_{m,i}$$

- Entropie des Gemischs:

Komponente i wird bei Mischung adiabatisch entspannt



irreversibler, isothermer Prozess (Diffusion)

Dissipationsenergie

$$\begin{aligned}
 W_{diss,i} &= -W_{V12} \\
 &= \int_1^2 p dV = \int_1^2 n_i RT \frac{dV}{V} \\
 &= -n_i RT \ln \frac{V_i}{V_g} = -n_i RT \ln r_i \\
 &= -n_i RT \ln y_i
 \end{aligned}$$

zugehörige Zunahme der Entropie

$$\Delta S_i = \frac{W_{diss,i}}{T} = -n_i R \ln y_i > 0$$

Mischungsentropie über alle Komponenten

$$S_{Mi} = -R \sum_i n_i \ln y_i$$

Gesamtentropie des Gemischs

$$S_g = \sum_i S_i + S_{Mi}$$

• Aufgaben:

Aufgabe 1

Aufgabe 2

- Gas-Dampf-Gemisch:

Gasphase

- homogenes Gas oder Gasgemisch
- wird als ein ideales Gas behandelt
- i.f. immer Luft
- Größen mit Index L ("Luft")

Dampfphase

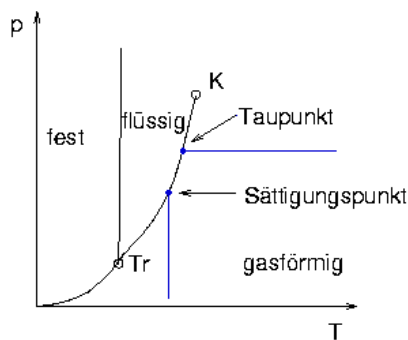
- Komponente, die gasförmig oder flüssig (u.U. auch fest) sein kann
- häufig mit geringem Partialdruck
- → im gasförmigem Zustand als ideales Gas beschreibbar
- i.f. immer Wasser (in allen Aggregatzuständen)
- Größen mit Index W ("Wasser")

Gemisch wird hier ideal angenommen

gute Näherung für feuchte Luft bei nicht zu großen Drücken

- **Dampfdruckkurve** $p_S(T)$:

Grenzkurve zwischen flüssiger und gasförmiger Phase



auch als **Sättigungskurve** bezeichnet

beschreibt maximalen Anteil von Dampf

- Dampfanteil steigt
- → Partialdruck p_W^* steigt
- → Sättigungsdruck wird überschritten
- → Wasser kondensiert

beschreibt **Taupunkt**

- Temperatur sinkt
- → zugehöriger Sättigungsdruck p_S wird kleiner
- → Partialdruck überschreitet p_S
- → Wasser kondensiert (Taupunkt)
- → Nebelbildung

endet am Tripelpunkt

- bei Wasser etwa bei 0 °C
- darunter Eisbildung statt Nebelbildung

Dampfdruck-Tabelle für Wasserdampf

- Dampf-Sättigungszustände:

ungesättigter Zustand

- $p_W^* < p_S$

gesättigter Zustand

- $p_W^* = p_S$
- Kondensat vorhanden

übersättigter Zustand

- $p_W^* > p_S$
- instabil
- möglich bei Fehlen von Kondensationskeimen

- **relative Feuchte φ**

Verhältnis von Dampfdruck zu Sättigungsdruck

$$\varphi := p_W^* / p_S$$

meistens in Prozent angegeben

relativ gut messbar (Hygrometer)

- **Feuchtegehalt x**

Verhältnis von Wassermasse zu (trockener) Luftmasse

$$x := m_W / m_L$$

Bezug auf trockene Luft nützlich z.B. in der Klimatechnik

bestimmbar aus p , $p_S(T)$ und φ mittels

$$\begin{aligned} x &= \frac{m_W}{m_L} \\ &= \frac{M_W n_W}{M_L n_L} \\ &= \frac{M_W y_W}{M_L y_L} \\ &= \frac{M_W p_W^*}{M_L (p - p_W^*)} \\ &= \frac{M_W \varphi p_S}{M_L (p - \varphi p_S)} \\ &\approx 0.6219 \frac{\varphi p_S}{p - \varphi p_S} \end{aligned}$$

bei gesättigtem Zustand ($\varphi = 1$)

$$x_S = 0.6219 \frac{p_S}{p - p_S}$$

- **Dichte ρ feuchter Luft:**

wegen Gasgleichung gilt

$$\frac{m}{V} = \frac{p}{R_i T}$$

speziell für Komponente k eines Gemischs

$$\frac{p_k^*}{R_{i,k} T} = \frac{m_k}{V}$$

mit Partialdruck p_k^* . Damit

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{m_L}{V} + \frac{m_W}{V} \\
&= \frac{p_L^*}{R_L T} + \frac{p_W^*}{R_W T} \\
&= \frac{1}{RT} (p_L^* M_L + p_W^* M_W) \\
&= \frac{M_L}{RT} \left(p_L^* + \frac{M_W}{M_L} p_W^* \right) \\
&= \frac{M_L}{RT} \left(p - \varphi p_S + \frac{M_W}{M_L} \varphi p_S \right) \\
&= \frac{p M_L}{RT} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi \frac{p_S}{p} \right) \\
&= \rho_L \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi \frac{p_S}{p} \right) \\
&\approx \rho_L \left(1 - 0.3781 \varphi \frac{p_S}{p} \right)
\end{aligned}$$

feuchte Luft ist (spezifisch) leichter als trockene Luft

- Spezifisches Volumen:

normale Definition für das Luft-Wasser-Gemisch

$$v = \frac{V}{m_L + m_W} = \frac{1}{\rho}$$

bezogen auf trockene Luft (analog zu x)

$$v_{1+x} = \frac{V}{m_L}$$

Zusammenhang beider Größen

$$\begin{aligned}
v_{1+x} &= \frac{m_L + m_W}{m_L} \frac{V}{m_L + m_W} \\
&= (1+x)v
\end{aligned}$$

- Aufgaben:

Aufgabe 3

- Spezifische Enthalpien:

für die Komponenten

$$h_W = H_W/m_W$$

$$h_L = H_L/m_L$$

für das Gemisch

$$h = \frac{H}{m} = \frac{H_L + H_W}{m_L + m_W}$$

bezogen auf trockene Luft

$$h_{1+x} = \frac{H}{m_L} = h_L + x h_W$$

- Berechnung der spezifischen Enthalpie:

- allgemein für ideales Gas

$$dh = c_p dT$$

im praktisch relevanten Bereich c_p nahezu temperaturunabhängig (für Luft, Dampf, Wasser, Eis)

- für trockene Luft

Bezugspunkt $h_L(t = 0^\circ\text{C}) = 0 \rightarrow$

$$h_L = c_{p,L} t$$

- Bezugspunkt bei Wasser

siedendes Wasser am Tripelpunkt ($\approx 0^\circ\text{C}$)

$$h_W(t = 0^\circ\text{C}) = 0$$

Enthalpie für Wasserdampf

$$h_D = r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t$$

mit Verdampfungsenthalpie r

bei Kondensatbildung ($x > x_S$)

Anteil $x - x_S$

flüssiges Wasser $h_W = c_{p,W} t$

bei Kondensatbildung unterhalb 0°C

Anteil $x - x_S$ Eis

$$h_E = -\sigma_{0^\circ\text{C}} + c_{p,E} t$$

mit Schmelzenthalpie σ

- zusammengefasst

$$h_{1+x} = c_{p,L} t + x(r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t) \quad \text{bei } \varphi < 1 \text{ bzw. } x < x_S$$

$$h_{1+x} = c_{p,L} t + x_S(r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t) + (x - x_S)c_{p,W} t \quad \text{bei } x \geq x_S, t \geq 0^\circ\text{C}$$

$$h_{1+x} = c_{p,L} t + x_S(r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t) + (x - x_S)(-\sigma_{0^\circ\text{C}} + c_{p,E} t) \quad \text{bei } x \geq x_S, t < 0^\circ\text{C}$$

- benötigte Stoffgrößen

Stoff	c_p [kJ/(kg K)]
Luft	1.004
Dampf	1.86
Wasser	4.19
Eis	2.04

$$r_{0^\circ\text{C}} = 2500.9 \text{ kJ/kg}$$

$$\sigma_{0^\circ\text{C}} = 333.5 \text{ kJ/kg}$$

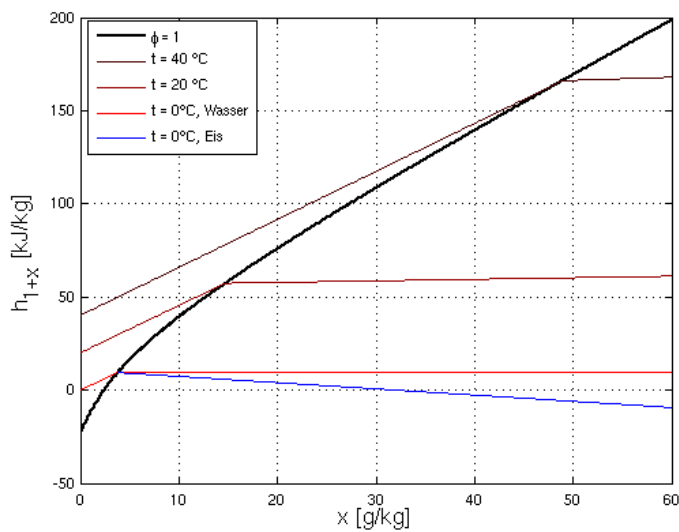
- h,x-Diagramm von Mollier:

Darstellung isobarer Zustandsänderungen von feuchter Luft

Enthalpie h_{1+x} über Feuchtegehalt x

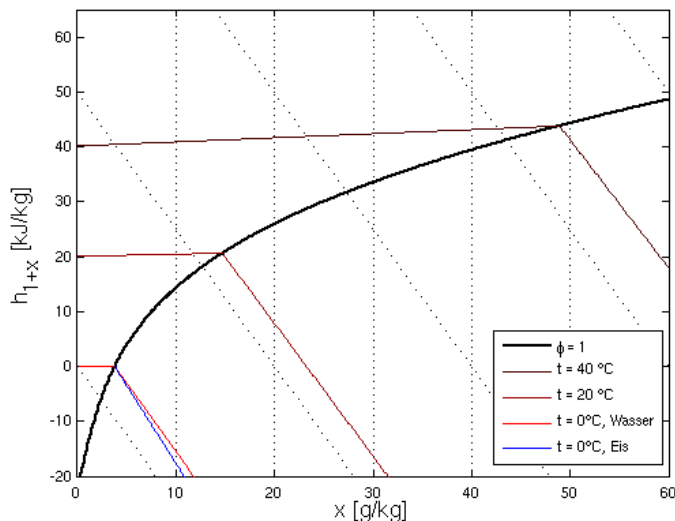
h stückweise lineare Funktion von x (bei Isothermen)

Knick jeweils bei $\phi = 1$ (Sättigungslinie)



zur besseren Darstellung schiefwinkliges Diagramm

- x-Achse nach unten gedreht,
- Winkel so, dass $t=0^\circ\text{C}$ horizontal für $\phi < 1$
- Parallelen zur x-Achse = Linien mit konstantem h_{1+x}



