

Thermodynamik 1



- Grundlagen der Thermodynamik
- Energieformen in der Thermodynamik
- Eigenschaften des idealen Gases
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 11. 04. 2020

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Grundlagen der Thermodynamik
 - Einleitung
 - Physikalische Einheiten
 - Zustandsgrößen
 - Stoffmenge
 - Thermische Ausdehnung
- Energieformen in der Thermodynamik
 - Thermodynamische Systeme und Prozesse
 - Erster Hauptsatz der Thermodynamik
 - Energieübertragung am geschlossenen System
 - Energieübertragung am offenen System
 - Kalorische Zustandsgleichung und Wärmekapazität
- Eigenschaften des idealen Gases
 - Definition des idealen Gases
 - Thermische Zustandsgleichung
 - Kalorische Zustandsgleichung
 - Zustandsänderungen
 - Allgemeines
 - Isochore
 - Isobare
 - Isotherme
 - Isentrope
 - Polytrope
 - Kreisprozesse
 - Einfacher Kreisprozess
 - Arbeit beim reversiblen Kreisprozess
 - Thermischer Wirkungsgrad
 - Carnot-Prozess
 - Wärmepumpe und Kältemaschine
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
 - Aufgabe 7
 - Lösung von Aufgabe 7
 - Aufgabe 8
 - Lösung von Aufgabe 8
 - Aufgabe 9
 - Lösung von Aufgabe 9
 - Aufgabe 10
 - Lösung von Aufgabe 10
 - Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 11
 - Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 12
 - Aufgabe 13
 - Lösung von Aufgabe 13
 - Aufgabe 14
 - Lösung von Aufgabe 14

- Aufgabe 15
 - Lösung von Aufgabe 15
- Aufgabe 16
 - Lösung von Aufgabe 16
- Aufgabe 17
 - Lösung von Aufgabe 17
- Aufgabe 18
 - Lösung von Aufgabe 18
- Aufgabe 19
 - Lösung von Aufgabe 19
- Aufgabe 20
 - Lösung von Aufgabe 20
- Anhang
 - Lineare Interpolation
 - Tabellen
 - Mittlere molare Wärmekapazitäten
 - Matlab-Beispiele
 - Lösung von Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 18
 - Literatur
 - Nachweise

- Einleitung
- Physikalische Einheiten
- Zustandsgrößen
- Stoffmenge
- Thermische Ausdehnung

- Thermodynamik:
 - Lehre der Energieformen und Energie-Umwandlungen
 - historische Wurzeln: Untersuchung von Gasen und Wärmelehre
 - physikalische Deutung durch die statistische Mechanik
- technische Anwendungen z.B.:
 - Wärme­kraftwerke
 - Verbrennungsmotoren
 - Klimatechnik
 - Verfahrenstechnik
- statistische Mechanik:
 - Untersuchung von Systemen mit vielen Teilchen
 - benutzt statistische Methoden
 - liefert Begründungen der Thermodynamik
 - schwierig in den Grundbegriffen und in der Rechnung
 - für uns nützlich: besseres Verständnis der Grundbegriffe

Physikalische Einheiten



- Physikalische Größen:

Produkt aus Zahlenwert und Einheit

- $G = \{G\} \cdot [G]$

Beispiele:

- Masse von 5 kg
- Energie von 0.3 kWh

Beziehungen zwischen Größen ergeben Beziehungen zwischen Einheiten

- Grundgrößen:

Auswahl vom verwendeten Einheitensystem abhängig

in der Mechanik drei, z.B.

- Länge
- Zeit
- Masse

eine zusätzliche Grundgröße (etwa Temperatur) in der Thermodynamik

- abgeleitete Größen:

aus Formelbeziehungen auf Grundgrößen zurückführbar

Einheiten werden entsprechend auf die der Grundgrößen zurückgeführt

Beispiel Geschwindigkeit

- Geschwindigkeit = Länge / Zeit
- Einheit der Geschwindigkeit = Einheit der Länge / Einheit der Zeit

- Internationales Einheitensystem:

SI-System (**S**ystème **I**nternational d'**U**nités)

international genormt, in Deutschland gesetzlich vorgeschrieben

Basisgrößen mit Einheiten:

Größe	Einheit	Abkürzung
Länge	Meter	m
Masse	Kilogramm	kg
Zeit	Sekunde	s
Temperatur	Kelvin	K
elektr. Stromstärke	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	cd
Stoffmenge	Mol	mol

- Beispiel Kraft als abgeleitete Größe:

physikalische Beziehungen:

- Kraft = Masse * Beschleunigung ($F = m \cdot a$)
- Beschleunigung = Geschwindigkeitsänderung/Zeit ($a = dv/dt$)
- Geschwindigkeit = Wegänderung/Zeit ($v = ds/dt$)

Zusammengefasst:

- $F = m \cdot d^2s/dt^2$

SI-Einheit:

$$[F] = [m] \cdot [s]/[t]^2 = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 =: \text{N (Newton)}$$

- Umrechnung bei nicht-SI-Einheiten:

vor Gebrauch in physikalischen Formeln immer in SI-Einheiten umrechnen!

in der Regel einfache Multiplikation

Beispiel Kilopond (alte Krafteinheit):