Sättigungslinie vom Druck abhängig → Diagramm nur für einen Druck gültig

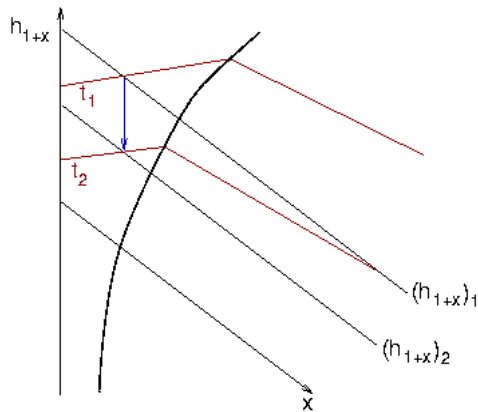
genauer Diagramm im [Anhang](#)

- Abkühlung feuchter Luft ohne Kondensation:

betrachte isobaren Abkühlung, ohne Wasserzu- oder Abfuhr

keine Kondensation $\rightarrow x = \text{const.}$

Enthalpiedifferenz direkt aus h-x-Diagramm



abzuführender Wärmestrom

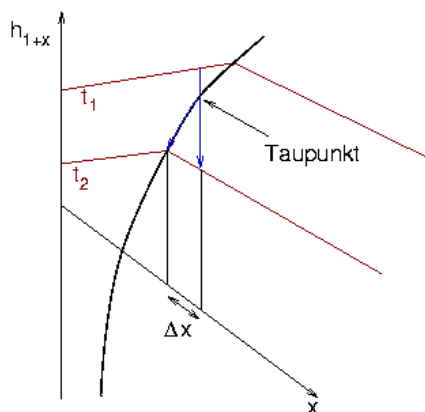
$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_L [(h_{1+x})_2 - (h_{1+x})_1]$$

- Abkühlung feuchter Luft mit Kondensation:

kondensierender Wasseranteil

$$\Delta x = (x_S)_2 - x_1$$

direkt aus h-x-Diagramm



Gesamtmenge Wasser bleibt natürlich gleich

- Adiabatisches Mischen von feuchter Luft:

betrachten adiabatische, isobare Mischung zweier Stoffströme $\dot{m}_{L,1}$ und $\dot{m}_{L,2}$

jeweils mit Zustandsgrößen $x_1, (h_{1+x})_1$ bzw. $x_2, (h_{1+x})_2$

Mischungszustand 3 mit $\dot{m}_{L,3}, x_3, (h_{1+x})_3$

Massenbilanz für (trockene) Luft \rightarrow

$$\dot{m}_{L,3} = \dot{m}_{L,1} + \dot{m}_{L,2}$$

Massenbilanz für Wasser

$$x_3 \dot{m}_{L,3} = x_1 \dot{m}_{L,1} + x_2 \dot{m}_{L,2}$$

Elimination von $\dot{m}_{L,3} \rightarrow$

$$\frac{\dot{m}_{L,1}}{\dot{m}_{L,2}} = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_3}$$

leicht nach x_3 auflösbar

Wärmebilanz

$$(\dot{m}_{L,1} + \dot{m}_{L,2})(h_{1+x})_3 = \dot{m}_{L,1}(h_{1+x})_1 + \dot{m}_{L,2}(h_{1+x})_2$$

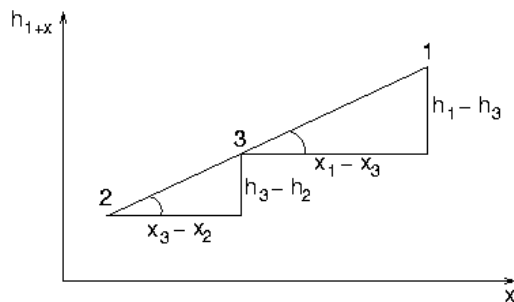
Umformen und x_3 -Beziehung einsetzen \rightarrow

$$\frac{\dot{m}_{L,1}}{\dot{m}_{L,2}} = \frac{(h_{1+x})_3 - (h_{1+x})_2}{(h_{1+x})_1 - (h_{1+x})_3} = \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_3}$$

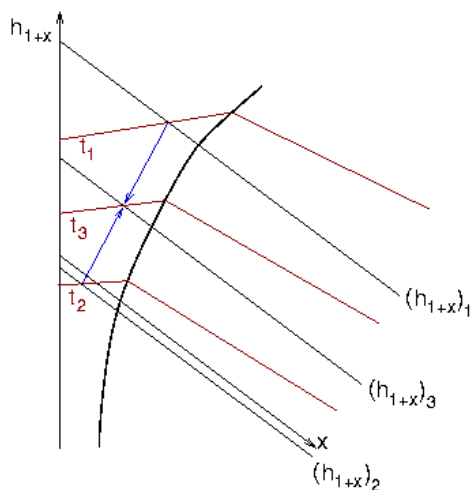
im h,x -Diagramm

- Punkt 3 liegt auf Strecke zwischen Punkt 1 und Punkt 2, da Strecken 2 \rightarrow 3 und 3 \rightarrow 1 gleiche Steigung haben:

$$\frac{(h_{1+x})_3 - (h_{1+x})_2}{x_3 - x_2} = \frac{(h_{1+x})_1 - (h_{1+x})_3}{x_1 - x_3}$$



- x_3 berechnen \rightarrow Punkt 3 graphisch bestimmen



- daraus $(h_{1+x})_3$ und t_3 ablesbar

• Aufgaben:

Aufgabe 4

Aufgabe 5

- Brennstoffe
- Verbrennungsrechnung
- Verbrennungsenthalpie

- Verbrennung:
 - Freisetzung chemischer Energie durch Reaktion mit Sauerstoff
 - Energie wird i.w. als Wärme frei
 - Herkunft des Sauerstoffs
 - Umgebungsluft
 - flüssig in Tanks (z.B. bei Raketen)
 - Oxidationsmittel (z.B. bei Sprengstoffen)
 - betrachten i.f. nur Luftsauerstoff
- Reaktionsteilnehmer:
 - Brennstoffe
 - i.w. Kohlenstoff, Wasserstoff, Schwefel (unerwünscht)
 - Brennluft
 - Sauerstoff (20.95 % Molanteil, 23.14 % Massenanteil)
 - Stickstoff (geringfügig beteiligt → Stickoxide)
 - Rest (Edelgase, etwas CO₂ und Wasser)
 - **Luftstickstoff** = Stickstoff + Rest
 - Verbrennungsgas
 - Reaktionsprodukte (CO₂, CO, H₂O, SO₂)
 - Luftstickstoff
 - Asche bzw. Schlacke
 - unverbrannte Feststoffanteile (Mineralien, Metalle)
- Brennstoffgruppen:
 - gasförmige Brennstoffe
 - chemische Zusammensetzung im Detail bekannt
 - beschrieben durch die Volumenanteile
 - Näherung idealer Gemische: Volumenanteile = Molanteile y_i
 - feste und flüssige Brennstoffe
 - meistens Gemisch vieler komplizierter Verbindungen
 - statt komplexer Chemie nur pauschale Elementanalyse
 - angegeben als Massenanteile
- Reaktionsgleichungen:
 - in der Regel komplexe chemische Prozesse
 - vollständige Oxidationsprozesse (freiwerdende Energie bezogen auf ein Mol)
 - $C + O_2 \rightarrow CO_2 + 393.5 \text{ kJ}$
 - $H_2 + 1/2 O_2 \rightarrow H_2O(\text{flüssig}) + 285.8 \text{ kJ}$
 - $S + O_2 \rightarrow SO_2 + 296.9 \text{ kJ}$
 - $CH_4 + 2 O_2 \rightarrow CO_2 + 2 H_2O$
 - unvollständige Prozesse
 - brennbare Stoffe bleiben über
 - Ursache z.B. Sauerstoffmangel oder schlechte Durchmischung
 - Beispiel: $C + 1/2 O_2 \rightarrow CO + 110.5 \text{ kJ}$

- Aufgabenstellung:

Bestimmung des Sauerstoff- und Luftbedarfs einer Verbrennung

Bestimmung der Menge und Zusammensetzung des Verbrennungsgases

- Mengenangaben:

am einfachsten in Molanteilen (wegen Reaktionsgleichungen)

bei festen und flüssigen Brennstoffen Umrechnung von Massenanteil μ_i der Komponente i in kmol/kg Brennstoff

mit Index B für gesamten Brennstoff also

$$\zeta_i := \frac{n_i}{m_B} = \frac{m_i}{M_i m_B} = \frac{\mu_i}{M_i}$$

einfache Näherungen für Molmassen meist hinreichend genau

z.B. für Kohlenstoffanteil

$$\zeta_C = \frac{\mu_C}{M_C} = \frac{\mu_C}{12} \frac{\text{kmol C}}{\text{kg B}}$$

- Sauerstoffbedarf o_{\min} :

benötigter Luftsauerstoff O_2 / kg Brennstoff

Faktoren aus den Reaktionsgleichungen

- 1 mol O_2 / 1 mol C
- 1/4 mol O_2 / 1 mol H
- 1 mol O_2 / 1 mol S

im Brennstoff enthaltenen Sauerstoff vom Bedarf abziehen

- -1/2 mol O_2 / 1 mol O

zusammen also

$$o_{\min} = \left(\frac{\mu_C}{12} + \frac{\mu_H}{4} + \frac{\mu_S}{32} - \frac{\mu_O}{32} \right) \frac{\text{kmol } O_2}{\text{kg B}}$$

- Luftbedarf l_{\min} :

benötigte Luft / kg Brennstoff

bei trockener Luft durch Sauerstoffanteil y_O der Luft

$$l_{\min} = \frac{o_{\min}}{y_O} = \frac{o_{\min}}{0.21} \frac{\text{kmol L}}{\text{kg B}}$$

molarer Feuchtegehalt w_l der Luft bei Luftfeuchtigkeit φ

$$w_l = \frac{p_d^*}{p_l^*} = \frac{p_d^*}{p - p_d^*} = \frac{\varphi p_s}{p - \varphi p_s}$$

feuchte Mindestluftmenge daher

$$l_{\min,f} = (1 + w_l) l_{\min}$$

in der Praxis für Verbrennung mehr Luft nötig

- $l = \lambda l_{\min}$
- Luftverhältnis $\lambda > 1$
- typische Werte bei 1.1 (Ölbrenner) bis 1.6 (Kohle)
- Luftüberschuss := $\lambda - 1$

- Verbrennungsgasmenge:

Anteile v_i für Abgaskomponenten in kmol/kg Brennstoff

bei CO_2 und SO_2 einfach aus Brennstoff

$$v_{\text{CO}_2} = \frac{\mu_C}{12} \frac{\text{kmol CO}_2}{\text{kg B}}$$

$$v_{\text{SO}_2} = \frac{\mu_S}{32} \frac{\text{kmol SO}_2}{\text{kg B}}$$

Sauerstoff aus zugeführter Luft

$$v_{\text{O}_2} = 0.21(\lambda - 1)l_{\text{min}} \frac{\text{kmol O}_2}{\text{kg B}}$$