- Beziehung: $1 \text{ kp} = 9.80665 \text{ N}$
- $\Rightarrow 65 \text{ kp} = 65 * 1 \text{ kp} = 65 * 9.80665 \text{ N} = 637.43 \text{ N}$

Zustandsgrößen



- homogene Stoffe:
 - nur eine Sorte (im Rahmen der betrachteten Messgrößen)
 - überall gleiche physikalische Bedingungen
 - Änderungen der Zustandsgrößen im Stoff gleichförmig

- Volumen:

Raum, den ein Stoff ausfüllt

gebräuchliches Formelzeichen: V

Einheit: m^3

auf Masse bezogen (spezifisches Volumen):

$$v = V / m$$

Kehrwert Dichte

$$\rho = m / V$$

- Druck:

senkrecht auf eine Fläche A wirkende Kraft F_n

$$p = F_n / A$$

gebräuchliches Formelzeichen: p

sichtbar bei Begrenzungsflächen

in der Regel stets wirksam: äußerer Luftdruck

- Druck-Einheiten:

abgeleitete SI-Einheit :

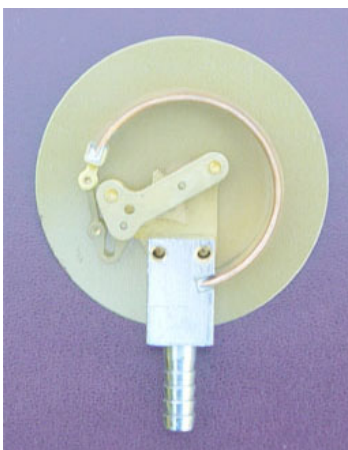
$$[p] = \text{N} / \text{m}^2 =: \text{Pa} \text{ (**Pascal**)}$$

weitere gebräuchliche Einheiten:

- $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ at} = 98066.5 \text{ Pa}$
- $1 \text{ Torr} = 133.3224 \text{ Pa}$

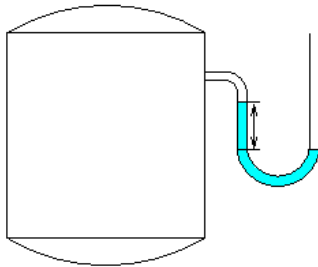
- Messung des Drucks (Manometer, Barometer):

- Bourdon-Manometer



Druck streckt eine gebogene Röhre, mit Zeiger umgesetzt

- U-Rohr-Manometer



Druck wirkt gegen Gewichtskraft einer Flüssigkeits-Säule

- Temperatur:

Grundgröße der Thermodynamik

Beobachtung (**Nullter Hauptsatz**): Zwei Stoffe in Berührung tauschen Energie (Wärme) aus, bis ein Gleichgewicht (**thermodynamisches Gleichgewicht**) erreicht ist. Sie haben dann die gleiche Temperatur.

gebräuchliches Formelzeichen: T

- Temperatur-Einheiten:

- Basis-SI-Einheit : K (**Kelvin**)

auf das ideale Gas bezogen: Mit dieser Skala gilt bei konstantem Druck $V \sim T$

- praktische Einheit: °C (Grad Celsius)

Bezogen auf Wasser bei Normaldruck (1.01325 bar):

- Schmelzpunkt entspricht 0 °C
- Siedepunkt entspricht 100 °C

- Temperatur in Celsius oft mit t bezeichnet. Dann gilt:

$$t = T - T_0, \quad T_0 = 273.15\text{K}$$

- im angelsächsischen verbreitete Einheit: °F (Fahrenheit)
Umrechnung Celsius $\{t_C\}$ in Fahrenheit $\{t_F\}$

$$\{t_C\} = 5/9 * (\{t_F\} - 32)$$

- Messung der Temperatur:

aus der Ausdehnung von Stoffen mit der Temperatur

- Festkörper (Bimetall-Thermometer)
- Flüssigkeiten (Quecksilber-Thermometer)
- Gasthermometer (gemessen wird der Druck)

aus der Widerstandsänderung von Festkörpern

mit dem thermoelektrischen Effekt (Thermoelement)

aus der abgegebenen Wärme-Strahlung

- Thermische Zustandsgleichung

Von den Größen p, v, T nur zwei Größen unabhängig, die dritte ergibt sich als Funktion der anderen. Dieser Zusammenhang heisst **thermische Zustandsgleichung**.

allgemein:

$$f(p, v, T) = 0$$

Funktion f beschreibt das thermische Verhalten eines Stoffes.

meistens nach einer Variablen aufgelöst, etwa

$$p = p(v, T)$$

- intensive Größe:
 - hängt nicht von der Menge des betrachteten Stoffes ab
 - Beispiele: p , T , ρ
- extensive Größe:
 - ist proportional zur Menge des Stoffes
 - Beispiele: V , m , Energieinhalt U
 - Division durch eine die Stoffmenge angegebene Größe erzeugt intensive Größe
- Festlegung der Stoffmenge:
 - wie in der Mechanik: durch die Masse
 - in der Thermodynamik nützlich: Zahl der Moleküle N
 - um große Zahlen zu vermeiden: Stoffmenge n in Mol
 - $1 \text{ mol} \triangleq 6.022 \cdot 10^{23}$ Moleküle (**Avogadro-Zahl**)
 - formal mit $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \cdot 1/\text{mol}$
 - $n = N / N_A$
 - 1 Mol eines Stoffes hat eine Masse, die der relativen Molekülzahl in Gramm entspricht. In guter Näherung ist für reine Isotope die relative Molekülzahl die Anzahl der Protonen und Neutronen im Atomkern.
 - Beispiel:
 - Sauerstoff (als Atom) hat eine relative Molekülzahl von 16 (8 Protonen, 8 Neutronen). Luftsauerstoff liegt als Molekül O_2 vor, hat also die Molekülzahl 32. Daher:
 - 1 mol O_2 hat eine Masse von 32 g
- Molmasse M :
 - Masse für ein Mol eines Stoffes
 - Gesamtmasse gegeben durch
 - $m = n M$
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Aufgabe 2

Thermische Ausdehnung



- Beobachtung:

fast alle Stoffe dehnen sich (bei konstantem Druck) mit steigender Temperatur aus.

Ausnahme z.B.: Wasser zwischen 0°C und 4°C

Ausdehnung bei Festkörpern und Flüssigkeiten relativ klein, bei Gasen deutlich größer.

- Mathematische Beschreibung:

Länge l hängt von der Temperatur ab: $l = l(T)$.

Näherungsweise (bei kleinen Temperaturänderungen): Längenänderung proportional zur Temperaturänderung und zur Länge

$$\Delta l / (l \Delta T) = \text{const.} =: \alpha$$

α : Längenausdehnungskoeffizient

Genauer betrachtet hängt α von der Temperatur ab. Man wählt zur Bestimmung ein ganz kleines Temperatur-Intervall (dann kommt die Näherung besser hin) und definiert:

$$\alpha(T) := 1/l \, dl/dT$$

- Volumen-Ausdehnung:

Die thermische Ausdehnung geschieht natürlich in alle Richtungen. Man definiert entsprechend den Volumen-Ausdehnungskoeffizienten:

$$\gamma(T) := 1/V \, dV/dT$$

- Zusammenhang zwischen α und γ :

betrachte Ausdehnung eines Würfels der Kantenlänge l bei Temperaturerhöhung von T_0 auf T_1 :

$$\begin{aligned} V(T_1) &= l(T_1)^3 \\ &= l(T_0)^3 (1 + \alpha \Delta T)^3 \\ &= V(T_0) (1 + 3\alpha \Delta T + 3(\alpha \Delta T)^2 + (\alpha \Delta T)^3) \end{aligned}$$

Für nicht zu große Temperaturunterschiede ist bei Festkörpern und Flüssigkeiten der Ausdruck $\alpha \Delta T$ sehr klein. Man kann höhere Potenzen also vernachlässigen. Damit:

$$\begin{aligned} V(T_1) &\approx V(T_0) (1 + 3\alpha \Delta T) \\ &= V(T_0) (1 + \gamma \Delta T) \end{aligned}$$

Durch Vergleich ergibt sich näherungsweise:

$$\gamma \approx 3\alpha$$

- Aufgaben:

Aufgabe 3

Energieformen in der Thermodynamik



- Thermodynamische Systeme und Prozesse
- Erster Hauptsatz der Thermodynamik
- Energieübertragung am geschlossenen System
- Energieübertragung am offenen System
- Kalorische Zustandsgleichung und Wärmekapazität

- **System:**

Gegenstand oder Bereich, der zur Untersuchung als abgegrenzt betrachtet wird.

Das System umgibt eine gedachte oder reale Grenze, die es vom Rest der Welt, der Umgebung, abtrennt.

System und Umgebung wechselwirken über die Systemgrenze hinweg, z.B. durch Wärmeübertragung, mechanische Einflüsse oder durch Austausch von Materie.

geschlossenes System: kein Materie-Austausch mit der Umgebung, sonst offenes System.

adiabates System: kein Wärmeaustausch über die Systemgrenzen hinweg

abgeschlossenes System: gar keine Wechselwirkung mit Umgebung

homogen: einheitlicher Stoff oder Stoffgemisch. Gegenteil: **heterogen** (z.B. mehrere Phasen wie Wasserdampf und Wasser). Bis auf weiteres immer homogene Systeme

- **Beispiele:**

Inneres einer Thermosflasche

- geschlossen
- adiabatisch
- abgeschlossen

geschlossenes Becherglas mit Rührer

- geschlossen
- Wärmeaustausch mit Umgebung (Bunsenbrenner)
- Austausch mechanischer Energie (Rührer)

Zylinderinneres eines Otto-Motors (Ventile vernachlässigt)

- geschlossen
- Wärmeaustausch durch Wände
- Austausch mechanischer Energie durch Kolbenbewegung

Strömung durch ein isoliertes Rohr

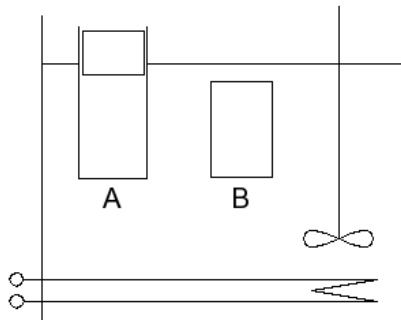
- offen, Untersuchungsvolumen abgegrenzt gedacht
- kein Wärmeaustausch durch Rohrwand
- kein Austausch an Zufluss und Abfluss wegen gleicher Temperatur
- also: adiabatisch