Stickstoff aus Brennstoff und Luft

$$v_{\text{N}_2} = \frac{\mu_N}{28} + 0.79\lambda l_{\text{min}} \frac{\text{kmol N}_2}{\text{kg B}}$$

Wasser aus Wasser- und Wasserstoffgehalt des Brennstoffs und aus Luftfeuchtigkeit der Zuluft

$$v_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\mu_H}{2} + \frac{\mu_W}{18} + w_l \lambda l_{\text{min}} \frac{\text{kmol H}_2\text{O}}{\text{kg B}}$$

gesamte trockene Verbrennungsgasmenge (ohne Wasser)

$$v_t = v_{\text{CO}_2} + v_{\text{SO}_2} + v_{\text{N}_2} + v_{\text{O}_2}$$

(feuchte) Verbrennungsgasmenge

$$v_f = v_t + v_{\text{H}_2\text{O}}$$

Mindestverbrennungsgasmenge: Wert für $\lambda = 1$

Verbrennungsenthalpie

- Freiwerdende Energie bei Verbrennung:

vollständige Verbrennung angenommen

spezifisch (bezogen auf Masse des Brennstoffs)

abhängig von

- Brennstoff
- Temperaturen von Brennstoff, Zuluft und Verbrennungsgas
- Zustand der Verbrennungsprodukte (z.B. gasförmig oder flüssig)
- Prozessführung (isobar oder isochor)

durch verschiedene Normen beschrieben

- Heizwert und Brennwert:

Heizwert H_u (nach DIN 5499)

- bei $t_0 = 25 \text{ °C}$ für Brennstoff, Brennluft und Abgas
- Wasser dampfförmig
- CO_2 und SO_2 gasförmig
- keine Stickoxide

Brennwert H_o

- wie Heizwert, aber Wasser flüssig

Zusammenhang

$$H_o = H_u + \frac{m_{\text{H}_2\text{O im Abgas}}}{m_B} r$$

Werte tabelliert

Näherungsformel für feste und flüssige Brennstoffe

$$H_u = (34.0\mu_c + 101.6\mu_h + 19.1\mu_s + 6.3\mu_n - 9.8\mu_o - 2.5\mu_w) \frac{\text{MJ}}{\text{kg B}}$$

Näherungsformel für gasförmige Brennstoffe

$$H_u = (283y_{\text{CO}} + 242y_{\text{H}_2} + 803y_{\text{CH}_4} + 1429y_{\text{C}_2\text{H}_6} + 2043y_{\text{C}_3\text{H}_8} + \dots) \frac{\text{MJ}}{\text{kmol B}}$$

- Abhängigkeit von der Temperatur:

Temperaturen t_L und t_V von Luft und Abgas

Temperatur t_B des Brennstoffs

damit auf m_B bezogene Enthalpie h' vor Verbrennung

$$\begin{aligned} h' &= \frac{m_L}{m_B} h_L + h_B \\ &= M_L \frac{n_L}{m_B} h_L + h_B \\ &= M_L l \bar{c}_{p,L} |_{0^\circ\text{C}}^{t_L} + H_u + \bar{c}_{p,B} |_{0^\circ\text{C}}^{t_B} \end{aligned}$$

(Bezugspunkt: $h_L = h_B = 0$ bei 0 °C)

Enthalpie h'' nach der Verbrennung

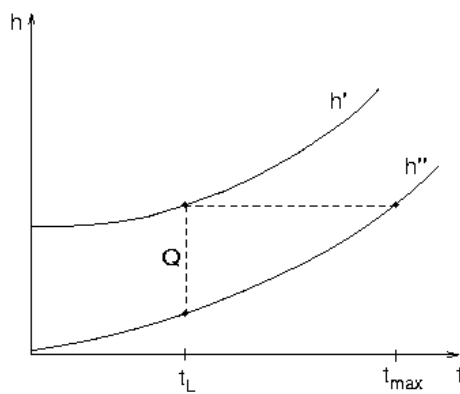
$$\begin{aligned} h'' &= \frac{m_V}{m_B} h_V \\ &= M_V v_f \bar{c}_{p,V} |_{0^\circ\text{C}}^{t_V} \end{aligned}$$

(Bezugspunkt: $h_V = 0$ bei 0 °C)

- Freierwirdende Wärme:

Wärme pro Brennstoffmasse aus Enthalpiedifferenz

$$|Q|/m_B = h' - h''$$



wenn t_L kleiner als Taupunkt \rightarrow

- Wasser kondensiert
- zusätzliche Verdampfungsenthalpie r wird frei

- **Adiabate Verbrennungstemperatur t_{max} :**

keine Wärmeabfuhr \rightarrow maximale Temperatur des Verbrennungsgases

t_{max} ergibt sich aus Enthalpiebilanz

$$h'(t_L) = h''(t_{max})$$

im Bild durch waagerechte Linie

genauer: Dissipation der Moleküle berücksichtigen

$\rightarrow t_{max}$ ist kleiner

- Aufgaben:

Aufgabe 6

Aufgabe 7

- 🔦 Übersicht
- 🔦 Wärmeleitung
- 🔦 Wärmeströmung
- 🔦 Wärmestrahlung

- Räumliche Temperaturunterschiede:

Wärme fließt vom warmen zum kalten Objekt

Temperatur ändert sich zeitlich

ohne äußere Wärmezufuhr Temperaturengleich

- Mechanismen des Wärmetransports:

Wärmeleitung

- ruhende Materie
- molekulare Wechselwirkung benachbarter Teilchen
- Beispiel: durch eine Hauswand

Wärmeströmung (**Konvektion**)

- bewegte Materie (**Fluide** = Gase oder Flüssigkeiten)
- Wärme mit Strömung transportiert
- erzwungene Strömung: z.B. in Heizungsrohren
- freie Strömung: z.B. aufsteigende Luft am Heizkörper

Wärmestrahlung

- Transport durch elektromagnetische Strahlung
- kein Medium erforderlich
- Beispiel: Sonneneinstrahlung auf die Erde

- Gesetz von Fourier:

Ursache: räumlicher Temperaturgradient dT/dx

Wirkung: Wärmestromdichte \dot{q}

$$\dot{q} = \frac{\text{Wärmeenergie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}}$$

Beobachtung von Fourier

- Wärmestromdichte und Temperaturgradient sind proportional

$$\dot{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

Wärmeleitfähigkeit λ

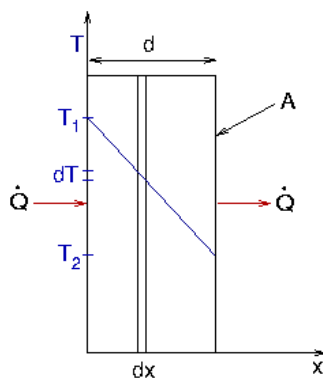
- Materialkonstante, tabelliert
- Einheit $W/(K \cdot m)$
- genauer: abhängig von p und auch T

Vorzeichen

- Wärme fließt entgegen dem Temperaturgradienten (von warm nach kalt)

- Wärmeleitung durch ebene Wand:

homogene Wand der Fläche A und Dicke d



Temperaturverteilung zeitlich konstant

Temperaturen T_1 , T_2 an linker und rechter Seite

durch Wand hindurchtretender Wärmestrom

$$\dot{Q} = A \dot{q}$$

an jedem Wandquerschnitt x konstant

Gesetz von Fourier \rightarrow

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} = \text{const.}$$

Lösung: T nimmt linear mit x ab

$$T(x) = -\frac{\dot{Q}}{\lambda A} x + C$$

Randbedingung $T(0) = T_1 \Rightarrow C = T_1$

Randbedingung $T(d) = T_2 \Rightarrow$

$$T(x) = -\frac{T_1 - T_2}{d} x + T_1$$

Vergleich liefert Wärmestrom

$$\dot{Q} = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{d}$$

- Gekrümmte Wände:

geringe Krümmung → näherungsweise eben rechnen

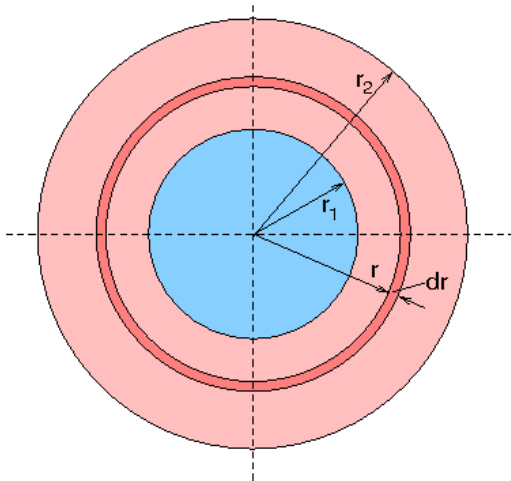
Zylinder- oder Kugeloberfläche

- aus Differentialgleichung in Zylinder- oder Kugelkoordinaten
- einfacher aus Konstanz des Wärmestroms durch gesamte Oberfläche im Abstand r

$$\dot{Q} = -\lambda A(r) \frac{dT}{dr}$$

- Wärmestrom durch ein Rohr:

Zylinderwand mit Innenradius r_1 , Außenradius r_2 , Länge l



mit Oberfläche $A(r) = 2 \pi r l$ wird

$$\dot{Q} = -\lambda 2\pi l r \frac{dT}{dr}$$

mit $\dot{Q} = \text{const.}$ integrieren von r_1 bis $r \Rightarrow$

$$T(r) = T_1 - \frac{\dot{Q}}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r}{r_1}$$

Wärmestrom aus Randbedingung $T(r_2) = T_2 \Rightarrow$

$$\dot{Q} = 2\pi l \lambda \frac{T_1 - T_2}{\ln(r_2/r_1)}$$

analoge Rechnung für Kugelwand

- **Wärmewiderstand:**

Analogie zum elektrischen Stromkreis

- Potenzialdifferenz $U \triangleq$ Temperaturdifferenz $T_1 - T_2$
- Strom $I \triangleq$ Wärmestrom \dot{Q}
- Ohmsches Gesetz $R = U / I \triangleq R_{\text{th}} = (T_1 - T_2) / \dot{Q}$

daher Definition des Wärmewiderstands

$$R_{\text{th}} = (T_1 - T_2) / \dot{Q}$$

bei ebener Wand

$$R_{\text{th}} = d / (\lambda A)$$

bei Zylinderwand

$$R_{th} = \frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi l\lambda}$$

- Mehrschichtige Wand:

Wärmestrom durch Wand aus Schichten mit unterschiedlichem λ



Thermischer Widerstand der Wand als "Reihenschaltung" der Einzelwiderstände

$$R_{th} = \sum_i R_{th,i}$$

daraus gesamter Wärmestrom durch die Wand gemäß

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2)/R_{th}$$

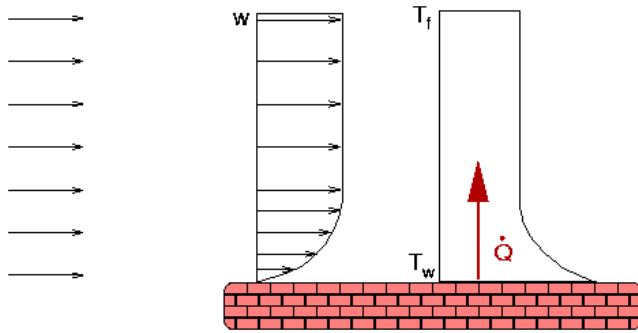
- Aufgaben:

Aufgabe 8

Aufgabe 9

- Konvektiver Wärmeübergang:

Wärmeaustausch zwischen strömendem Fluid und fester Wand



Geschwindigkeit des Fluids sinkt von Außengeschwindigkeit w in dünner Schicht bis 0 an der Wand (**Haftbedingung**)

Temperatur im Fluid ändert sich von T_f bis zu T_w an der Wand

Newtonsches Abkühlungsgesetz (analog zum Gesetz von Fourier)

$$\dot{q} = \alpha (T_w - T_f)$$

Wärmeübergangskoeffizient α hängt ab von

- Stoffeigenschaften von Wand und Fluid
- Wandgeometrie
- Strömungsverhältnissen

direkte Berechnung von α sehr schwierig

- Ähnlichkeitsgesetze:

Eliminieren der Einheiten aus Grundgleichungen und Einführung einheitenloser Kennzahlen

gleiche Kennzahlen \rightarrow gleiche Lösungen

erlaubt Übertragbarkeit von Ergebnissen auf ähnliche Situationen, z.B.