- **Prozess:**

Änderung des Zustands eines Systems

genauer auch mit Verfahren zur Änderung

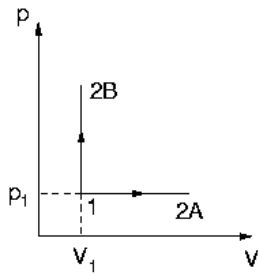
Beispiel:



- Systemgrenzen A und B sind wärmedurchlässig
- Temperatur des Wasserbads werde erhöht
- System A: konstanter Druck, Volumen ändert sich

- System B: konstantes Volumen, Druck ändert sich

im p-V-Diagramm:



- **quasistatische Prozesse:**

Änderungen verlaufen langsam

zu jedem Zeitpunkt kann das System als homogen und im Gleichgewicht betrachtet werden

Vernachlässigung von Ausgleichsprozessen wie

- Wärmeausbreitung von der Heizung oder dem Rührer in die System A und B
- Druckausgleich im Innern der Systeme A und B

schnelle Vorgänge führen zu Nichtgleichgewichtszuständen
nicht im p-V-Diagramm darstellbar!

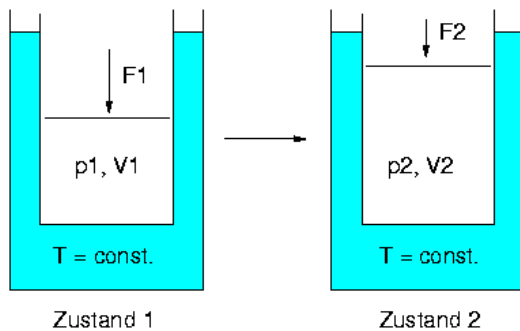
- umkehrbare (**reversible**) Prozesse:

System kann in den Ausgangszustand zurückgeführt werden, ohne dass Änderungen an der Umgebung übrigbleiben

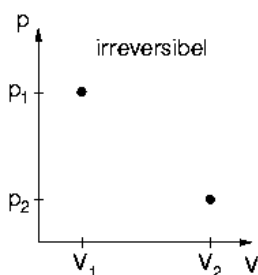
theoretischer Grenzfall zur Vereinfachung der Betrachtung

Vernachlässigung von Reibungsvorgängen, Ausgleichvorgängen,
führt immer über Gleichgewichtszustände (quasistatisch)

- Beispiel: Ausdehnung eines Gases im Wärmebad

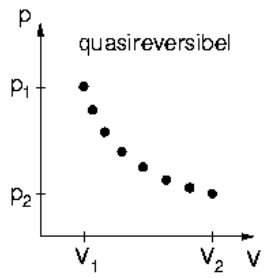


Prozess A: Übergang von Zustand 1 in Zustand 2 durch plötzliches Verringern der Auflagekraft



- Gas dehnt sich plötzlich und turbulent aus
- lokale Druckschwankungen
- lokale Temperaturänderungen durch Reibung
- keine Gleichgewichtszustände

Prozess B: Übergang von Zustand 1 in Zustand 2 durch viele winzige Zwischenschritte



- allmähliche Ausdehnung des Volumens
- lokale Ausgleichprozesse schnell gegen Systemänderung
- interne Reibung vernachlässigbar
- Zwischenschritte lauter Gleichgewichtszustände

Erster Hauptsatz der Thermodynamik



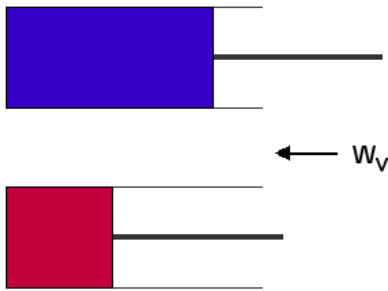
- Energie in der Mechanik:
 - kinetische Energie
 - Rotationsenergie
 - Spannungsenergie (z.B. einer Feder)
 - Lageenergie (z.B. im Gravitationsfeld)
 - Summe aller Energien ist erhalten
- Energie in anderen Bereichen der Physik:
 - elektrische, magnetische Energie
 - Energie in Schallwellen
 - Energie in Licht
 - Energieerhaltung bei Einschluss der entsprechenden Energieformen
- Ergebnis fundamentaler Experimente der Thermodynamik:
 - mechanische Arbeit an geschlossenen Systemen führt zu Temperaturerhöhung (Mixer, Wasserfall)
 - Wärme ist eine Energieform
 - genaue quantitative Messung zeigt:
 - Wärmemenge, um 1kg Wasser um 1 °C zu erwärmen (genau: von 14.5°C auf 15.5°C) =: Kilokalorie
 - 1 kcal = 4.186 kJ
 - (zur Erinnerung: 1 J = 1 N m)
 - diese Wärmemenge entspricht der **spezifischen Wärmekapazität** c_W des Wassers
 - $c_W = 4.186 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
- **Erster Hauptsatz:**
 - Die Energie eines abgeschlossenen Systems (unter Berücksichtigung aller Energieformen, incl. Wärme) ist konstant.
- Aufgaben:
 - Aufgabe 4