- andere Abmessungen (bei gleicher Geometrie)
- andere Strömungsgeschwindigkeit
- andere Stoffgrößen (z.B. Wärmeleitfähigkeit)

empirisch oder theoretisch bestimmte Beziehungen mit Kennzahlen ausdrücken

grundlegendes Vorgehen vor allem bei Strömungen

- Wichtige Kennzahlen:

Nußelt-Zahl

- $Nu := \alpha L / \lambda$
- L : charakteristische Länge
- hier die gesuchte Größe (liefert α !)

Reynolds-Zahl

- $Re := w L / \nu$
- ν : kinematische Viskosität ("Zähigkeit" des Fluids)
- wichtigste Kennzahl für Strömungen
- charakterisiert Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung
- wichtig bei erzwungener Konvektion

Prandtl-Zahl

- $Pr := \nu / a$
- $a = \lambda / (\rho c_p)$: **Temperaturleitfähigkeit**

Rayleigh-Zahl

- $Ra := g \gamma L^3 \Delta T / (\nu \alpha)$
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$: Erdbeschleunigung
- γ : Volumen-Ausdehnungskoeffizient
- wichtig bei freier Konvektion

• Beziehungen zwischen Kennzahlen:

bei erzwungener Konvektion

- $Nu = f(Re, Pr)$

bei freier Konvektion

- $Nu = f(Ra, Pr)$

f abhängig vom konkreten Problem

für viele praktische Fälle tabelliert

aus Messungen oder Näherungsrechnungen gewonnen

häufig nur für bestimmte Bereiche gültig (kleines Re, Intervall für Pr, ...)

durch Messungen immer wieder aktualisiert, ggf. konkrete Formeln aus aktueller Literatur verwenden (z.B. neueste Auflage von [8])

• Flüssigkeitsdurchströmtes Rohr:

Bezugsgrößen zur Berechnung der Kennzahlen

- mittlere Strömungsgeschwindigkeit w im Rohr
- Mittelwert T_f aus Eintritts- und Austrittstemperatur
- Wert für λ bei $(T_f + T_w)/2$ nehmen
- Rohrdurchmesser L

weitere Größen

- Rohrlänge h
- Prandtl-Zahl Pr_f, Pr_w der Flüssigkeit bei T_f, T_w

Beziehungen

- für $Re \leq 2300$ und $Re Pr_f L/h = 0.1 \dots 10^4$

$$Nu = \sqrt[3]{49 + 4.17 Re Pr_f \frac{L}{h} \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.11}}$$

- für $Re = 2300 \dots 10^6$ und $Pr_f = 0.5 \dots 1.5$

$$Nu = 0.0214 (Re^{0.8} - 100) Pr_f^{0.4} \left[1 + \left(\frac{L}{h} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.11}$$

- für $Re = 2300 \dots 10^6$ und $Pr_f = 1.5 \dots 500$

$$Nu = 0.012 (Re^{0.87} - 280) Pr_f^{0.4} \left[1 + \left(\frac{L}{h} \right)^{2/3} \right] \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0.11}$$

• Freie Strömung an senkrechter Wand:

Bezugsgrößen zur Berechnung der Kennzahlen

- Wandhöhe L
- γ bei T_f
- Stoffwerte bei $T = (T_f + T_w)/2$

Beziehung für $Pr \geq 0.001, Ra = 0.1 \dots 10^{12}, Nu > 2$

$$f_1 := \left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-16/9}$$

$$Nu = (0.825 + 0.387(Ra f_1)^{1/6})^2$$

- Allgemeine Eigenschaften:

Nu (und damit α) wächst mit Pr

Pr-Zahlen bei Flüssigkeiten größer als bei Gasen → besserer Wärmeübergang bei Flüssigkeiten

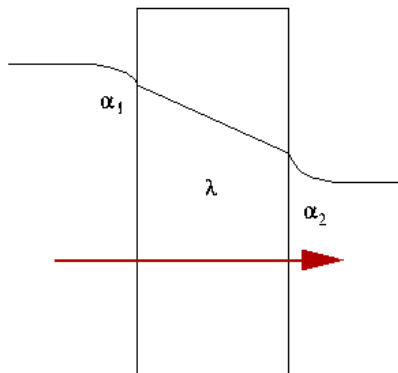
Nu wächst mit Re

besserer Wärmeübergang bei höherer Geschwindigkeit (Turbulenz!)

aber: größere Reibung → höhere Druckverluste

- Wärmedurchgang:

Wärme geht von Fluid durch eine Wand auf anderes Fluid



konvektiver Temperaturabfall an Fluid-Wand-Schicht wirkt wie thermischer Widerstand

$$R_K = 1/(\alpha A)$$

liegt "in Reihe" zu den thermischen Widerständen der Wandschichten

damit genauere Berechnung des Wärmestroms durch eine Wand



- Aufgaben:

Aufgabe 10

Aufgabe 11

Wärmestrahlung



- Mechanismus der Wärmestrahlung:

innere Energie bei Temperatur T

Bewegungs-, Rotations- und Vibrationszustände der Moleküle

Anregung z.B. durch Stöße

- → spontane Emission
- → Abstrahlung von der Oberfläche

Wellenlängen i.w. im Infrarot- und optischen Bereich

an der Oberfläche abgestrahlte Energie pro Zeit, Oberfläche und Wellenlängenbereich

$$I(\lambda, T) = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche} \cdot \text{Wellenlängenbereich}}$$

gesamte abgestrahlte Energiestromdichte

$$\dot{q}(T) = \int_0^{\infty} I(\lambda, T) d\lambda$$

- Emission und Absorption:

auf Oberfläche fallende Energie wird absorbiert, reflektiert oder durchgelassen

Anteile a, r, d mit

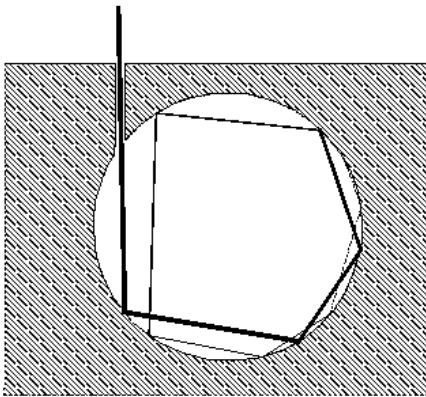
$$a + r + d = 1$$

i.a. von der Wellenlänge abhängig $a = a(\lambda)$ etc.

- Schwarzer Körper:

alle einfallende Strahlung wird absorbiert ($a = 1$)

Modell: kleine Öffnung vor großem absorbierenden Hohlraum



näherungsweise bei matt-schwarzen Oberflächen

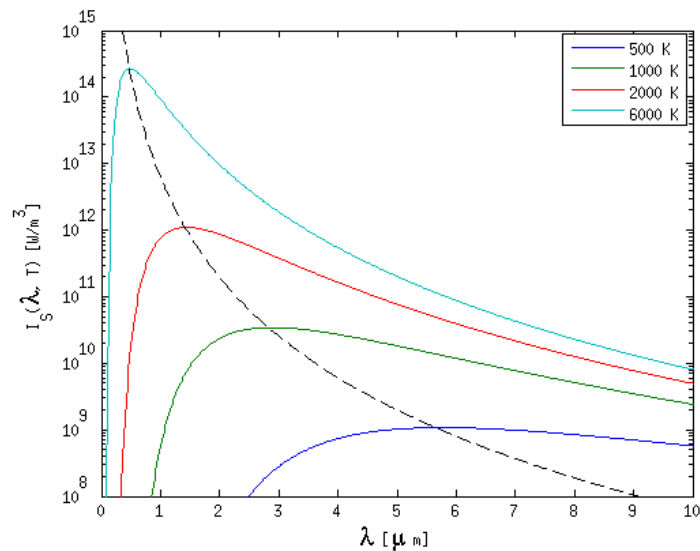
Idealvorstellung des Wärmestrahlers

- Strahlungsintensität des Schwarzen Körpers:

gegeben durch **Plancksches Strahlungsgesetz**

$$I_S(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)^{-1}$$

graphisch



Erinnerung an Quantenmechanik

$$\frac{hc}{\lambda k_B T} = \frac{hf}{k_B T} = \frac{E_{\text{photon}}}{k_B T}$$

Maximum der Kurve bei

$$\lambda_{\text{max}} = b / T \text{ (Wiensches Verschiebungsgesetz)}$$

$$b = 2898 \mu\text{m K}$$

Konsequenzen

- bei niedrigen Temperaturen Strahlung im IR-Bereich
- höhere Temperaturen → rotglühend
- ganz heiss → auch kleinere Wellenlängen → weissglühend

gesamter abgestrahlter Wärmestrom

$$\dot{q}_S(T) = \sigma T^4 \text{ (Stefan-Boltzmann-Gesetz)}$$

$$\sigma = 5.670 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4)$$

• Reale Körper:

Emission I niedriger als beim Schwarzen Körper

Emissionsvermögen ϵ_λ bei Wellenlänge λ

$$\epsilon_\lambda(\lambda, T) := \frac{I(\lambda, T)}{I_S(\lambda, T)}$$

Kirchhoffsches Gesetz

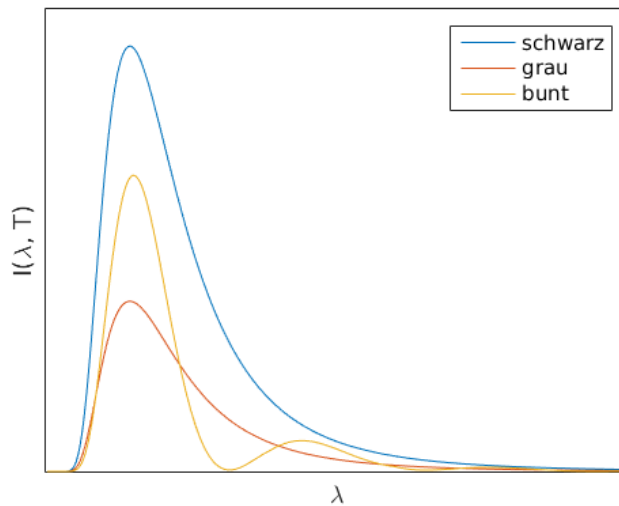
$$a(\lambda) = \epsilon_\lambda(\lambda)$$

grauer Körper

- ϵ nicht von λ abhängig
- alle Spektralbereiche werden gleichmäßig absorbiert

beliebiger Körper

- frequenzabhängige Absorption
- Rest (reflektierte Strahlung) gibt Oberflächenfarbe



mittlerer Emissionsgrad

$$\begin{aligned}\epsilon(T) &:= \frac{\dot{q}(T)}{\dot{q}_S(T)} \\ &= \frac{\int_0^\infty \epsilon_\lambda(\lambda, T) I_S(\lambda, T) d\lambda}{\sigma T^4}\end{aligned}$$

einige Werte

Oberfläche	T [°C]	ε
schwarzer matter Lack	80	0.970
Ziegelstein	20	0.93
Buchenholz	70	0.935
Eisen, stark verrostet	19	0.685
Eisen, blank, geschmiegelt	20	0.24
Kupfer, poliert	20	0.030

- Wärmeaustausch zwischen Oberflächen:

Zwei Körper mit Temperaturen T_1 , T_2 bestrahlen sich gegenseitig

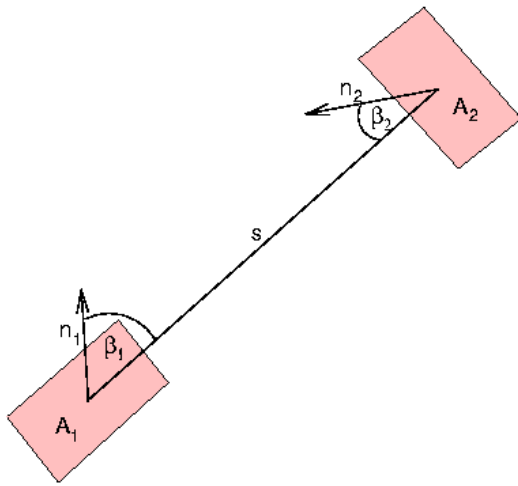
Netto-Wärmestrom (von 1 zu 2)

$$\dot{Q}_{12} = C_{12} A_1 (T_1^4 - T_2^4)$$

Faktor C_{12} (**Strahlungsaustauschzahl**) berücksichtigt Geometrie und Emissionsvermögen der Körper

$$C_{12} = \sigma \epsilon_1 \epsilon_2 \frac{\varphi_{12}}{1 - (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)\varphi_{12}^2} \frac{A_1}{A_2}$$

Einstrahlzahl φ_{12} durch Geometrie gegeben



$$\varphi_{12} = \frac{1}{\pi A_1} \int_{A_1} \int_{A_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2}{s^2} dA_2 dA_1$$

anschaulich:

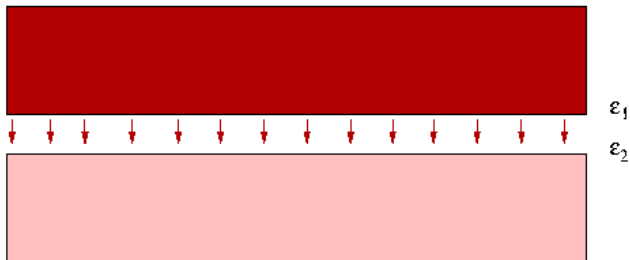
- Sendefläche erscheint um Faktor $\cos \beta_1$ kleiner
- Empfängerfläche erscheint um Faktor $\cos \beta_2$ kleiner

• Berechnung der Strahlungsaustauschzahl:

i.a. aufwändig (Doppelintegral!)

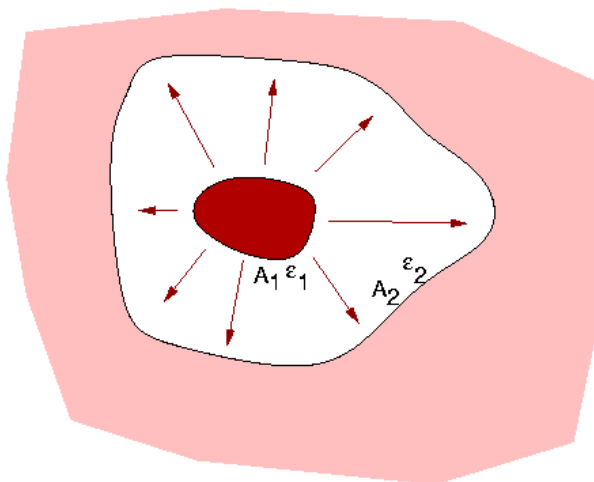
für einige Anwendungsfälle tabelliert

bei dicht benachbarten parallelen Wänden



$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1}$$

bei vollständig umschlossener Fläche



$$C_{12} = \frac{\sigma}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}$$

Grenzfall $A_2 \gg A_1 \rightarrow$

$$C_{12} = \sigma \varepsilon_1$$

Abstrahlung von A_1 in den freien Raum

- Aufgaben:

Aufgabe 12

Aufgabe 13

Aufgaben



- 🔦 Aufgabe 1
- 🔦 Aufgabe 2
- 🔦 Aufgabe 3
- 🔦 Aufgabe 4
- 🔦 Aufgabe 5
- 🔦 Aufgabe 6
- 🔦 Aufgabe 7
- 🔦 Aufgabe 8
- 🔦 Aufgabe 9
- 🔦 Aufgabe 10
- 🔦 Aufgabe 11
- 🔦 Aufgabe 12
- 🔦 Aufgabe 13

Aufgabe 1



- Das Abgas eines Verbrennungsmotors enthält 78.4 % Stickstoff, 6.8 % Sauerstoff, 12.7 % Kohlendioxid und 2.1 % Kohlenmonoxid, jeweils in Massenanteilen.
 - a. Welche Dichte hat das Abgas bei einer Temperatur von 250 °C und einem Druck von 0.953 bar?
 - b. Wie groß ist seine Molmasse ?
- Lösung

Aufgabe 2



- Ein Druckbehälter enthält ein Gemisch aus 0.368 kg Stickstoff und 0.514 kg Kohlendioxid bei 0 °C und einem Druck von 15.4 bar. Durch elektrische Heizung steigt die Temperatur auf 800 °C.
 - a. Wie groß sind die Massen- und Molanteile der Komponenten ?
 - b. Welche Molmasse und welche Gaskonstante hat das Gemisch ?
 - c. Welches Volumen hat der Behälter ?
 - d. Wie groß ist der Druck nach der Erwärmung ?
 - e. Welche Wärme wurde dem Gemisch zugeführt ?
- Lösung

Aufgabe 3



- In einem Trockner werden 10 t/h Getreide getrocknet, wobei ein verdunstender Wasserdampfstrom von 500 kg/h durch Luft abzuführen ist. Dazu wird Außenluft mit 15 °C, 70 % relativer Luftfeuchte und einem Druck von $p = 1.013$ bar angesaugt und in einem Lufterhitzer auf 80 °C erwärmt. Die Abluft verlässt den Trockner mit 29 °C und 90 % relativer Luftfeuchtigkeit bei gleichem Druck. Wie groß ist der Volumenstrom der anzusaugenden (feuchten) Luft?
- Lösung

Aufgabe 4



- Ein Außenluftstrom von 7.23 kg (trockene) Luft/s, $\varphi_1 = 80\%$ und $p = 1.013$ bar soll (isobar) von 5 °C auf 20 °C erwärmt werden.
 - a. Wie groß ist die relative Luftfeuchte der erwärmten Luft?
 - b. Wie groß sind die spezifischen Enthalpien h_{1+x} für beide Zustände?
 - c. Welche Wärmeleistung wird benötigt?
- Lösen Sie die Aufgabe zunächst durch Ablesen am h,x -Diagramm, dann durch explizite Rechnung.
- Lösung

Aufgabe 5



- In einer Mischkammer mischen sich 40 Prozent Außenluft von 20 °C und 40 % relativer Luftfeuchtigkeit mit 60 Prozent Umluft von 50 °C und 80 % Luftfeuchtigkeit isobar (bei Normdruck, Verhältnis bezogen auf Massen trockener Luft). Bestimmen Sie für die Mischluft die Temperatur, relative Feuchte, spez. Enthalpie h_{1+x} und Feuchtegehalt
 - a. mit dem h,x-Diagramm,
 - b. rechnerisch mit linearer Interpolation,
 - c. mit Matlab und WATER95.
- Lösung

Aufgabe 6



- Heizöl, bestehend aus 84.4 % C, 11.7 % H und 3.9 % S (Massenanteile), wird mit feuchter Luft von 1 bar, 25 °C und 60 % relativer Feuchte bei 15 % Luftüberschuss vollständig verbrannt.

Wie groß sind

- a. der Luftbedarf (feucht)
 - b. die prozentuale Zusammensetzung und Gesamtmenge des Verbrennungsgases ?
- Geben Sie alle Mengen als m^3/kg Brennstoff an, wobei das Volumen bei Normbedingungen gemeint ist und Abweichungen vom idealen Gas vernachlässigt werden.
 - Lösung

Aufgabe 7



- Bei der Verbrennung von Heizöl wie in Aufgabe 6 wird die Abluft nur auf 90 °C herabgekühlt.
 - a. Wie groß ist die pro kg Brennstoff freiwerdende Wärme ?
 - b. Welchen Wert erreicht die adiabatische Verbrennungstemperatur ?
- Werte:

spez. Wärmekapazität des Heizöls $c_{p,B} = 1.88 \text{ kJ}/(\text{kg K})$

- Lösung

Aufgabe 8



- Wie groß ist der Wärmeverluststrom durch den 20 mm starken Zylinderdeckel eines wassergekühlten Verbrennungsmotors mit 200 mm Zylinderinnendurchmesser, wenn der Deckel als Halbkugel angenommen wird?
- Werte:
 - Innentemperatur $T_1 = 165 \text{ °C}$
 - Außentemperatur $T_2 = 150 \text{ °C}$
 - Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 40 \text{ W/(K m)}$
- Lösung

Aufgabe 9



- Die Außenwand eines Hauses bestehe aus zwei Schichten Ziegeln mit jeweils 10 cm Dicke sowie einer isolierenden Schicht aus Glaswolle der Dicke 3 cm.
 - a. Wie groß ist der durch eine Wandfläche von 16 m^2 durchtretende Wärmestrom bei 20 °C Innen- und 0 °C Außentemperatur ?
 - b. Welche Temperaturen haben die beiden Grenzschichten?
- Werte für die Wärmeleitfähigkeit:
 - Ziegelmauerwerk: 0.76 W/(K m)
 - Glaswolle: 0.046 W/(K m)
- Lösung

Aufgabe 10



- Wasser mit 100 °C mittlerer Temperatur (zwischen Ein- und Austritt) wird in einem 3 m langen Rohr mit 22 mm Innendurchmesser bei mittlerer Wandtemperatur von 60 °C gekühlt. Es wird mit 1.2 m/s durch das Rohr gepumpt.

- a. Wie groß ist der Wärmeübergangskoeffizient ?
- b. Welcher Wärmestrom fließt durch die Rohrwand ?

- Werte für Wasser:

Viskosität ν :

- $0.294 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (bei 100 °C)
- $0.478 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (bei 60 °C)

Temperaturleitfähigkeit a :

- $0.169 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (bei 100 °C)
- $0.159 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ (bei 60 °C)

Wärmeleitfähigkeit λ :

- $0.666 \text{ W}/(\text{K m})$ (bei 80 °C)

- Lösung

Aufgabe 11



- Wiederholen Sie [Aufgabe 9](#), berücksichtigen Sie dabei aber den Temperaturabfall an den Luft-Mauer-Schichten.
- Werte:
 $\alpha(\text{Luft - Mauer}) = 6.2 \text{ W}/(\text{K m}^2)$
- [Lösung](#)

Aufgabe 12



- Zwei jeweils 2 m^2 große Wände mit den Emissionsgraden $\varepsilon_1 = 0.6$, $\varepsilon_2 = 0.9$ und den Temperaturen $T_1 = 1000 \text{ K}$, $T_2 = 300 \text{ K}$, stehen sich parallel gegenüber.
 - a. Welcher Wärmestrom fließt zwischen ihnen?
 - b. Wie stark wird der Wärmestrom reduziert, wenn eine dünne Strahlungsschutzwand mit $\varepsilon_3 = 0.1$ dazwischengebracht wird, die auf beiden Seiten die gleiche Temperatur hat?
- Lösung

Aufgabe 13



- Aufgrund der Sonneneinstrahlung erreicht die Erde ein Wärmestrom von $\dot{q}_E = 1.37 \text{ kW/m}^2$. Wie groß ist die Oberflächentemperatur der Sonne?

- Werte:

Abstand Sonne - Erde (Mittelpunkte) $r_{ES} = 149.6 \cdot 10^9 \text{ m}$

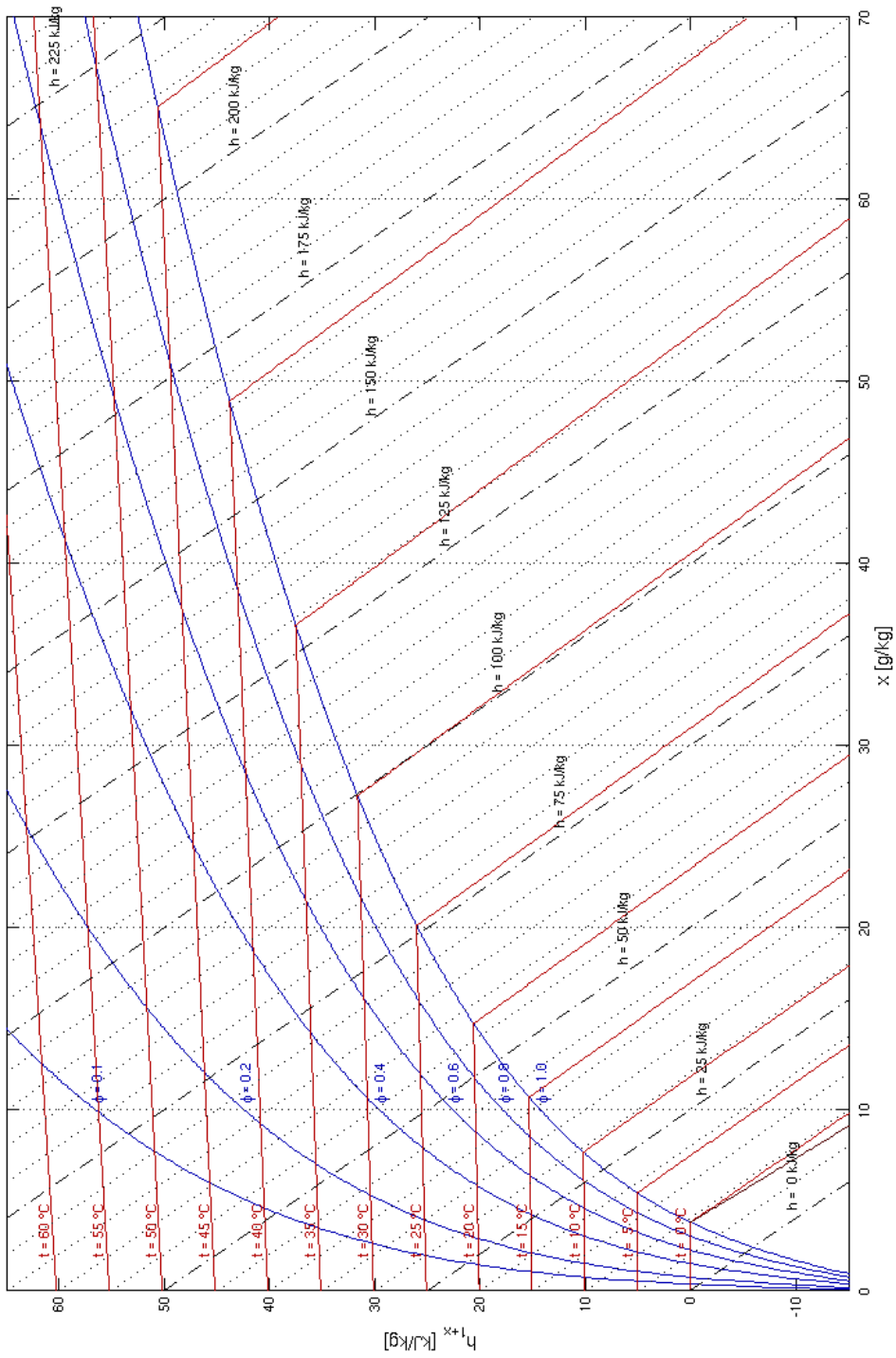
Radius der Sonne $r_S = 696 \cdot 10^6 \text{ m}$

- Lösung

- Tabellen
- Applets
- Matlab-Beispiele
- Nachweise

🔍 h,x-Diagramm von Mollier

h,x-Diagramm von Mollier



Applets



- ☀ Wärmewiderstand
- ☀ Wärmedurchgang

🔗 [exercise5.m](#)

🔗 [exercise7.m](#)

exercise5.m



```
% Loesung von Aufgabe 5
% gegebene Werte
t1 = 20; % in C
t2 = 50;
phi1 = 0.4; % rel. Feuchte
phi2 = 0.8;
q = 2/3; % Massenverhaeltnis
p = 1.01325e5; % Normdruck

%% a: Diagramm
x1 = 0.0059;
h1 = 35.5e3;
x2 = 0.0674;
h3 = 225e3;

x3 = (q*x1 + x2)/(1+q)

%% b: Berechnen
% Feuchtegrade x1, x2
ps1 = saturationPressure(celsiusToKelvin(t1))
x1 = 0.6219*phi1*ps1/(p - phi1*ps1)

ps2 = saturationPressure(celsiusToKelvin(t2))
x2 = 0.6219*phi2*ps2/(p - phi2*ps2)

% Bestimmung des Feuchtegrads x3
x3 = (q*x1 + x2)/(1 + q)

% spezifische Enthalpien
cp_luft = 1004; % in J/(kg K)
cp_dampf = 1860; % in J/(kg K)
r0 = 2500.9e3; % in J/kg

h1 = cp_luft*t1 + x1*(r0 + cp_dampf*t1) % in J/kg
h2 = cp_luft*t2 + x2*(r0 + cp_dampf*t2)

h3 = (q*h1 + h2)/(1 + q)

% Mischungstemperatur
t3 = (h3 - x3*r0)/(cp_luft + x3*cp_dampf)

% Berechnung von phi3
ps3 = saturationPressure(celsiusToKelvin(t3))
phi3 = p/ps3 * x3/(x3 + 0.6219)
```

exercise7.m



```
% Loesung von Aufgabe 7

% gegebene Werte
t_b = 25; % in Grad Celsius
t_l = 25;
t_v = 90;
mu_c = 0.844;
mu_h = 0.117;
mu_s = 0.039;

% Werte aus Aufgabe 6
l = 0.5627; % in kmol L/kg B
v_f = 0.5920; % in kmol V/kg B

% Heizwert
h_u = (34.0*mu_c + 101.6*mu_h + 19.1*mu_s)*1000 % in kJ/kg B

% Molmase der Luft aus Tabelle
m_l = 28.966; % in kg/kmol

% spez. Waermekapazitaet in kJ/(kg K)
cp_b = 1.88; % Heizoel, angegeben
cp_l = 1.005; % Luft, aus Tabelle

% damit Enthalpie vor Verbrennung
h1 = m_l*l*cp_l*t_l + h_u + cp_b*t_b

% Molmasse des Verbrennungsgases
% Reihenfolge im Vektor: CO2 SO2 H2O N2 O2
% Mol-Anteile aus Aufgabe 6
y_vi = [0.118816, 0.002059, 0.116884, 0.736698, 0.025543];
% Molmassen
m_vi = [44, 64, 18, 28, 32];
m_v = y_vi * m_vi'

% spez. Waermekapazitaet des Verbrennungsgases
% Massenanteile
mu_i = m_vi .* y_vi / m_v
% cp der Komponenten bei 90 C durch lineare Interpolation
cp_i0 = [0.8169, 0.6092, 1.858, 1.039, 0.915]; % bei 0 Grad
cp_i1 = [0.8673, 0.6355, 1.871, 1.039, 0.9227]; % bei 100 Grad
cp_i = cp_i0 + 0.9*(cp_i1-cp_i0); % bei 90 Grad
% cp des Gemischs
cp_v = cp_i * mu_i'

% damit Enthalpie nach Verbrennung
h2 = m_v * v_f * cp_v * t_v

% freiwerdende Waerme
q = h1 - h2 % in kJ/kg

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Berechnung von t_max
% Grundproblem: cp bis t_max geht ein, also raten, iterieren, ..
% allerdings: Berechnung von cp aus Tabellen muss automatisiert werden!

% bis auf cp(t_max) sind alle Groessen bekannt
```

```

% im Moment ist nur cp(t_v) bekannt, damit erhaelt man
t_max = h1/(m_v * v_f * cp_v)
% Ergebnis: 2298 Grad -> iterieren!

% zunaechst Tabelle der cp_s der Komponenten einlesen
load 'cp.dat';
T = cp(:,1);
CP = cp(:,2:end);

% Schaetzwert fuer t in Grad Celsius
t_neu = 90;
t_alt = 0;    % dummy fuer die Schleife

% wiederhole, bis sich der t-Wert nicht mehr aendert
while abs(t_alt - t_neu) > 0.1,
    t_alt = t_neu;
    cp_i = interp1(T, CP, t_alt, 'spline'); % cp der Komponenten
    cp_v = cp_i * mu_i'; % cp des Gemischs in kJ/(kg K)
    % damit neuer t-Wert
    t_neu = h1/(m_v * v_f * cp_v)
end