Energieübertragung am geschlossenen System



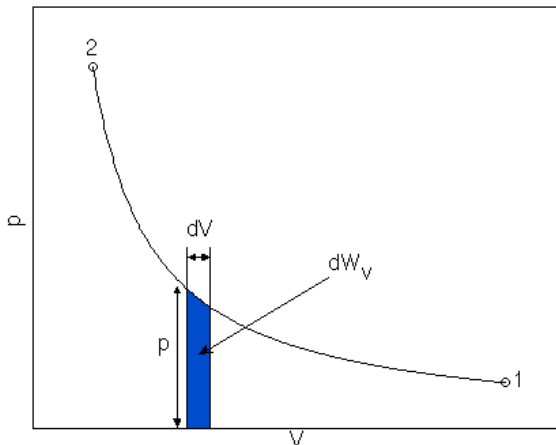
- Volumenänderungsarbeit W_V :

reversible Verdichtung eines Gases



benötigte Arbeit für eine kleine Kolbenverschiebung ds :

$$\begin{aligned}dW_V &= F ds \\ &= -p A ds \\ &= -p dV\end{aligned}$$



- Vorzeichen:

Volumen wird verkleinert ($dV < 0$) $\Rightarrow dW_V > 0$

generell:

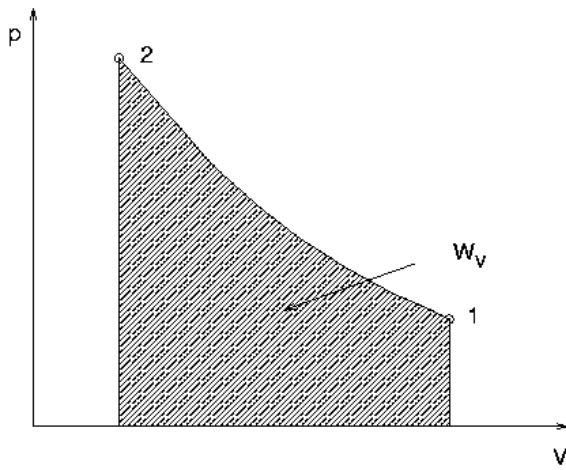
- dem System zugeführte Arbeit ist positiv
- vom System abgegebene Arbeit ist negativ

- Wegabhängigkeit der Volumenänderungsarbeit:

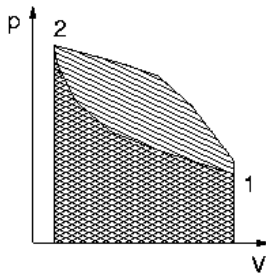
Arbeit bei endlicher Zustandsänderung

$$W_{V12} = - \int_1^2 p dV$$

Fläche unter der Kurve im p-V-Diagramm:



anderes Ergebnis bei anderem Weg von Zustand 1 nach Zustand 2



Volumenänderungsarbeit ist weghängig, sie ist keine Zustandsgröße

- Kolbenarbeit W_K :

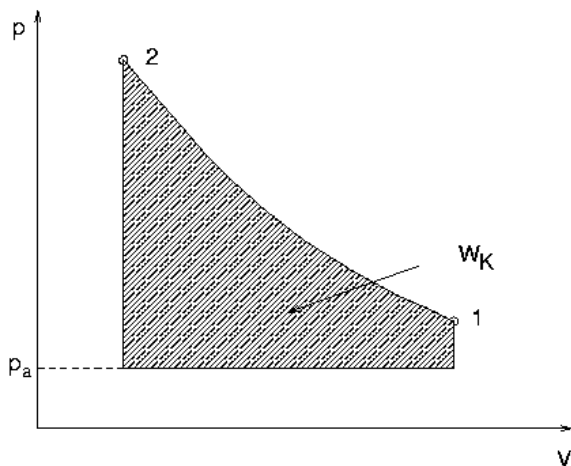
bei Außendruck p_a ist

$$\begin{aligned} dW_K &= F ds \\ &= -(p - p_a) dV \end{aligned}$$

Umgebungsdruck p_a sei konstant längs des Verschiebungswegs, dann:

$$\begin{aligned} W_{K12} &= - \int_1^2 (p - p_a) dV \\ &= - \int_1^2 p dV + p_a (V_2 - V_1) \end{aligned}$$

die wirklich zugeführte Arbeit (Kolbenarbeit) ist also kleiner



- Innere Energie U:

- gesamte in einem System gespeicherte Energie
- zugehörige intensive Größe:

spezifische innere Energie $u := U / m$

- Aufgrund des 1. Hauptsatzes (Energieerhaltung) gilt: Die einem adiabatischen geschlossenen System zugeführte Volumenänderungsarbeit wird als innere Energie gespeichert:

$$U_2 - U_1 = - \int_1^2 p dV$$

oder differentiell:

$$dU = -pdV$$

- Insbesondere gilt: Die innere Energie ist eine Zustandsgröße, sie hängt nicht vom Weg ab.
 - statistische Interpretation: erhöhte innere Energie bedeutet höhere kinetische (ggf. auch potentielle) Energie der Moleküle.
 - Nullpunkt der inneren Energie: wird je nach betrachteten Prozessen sinnvoll vereinbart. Z.B. wird man die in den chemischen Bindungen steckende Energie nur berücksichtigen, wenn sie sich im Prozessverlauf ändert.
- Wärme:

nur aufgrund von Temperaturdifferenzen einem System zufließende oder abfließende Energie

gebräuchliches Formelzeichen: Q

Folgerung aus dem 1. Hauptsatz für geschlossenes System: Gesamte an einem System verrichtete Arbeit (als Wärme oder als Volumenänderungsarbeit) wird als innere Energie gespeichert. Differentiell:

$$dU = dQ - pdV$$

Da U wegunabhängig, W_V wegabhängig, ist auch Q wegabhängig, also keine Zustandsgröße.

- Dissipationsarbeit:

durch äußere und innere Reibungsverluste zusätzlich im System auftretende Energie

entspricht nicht-reversiblen Anteilen am Energietransport

ist immer positiv, d.h. erhöht die innere Energie des Systems:

$$dU = dQ - pdV + dW_{\text{diss}}$$

Beispiele:

- Reibung an der Kolbenwand
- innere Reibung im System (Viskosität)

- Aufgaben:

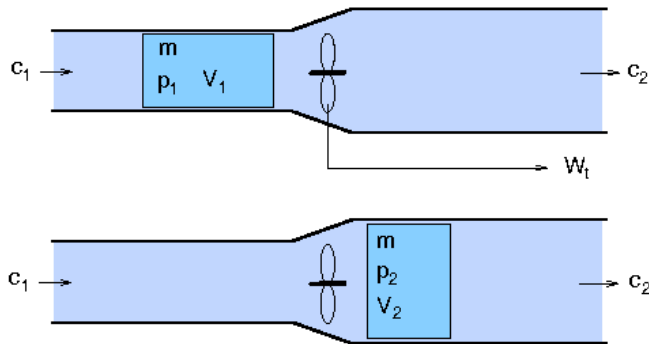
Aufgabe 5

Energieübertragung am offenen System



- Beispielsystem:

Strömung durch ein Rohr



adiabatisch (ohne Wärmeübergang)

mit gleicher Zuström- und Abström-Geschwindigkeit ($c_1 = c_2$)

Anfangszustand 1: vor der Welle, Endzustand 2: nach der Welle

Wir betrachten als System eine feste durchfließende Stoffmenge m mit Volumina V_1 und V_2 vor bzw. nach der Welle

- innere und technische Arbeit:

am System verrichtete Arbeit (durch die Welle charakterisiert):

$$W_{i12} \text{ (innere Arbeit)}$$

Aufteilung in reversiblen und dissipativen Anteil

$$W_{i12} = W_{t12} + W_{diss12}$$

W_{t12} : **technische Arbeit**

- Energiebilanz:

Einschubarbeit $p_1 V_1$: Arbeit, um Stoffmasse m bei Eingangsdruck p_1 ins Rohr zu schieben (mit gedachtem Eintrittskolben)

Ausschubarbeit $-p_2 V_2$: Arbeit, die die Stoffmasse m bei Ausgangsdruck p_2 abgibt (an gedachten Austrittskolben)

Verschiebearbeit $p_1 V_1 - p_2 V_2$

Änderung der inneren Energie:

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= W_{i12} + p_1 V_1 - p_2 V_2 \\ \Rightarrow W_{i12} &= (U_2 + p_2 V_2) - (U_1 + p_1 V_1) \end{aligned}$$

- Enthalpie H :

definiert als

$$H := U + p V$$

Zustandsgröße

charakterisiert den Energiegehalt eines Stoffstroms (incl. zum Strömen aufgebrauchte Schubarbeit)

spezifische Enthalpie $h := H / m$

Energiebilanz:

$$H_2 - H_1 = W_{i12}$$

differentiell:

$$dH = dU + d(pV) = dU + p dV + V dp$$

- Energiebilanz mit Wärmeübertragung:

mit zusätzlicher Wärmemenge Q_{12}

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= Q_{12} + W_{i12} + p_1 V_1 - p_2 V_2 \\ \Rightarrow H_2 - H_1 &= Q_{12} + W_{i12} \\ &= Q_{12} + W_{t12} + W_{diss12} \end{aligned}$$

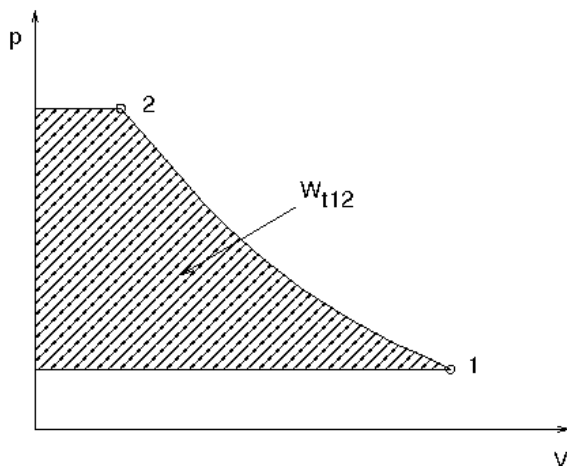
differentiell:

$$\begin{aligned} dU &= dQ - p dV + dW_{diss} \\ \Rightarrow dH &= dQ - p dV + dW_{diss} + p dV + V dp \\ &= dQ + V dp + dW_{diss} \\ \Rightarrow H_2 - H_1 &= Q_{12} + \int_1^2 V dp + W_{diss,12} \end{aligned}$$