```


- Tabellen:

Tabellen-Nr	Herkunft
1	[1]

Lösung von Aufgabe 1



a. Dichte des Abgases:

Die Gesamtdichte erhält man aus den Dichten der Komponenten nach

$$\frac{1}{\rho_g} = \sum_i \frac{\mu_i}{\rho_i}$$

Die Einzeldichten bei gleichem p und T ergeben sich aus

$$\rho_i = \frac{m_i}{V_i} = \frac{p}{R_i T} = \frac{p M_i}{RT}$$

Mit der Gaskonstanten $R = 8.315 \text{ J}/(\text{mol K})$ und den Molmassen

Gas	Molmasse [kg/kmol]
N ₂	28.01
O ₂	32.00
CO ₂	44.01
CO	28.01

erhält man mit den angegebenen Werten für p und T

Gas	Dichte [kg/m ³]
N ₂	0.6136
O ₂	0.7011
CO ₂	0.9642
CO	0.6136

Die Gesamtdichte des Abgases ist daher

$$\rho = 0.6491 \text{ kg/m}^3$$

b. Molmasse des Gemischs:

erhält man sofort aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{M_g} &= \sum_i \frac{\mu_i}{M_i} \\ \Rightarrow M_g &= 29.63 \text{ kg/kmol} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 2



a. Massen- und Molanteile:

Gesamtmasse

$$m_g = m_{N_2} + m_{CO_2} = 0.882 \text{ kg}$$

Massenanteile daher

$$\mu_{N_2} = m_{N_2}/m_g = 0.4172$$

$$\mu_{CO_2} = m_{CO_2}/m_g = 0.5828$$

Stoffmengen

$$n_{N_2} = m_{N_2} / M_{N_2} = 13.14 \text{ mol}$$

$$n_{CO_2} = m_{CO_2} / M_{CO_2} = 11.68 \text{ mol}$$

damit Molanteile

$$y_{N_2} = 0.5294$$

$$y_{CO_2} = 0.4706$$

b. Gaskonstante und Molmasse:

Molmasse aus den Molmassen der Komponenten

$$M_g = \sum_i M_i y_i = 35.54 \text{ kg/kmol}$$

Gaskonstante dann

$$R_g = \frac{R}{M_g} = 233.9 \text{ J/(kg K)}$$

c. Volumen:

Aus der Gasgleichung für das Gemisch

$$p_1 V_g = m_g R_g T_1$$

erhält man mit den bisherigen Ergebnissen sofort

$$V_g = m_g R_g T_1 / p_1 = 3.660 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

d. Druck nach der Erwärmung:

Die Zustandsänderung erfolgt isochor, daher

$$p_2 = p_1 \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = 60.50 \text{ bar}$$

e. Zugeführte Wärme:

Isobare spezifische Wärmekapazitäten aus Tabelle

$$c_{p,N_2} \Big|_{0^\circ C}^{800^\circ C} = 1.096 \text{ kJ/(kg K)}$$

$$c_{p,CO_2} \Big|_{0^\circ C}^{800^\circ C} = 1.0875 \text{ kJ/(kg K)}$$

Die Wärmekapazität des Gemischs erhält man aus

$$c_{p,g} = \sum_i \mu_i c_{p,i} = 1.091 \text{ kJ/(kg K)}$$

Damit ist

$$c_{v,g} = c_{p,g} - R_g = 0.8571 \text{ kJ/(kg K)}$$

Die zugeführte Wärmemenge ist also

$$Q_{12} = m_g c_{V,g} (T_2 - T_1) = 604.8 \text{ kJ}$$

Lösung von Aufgabe 3



- Feuchtegehalt bestimmt sich aus

$$x = \frac{M_W}{M_L} \frac{\varphi p_S}{p - \varphi p_S}$$

- Für die Ansaugluft ist der Sättigungsdruck (durch lineare Interpolation aus der Dampfdruck-Tabelle)

$$p_S(15 \text{ °C}) = 0.01706 \text{ bar}$$

- Damit erhält man den Feuchtegehalt

$$x_1 = 0.007419$$

Er bleibt bei der Erwärmung natürlich konstant.

- Für die Abluft erhält man analog

$$p_S(29 \text{ °C}) = 0.04009 \text{ bar}$$

$$x_2 = 0.02297$$

- Bei Luftmassenstrom \dot{m}_L der trockenen Luft wird die folgende Dampfmenge abgeführt

$$\Delta \dot{m}_d = \dot{m}_L (x_2 - x_1)$$

Für den gewünschten Wert $\Delta \dot{m}_d = 500 \text{ kg/h} = 0.1389 \text{ kg/s}$ also

$$\dot{m}_L = \frac{\Delta \dot{m}_d}{x_2 - x_1} = 8.929 \text{ kg/s}$$

- Um das Volumen der angesaugten feuchten Luft zu berechnen, benötigen wir zunächst deren Dichte

$$\rho_1 = \frac{p M_L}{R T_1} \left(1 - \left(1 - \frac{M_W}{M_L} \right) \varphi_1 \frac{p_S(T_1)}{p} \right) = 1.219 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

- Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\dot{m}}{\rho_1} \\ &= \frac{\dot{m}_L + \dot{m}_W}{\rho_1} \\ &= \frac{\dot{m}_L}{\rho_1} \cdot \frac{\dot{m}_L + \dot{m}_W}{\dot{m}_L} \\ &= \frac{\dot{m}_L}{\rho_1} (1 + x_1) \\ &= 7.381 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4



- Ablesen aus dem h,x-Diagramm

Zustand 1 als Schnittpunkt von $\varphi = 0.8$ und $t = 5^\circ\text{C} \rightarrow$

$$(h_{1+x})_1 = 16 \text{ kJ/kg}$$

$$x = 0.0042$$

Zustand 2 bei gleichem x und $t = 20^\circ\text{C} \rightarrow$

$$(h_{1+x})_2 = 31 \text{ kJ/kg}$$

$$\varphi_2 = 0.3$$

Wärmeleistung damit

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_2 ((h_{1+x})_2 - (h_{1+x})_1) = 108.5 \text{ kW}$$

- a. rechnerische Bestimmung von φ_2 :

Dampfdruck bei Zustand 1 (Interpolation aus Tabelle)

$$p_S(5^\circ\text{C}) = 0.00873 \text{ bar}$$

damit Feuchtegehalt

$$x_1 = \frac{M_W}{M_L} \frac{\varphi_1 p_S(t_1)}{p - \varphi_1 p_S(t_1)} = 0.00432$$

bei Zustand 2 $x_2 = x_1$, Dampfdruck

$$p_S(20^\circ\text{C}) = 0.0234 \text{ bar}$$

Auflösen der x- φ -Beziehung \rightarrow

$$\varphi_2 = \frac{p}{p_S(t_2)} \frac{x_2}{x_2 + M_W/M_L} = 0.298$$

- b. spezifische Enthalpien:

Für $\varphi < 1$ war

$$h_{1+x} = c_{p,L} t + x(r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t)$$

mit den Tabellenwerten der Konstanten erhält man

$$(h_{1+x})_1 = 15.85 \text{ kJ/kg}$$

$$(h_{1+x})_2 = 31.03 \text{ kJ/kg}$$

- c. Wärmeleistung:

$$\dot{Q}_{12} = \dot{m}_2 ((h_{1+x})_2 - (h_{1+x})_1) = 109.8 \text{ kW}$$

Lösung von Aufgabe 5



- gegebene Werte:

$$t_1 = 20 \text{ °C}, \varphi_1 = 0.4$$

$$t_2 = 50 \text{ °C}, \varphi_2 = 0.8$$

$$q := \dot{m}_{L1} / \dot{m}_{L2} = 2/3$$

- a. Ablesen aus dem h,x-Diagramm:

Zustandsgrößen der einzelnen Luftströme

$$x_1 = 0.0059, h_1 = 35.5 \text{ kJ/kg}$$

$$x_2 = 0.0674, h_2 = 225 \text{ kJ/kg}$$

Feuchtegehalt x_3 der Mischluft

$$\begin{aligned} \frac{x_3 - x_2}{x_1 - x_3} &= q \\ \Rightarrow x_3 &= \frac{qx_1 + x_2}{1 + q} = 0.0428 \end{aligned}$$

Mischzustand aus Schnittpunkt von x_3 -Wert und Verbindungsstrecke der Zustände 1 und 2 →

$$h_3 = 148 \text{ kJ/kg}$$

$$t_3 = 38 \text{ °C}$$

$$\varphi_3 = 0.93$$

- b. Berechnung der Werte mit linearer Interpolation:

Dampfdrücke aus Tabelle durch lineare Interpolation →

$$p_S(t_1) = 0.0234 \text{ bar}$$

$$p_S(t_2) = 0.124 \text{ bar}$$

Bestimmung von x_1 und x_2

$$x_1 = \frac{M_W}{M_L} \frac{\varphi_1 p_S(t_1)}{p - \varphi_1 p_S(t_1)} = 0.00580$$

analog

$$x_2 = 0.0672$$

Daraus Feuchtegehalt wie in a)

$$x_3 = 0.0426$$

Enthalpien aus

$$h_{1+x} = c_{p,L} t + x(r_{0^\circ\text{C}} + c_{p,D} t)$$

damit

$$(h_{1+x})_1 = 34.8 \text{ kJ/kg}$$

$$(h_{1+x})_2 = 224.5 \text{ kJ/kg}$$

Enthalpie des Gemischs aus

$$\begin{aligned} \frac{(h_{1+x})_3 - (h_{1+x})_2}{(h_{1+x})_1 - (h_{1+x})_3} &= q \\ \Rightarrow (h_{1+x})_3 &= \frac{q(h_{1+x})_1 + (h_{1+x})_2}{1 + q} = 148.6 \text{ kJ/kg} \end{aligned}$$

Temperatur des Gemischs durch Auflösung der Enthalpieformel →

$$t_3 = \frac{(h_{1+x})_3 - x_3 r_{0^\circ\text{C}}}{c_{p,L} + x_3 c_{p,D}} = 38.76^\circ\text{C}$$

zugehöriger Dampfdruck

$$p_S(t_3) = 0.0691 \text{ bar}$$

relative Luftfeuchtigkeit damit

$$\varphi_3 = \frac{p}{p_S(t_3)} \frac{x_3}{x_3 + M_W/M_L} = 0.941$$

c. Bestimmung mit Matlab und WATER95:

komplette Rechnung mit dem Matlab-Skript [exercise5.m](#)

Lösung von Aufgabe 6



a. Luftbedarf:

gesamter Bedarf an (feuchter) Luft ist

$$l = \lambda (1 + w_l) l_{\min}$$

trockener Mindestluftbedarf

$$l_{\min} = \frac{1}{0.21} \left(\frac{\mu_C}{12} + \frac{\mu_H}{4} + \frac{\mu_S}{32} \right) \frac{\text{kmol L}}{\text{kg B}} = 0.480 \frac{\text{kmol L}}{\text{kg B}}$$

Sättigungsdruck bei 25 °C aus Tabelle

$$p_S = 0.0317 \text{ bar}$$

damit molarer Feuchtegehalt

$$w_l = \frac{\varphi p_S}{p - \varphi p_S} = 0.0194 \frac{\text{kmol W}}{\text{kmol L}}$$

insgesamt

$$l = 0.563 \frac{\text{kmol L}}{\text{kg B}}$$

mit dem Normvolumen

$$V_{mn} = 22.4 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

ist dies

$$l_V = l V_{mn} = 12.6 \frac{\text{m}^3 \text{ L}}{\text{kg B}}$$

• Verbrennungsgas:

Mengen der Verbrennungsbestandteile aus den Beziehungen für die jeweilige Gassorte

Gas	v_{Gas} [kmol/kg B]	Molanteil [%]
CO ₂	0.0703	11.9
SO ₂	0.00122	0.2
H ₂ O	0.0692	11.7
N ₂	0.436	73.7
O ₂	0.0151	2.6

Gesamtmenge an Verbrennungsgas

$$v_f = \sum_i v_i = 0.592 \frac{\text{kmol}}{\text{kg B}} \hat{=} 13.26 \frac{\text{m}^3}{\text{kg B}}$$

Lösung von Aufgabe 7



a. Freiwerdende Wärme:

- Zunächst h' und h'' berechnen. Dazu sind einige weitere Größen nötig.
Heizwert nach der empirischen Heizwert-Formel

$$H_u = (34.0\mu_c + 101.6\mu_h + 19.1\mu_s) = 41.3 \frac{\text{MJ}}{\text{kg B}}$$

einige benötigte Tabellenwerte

Molmasse der Luft $M_L = 28.966 \text{ kg/kmol}$

spez. Wärmekapazität von Luft bei 25 °C $c_{p,L} = 1.005 \text{ kJ/(kg K)}$

Wert für Luftmenge aus Aufgabe 6

$l = 0.5627 \text{ kmol L/kg B}$

- damit Enthalpie vor der Verbrennung

$$h' = M_L l \bar{c}_{p,L} |_{0^\circ\text{C}}^{t_L} t_L + H_u + \bar{c}_{p,B} |_{0^\circ\text{C}}^{t_B} t_B = 41.78 \frac{\text{MJ}}{\text{kg B}}$$

- Molmasse des Verbrennungsgases aus den Molanteilen y_i nach Aufgabe 6

$$M_V = \sum_i y_i M_i = 28.91 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$$

- Die Berechnung der spezifischen Wärmekapazität des Verbrennungsgases geschieht am einfachsten über die Massenanteile. Diese erhält man aus den Molanteilen über

$$\mu_i = \sum_i M_i y_i / M_V$$

zu

Gas	CO ₂	SO ₂	H ₂ O	N ₂	O ₂
μ_i	0.1808	0.0046	0.0728	0.7135	0.0283

- Aus den Tabellen werden die c_p -Werte bei 90 °C für alle Komponenten durch Interpolation bestimmt. Daraus erhält man die gesamte Wärmekapazität

$$c_{p,V} = \sum_i c_{p,i} \mu_i = 1.062 \frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$$

- Mit der Verbrennungsgasmenge aus Aufgabe 6

$v_f = 0.592 \text{ kmol/kg B}$

erhält man auch die Enthalpie nach der Verbrennung

$$h'' = M_V v_f \bar{c}_{p,V} |_{0^\circ\text{C}}^{t_V} t_V = 1.636 \frac{\text{MJ}}{\text{kg B}}$$

- Daraus ergibt sich sofort die pro kg Brennstoff freiwerdende Wärme

$$\frac{|Q|}{m_B} = h' - h'' = 40.15 \frac{\text{MJ}}{\text{kg B}}$$

- Berechnung der adiabatischen Verbrennungstemperatur:

- Setzt man in die Beziehung

$$h'(t_L) = h''(t_{\max})$$

die entsprechenden Formeln für h' und h'' ein, sieht man, dass die Wärmekapazität $c_{p,V}$ bei der unbekanntem Temperatur t_{\max} zu nehmen ist. Hier hilft grundsätzlich ein Iterieren der Beziehung

$$t_{max} = \frac{h'}{M_V \nu_f \bar{c}_{p,V} |_{0^\circ C}^{t_{max}}}$$

- Zur Berechnung eines neuen $c_{p,V}$ -Wertes sind jedesmal Werte für c_p aller Komponenten durch Interpolation aus den Tabellen zu ermitteln. Mittels eines kleinen **Matlab-Programm** können alle Berechnungen dieser Aufgabe bequem durchgeführt werden.
- Nach 6 Iterationen erhält man auf 5 Dezimalen (also viel genauer als die Tabellenwerte)

$$t_{max} = 1911.1 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Lösung von Aufgabe 8



- Wärmestrom \dot{Q}_K durch eine (ganze) Hohlkugel aus

$$\dot{Q} = -\lambda A(r) \frac{dT}{dr}$$

- Mit $A(r) = 4 \pi r^2$ folgt

$$\dot{Q}_K = -4\pi\lambda r^2 \frac{dT}{dr}$$

- Integration von r_1 bis r_2 liefert

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} dT &= -\frac{\dot{Q}_K}{4\pi\lambda} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} \\ \Rightarrow T_2 - T_1 &= -\frac{\dot{Q}_K}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \\ \Rightarrow \dot{Q}_K &= 4\pi\lambda \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4524 \text{ W} \end{aligned}$$

- Wärmestrom durch Halbkugel halb so groß

$$\dot{Q} = \dot{Q}_K/2 = 2262 \text{ W}$$

Lösung von Aufgabe 9



a. Wärmestrom:

Wärmewiderstände der einzelnen Schichten erhält man sofort aus

$$R_{th,i} = d/(\lambda_i A) \Rightarrow$$

$$R_{th,1} = 0.0408 \text{ K/W}$$

$$R_{th,2} = 0.0082 \text{ K/W}$$

Der Gesamtwiderstand ergibt sich als Summe zu

$$R_{th} = 0.0572 \text{ K/W}$$

Der Wärmestrom ist daher

$$\dot{Q} = (T_1 - T_2)/R_{th} = 349.6 \text{ W}$$

b. Temperaturen an den Grenzschichten:

Der Wärmestrom \dot{Q} geht durch die erste Wärmeschicht und erzeugt dort einen Temperaturabfall von

$$t_a - t_1 = -\dot{Q} R_{th,1} = -2.875 \text{ K}$$

$$\Rightarrow t_a = 17.125 \text{ °C}$$

Mit dieser Anfangstemperatur erhält man genauso die Temperatur an der zweiten Grenzschicht

$$t_b = 2.875 \text{ °C}$$

Lösung von Aufgabe 10



- Die Reynoldszahl ist

$$Re = w L/v = 89796$$

- Die Prandtlzahl benötigt man bei Fluid- und Wandtemperatur

$$Pr_f = 1.74$$

$$Pr_w = 3.01$$

- Für diese Werte muss die dritte angegebene Formel für die Nußeltzahl verwendet werden. Sie ergibt sich damit zu

$$Nu = 294.2$$

- Der Wärmeleitkoeffizient ist somit

$$\alpha = Nu \lambda/L = 8910 \text{ W/(K m}^2\text{)}$$

- Damit und mit der Rohroberfläche erhält man den Wärmestrom

$$\dot{Q} = \alpha (T_w - T_f) \pi L h = -73.9 \text{ kW}$$

Lösung von Aufgabe 11



- Wärmewiderstand der Grenzschicht

$$R_k = 1/(\alpha A) = 0.0101 \text{ K/W}$$

- Gesamtwiderstand erhöht sich gegenüber Aufgabe 9 um $2 \cdot R_k$, also

$$R_{th} = 0.0774$$

- Der Wärmestrom verringert sich damit auf

$$\dot{Q} = 258.5 \text{ W}$$

- Zur Berechnung der Temperaturen an den Grenzschichten bildet man die "kumulierte Summe" R_{sum} der Einzelwiderstände, d.h. $R_{sum,i}$ ist die Summe der nach Schicht i liegenden Widerstände:

$$R_{th,i} = [0.0101 \ 0.0082 \ 0.0408 \ 0.0082 \ 0.0101] \text{ K/W}$$

$$R_{sum,i} = [0.0101 \ 0.0183 \ 0.0591 \ 0.0673 \ 0.0774] \text{ K/W}$$

- Die Temperatur an der i -ten Grenzschicht ist dann einfach durch den Gesamtwiderstand der vorhergehenden Schichten gegeben:

$$T_i = T_1 - \dot{Q} \cdot R_{sum,i} = [17.39 \ 15.27 \ 4.73 \ 2.61 \ 0.00] \text{ } ^\circ\text{C}$$

Lösung von Aufgabe 12



a. Wärmestrom zwischen den Wänden:

Strahlungsaustauschfaktor

$$C_{12} = \frac{\sigma}{1/\epsilon_1 + 1/\epsilon_2 - 1} = 3.19 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Wärmestrom damit

$$\dot{Q} = C_{12} A (T_1^4 - T_2^4) = 63.3 \text{ kW}$$

b. Wärmestrom bei Zwischenwand:

Strahlungsaustauschfaktoren zur Zwischenwand

$$C_{13} = 5.32 \cdot 10^{-9} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$$

$$C_{32} = 5.61 \cdot 10^{-9} \text{ W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$$

Wärmestrom von Wand 1 zum Schirm

$$\dot{Q}_{13} = C_{13} A (T_1^4 - T_3^4)$$

Wärmestrom vom Schirm zur Wand 2

$$\dot{Q}_{32} = C_{32} A (T_3^4 - T_2^4)$$

im Gleichgewicht sind beide Wärmeströme gleich \rightarrow

$$T_3 = \sqrt[4]{\frac{C_{13} T_1^4 + C_{32} T_2^4}{C_{13} + C_{32}}} = 837 \text{ K}$$

reduzierter Wärmestrom damit

$$\dot{Q}_r = 5.41 \text{ kW} = 8.56\% \cdot \dot{Q}$$

Lösung von Aufgabe 13



- Wärmestrom durch Kugel um Sonne mit Radius r_{ES}

$$\dot{Q} = 4\pi r_{ES}^2 \dot{q}_E$$

- Wärmestromdichte an Sonnenoberfläche daher

$$\dot{q}_S = \frac{\dot{Q}}{4\pi r_s^2} = \dot{q}_E \left(\frac{r_{SE}}{r_S} \right)^2 = 6.329 \cdot 10^7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

- aus dem Stefan-Boltzmann-Gesetz folgt damit die Temperatur

$$T = \sqrt[4]{\frac{\dot{q}_S}{\sigma}} = 5780 \text{ K}$$