Vergleich liefert

$$W_{t12} = \int_1^2 V dp$$

Interpretation der technischen Arbeit als Fläche:



- Hubarbeit und Beschleunigungsarbeit:

Berücksichtigung von Änderungen der Strömungsgeschwindigkeit:

$$W_{besch12} = m/2 (c_2^2 - c_1^2) \quad \text{(Beschleunigungsarbeit)}$$

Berücksichtigung von Änderungen der Höhe im Schwerfeld (abfallendes oder ansteigendes Rohr):

$$W_{hub12} = mg(z_2 - z_1) \quad \text{(Hubarbeit)}$$

Energiebilanz:

$$H_2 - H_1 = Q_{12} + \int_1^2 V dp + \frac{1}{2} m (c_2^2 - c_1^2) + mg(z_2 - z_1) + W_{diss,12}$$

zusätzliche Terme werden der technischen Arbeit zugerechnet:

$$W_{t12} = \int_1^2 V dp + \frac{1}{2} m (c_2^2 - c_1^2) + mg(z_2 - z_1)$$

Technische Arbeit ist die gesamte am offenen System reversibel verrichtete Arbeit.

- Aufgaben:

Aufgabe 6

Kalorische Zustandsgleichung und Wärmekapazität



- Kalorische Zustandsgleichung:

Zustand eines homogenen Systems durch zwei Größen charakterisiert. Daher können innere Energie und Enthalpie als Funktionen von z.B. T und p oder T und v angegeben werden. Diese Beziehungen heißen kalorische Zustandsgleichungen.

Zweckmäßige Wahl (vgl. differentielle Energiebilanzen):

$$u = u(T, v)$$

$$h = h(T, p)$$

vollständiges Differential:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp$$

- Spezifische Wärmekapazitäten:

partielle Ableitungen nach der Temperatur:

$$c_v := \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$$

spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$$c_p := \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p$$

spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck

auf die Masse bezogen (spezifisch)

i.a. von der Temperatur und vom Volumen bzw. Druck abhängig

c_v aus Wärmemessung bei konstantem Volumen bestimmbar:

$$\begin{aligned} du &= dU/m = dQ/m - pdv + dW_{diss}/m \\ &= (dQ + dW_{diss})/m \quad (dv = 0) \\ &= c_v dT \end{aligned}$$

integriert:

$$m \int_1^2 c_v dT = Q_{12} + W_{diss12} \quad (\text{bei konstantem Volumen})$$

analog:

$$m \int_1^2 c_p dT = Q_{12} + W_{diss12} \quad (\text{bei konstantem Druck})$$

- Spezialfall:

c_v hänge nicht von T ab, keine Reibung

damit

$$Q_{12} = m c_v (T_2 - T_1)$$

in Worten:

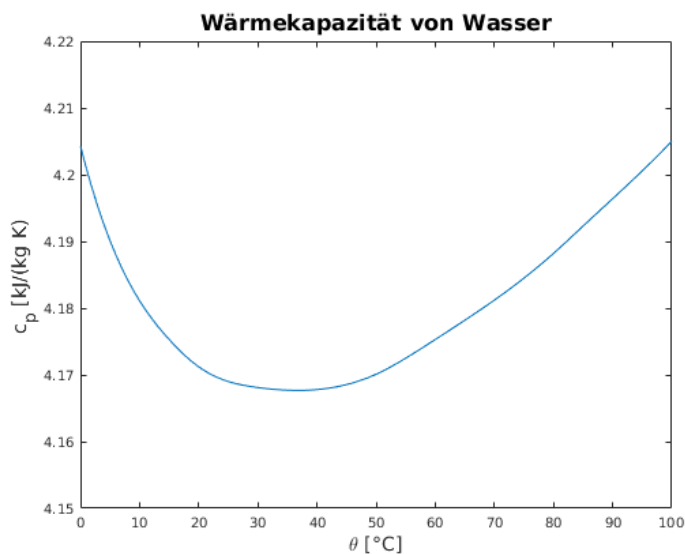
Spezifische Wärmekapazität gibt die benötigte Wärmemenge an, um 1 kg eines Stoffes um 1 K zu erwärmen. Geschieht dies bei konstantem Volumen, erhält man c_v , bei konstantem Druck

c_p .

c_V und c_p sind Stoffeigenschaften, Werte tabelliert

- Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit in der Praxis:

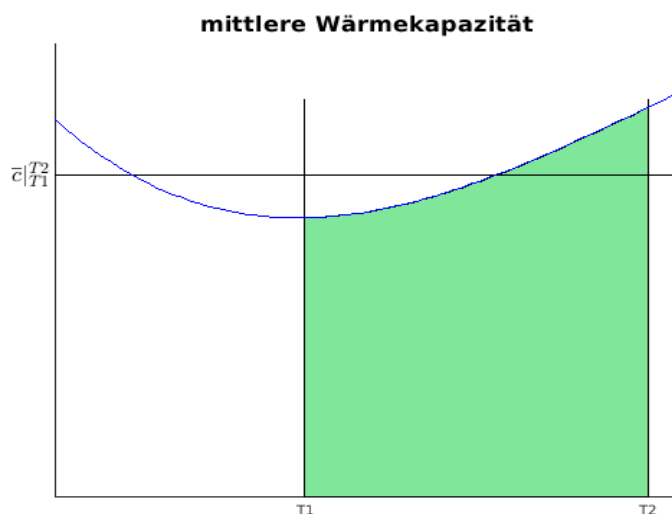
Funktion $c(T)$ in der Regel kompliziert, etwa c_p von Wasser bei Normaldruck (1.01325 bar):



in der Praxis für bestimmte Temperaturbereiche gemittelte Werte:

$$\bar{c}|_{T_1}^{T_2} := \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} c dT$$

anschaulich: Mittelwert liefert gleiche Fläche



in Tafeln meist auf feste untere Temperatur $T_0 = 0^\circ\text{C}$ bezogen

Berechnung von \bar{c} aus Tafelwerten:

$$\bar{c}|_{T_1}^{T_2} = \frac{(T_2 - T_0)\bar{c}|_{T_0}^{T_2} - (T_1 - T_0)\bar{c}|_{T_0}^{T_1}}{T_2 - T_1}$$

- Temperatenausgleich:

Mischung zweier Stoffe A, B mit unterschiedlicher Temperatur \rightarrow mittlere Temperatur stellt sich ein.

Bestimmung der Mischtemperatur aus der Wärmebilanz (adiabatisch):

$$Q_{a, Mi} + Q_{b, Mi} = 0$$

Wärme geht vom wärmeren zum kälteren Stoff bis zum Gleichgewicht.

Damit:

$$m_a \bar{c}_a \Big|_{T_a}^{T_{Mi}} (T_{Mi} - T_a) + m_b \bar{c}_b \Big|_{T_b}^{T_{Mi}} (T_{Mi} - T_b) = 0$$

$$\Rightarrow T_{Mi} = \frac{m_a \bar{c}_a \Big|_{T_a}^{T_{Mi}} T_a + m_b \bar{c}_b \Big|_{T_b}^{T_{Mi}} T_b}{m_a \bar{c}_a \Big|_{T_a}^{T_{Mi}} + m_b \bar{c}_b \Big|_{T_b}^{T_{Mi}}}$$

- Problem bei der Temperaturberechnung:

Wärmekapazität für Bereich bis T_{Mi} benötigt, aber T_{Mi} ist nicht bekannt!

Lösung in der Praxis: Schätzwert für T_{Mi} ergibt Schätzwert für c . Bei nicht zu starker Temperaturabhängigkeit von c ist die Näherung ok.

Ist die sich aus dem Schätzwert ergebende Wärmekapazität sehr verschieden von dem Wert, der sich aus der berechneten Mischtemperatur ergibt, wiederholt man das Verfahren mit dem berechneten Wert als neuem Schätzwert.

- Aufgaben:

[Aufgabe 7](#)

[Aufgabe 8](#)

Eigenschaften des idealen Gases



- Definition des idealen Gases
- Thermische Zustandsgleichung
- Kalorische Zustandsgleichung
- Zustandsänderungen
- Kreisprozesse

Definition des idealen Gases



- **Ideales Gas:**

Gasteilchen sind punktförmig (keine Ausdehnung)

Gasteilchen üben keine Kräfte aufeinander aus (keine Wechselwirkung)

darüber hinaus häufig konstante Wärmekapazität angenommen (**perfektes Gas**)

- **Reale Gase:**

Näherung des idealen Gases gut bei niedrigem Druck oder hoher Temperatur (z.B. für Luft, Wasserstoff und Edelgase unter Normalbedingungen)

Abweichung in der thermische Zustandsgleichung vor allem bei Molekülen mit starken Anziehungskräften (z. B. H_2O)

kalorische Zustandsgleichung für perfektes Gas (konstantes c_p) sehr gut bei Edelgasen

mehratomige Gase können neben der kinetischen Energie der Moleküle noch weitere Energie aufnehmen (als Rotation oder Schwingung), daher

- innere Energie wird in internen Freiheitsgraden "versteckt"
- Wärmekapazität ist temperaturabhängig

Thermische Zustandsgleichung



- Gesetze von Boyle-Mariotte und Gay-Lussac:

bei konstanter Temperatur gilt (Boyle-Mariotte):

$$p V = \text{const.}$$

bei konstantem Druck hat man (Gay-Lussac):

$$V/T = \text{const.}$$

- Thermische Zustandsgleichung des idealen Gases:

- bezogen auf Zahl der Teilchen N (folgt aus der statistischen Mechanik):

$$p V = N k_B T$$

k_B : Boltzmann-Konstante, wichtige Naturkonstante

$$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

- bezogen auf Stoffmenge n (in Mol):

$$p V = (N/N_A) (N_A k_B) T =: n R T$$

R : universelle Gaskonstante, unabhängig von der Stoffart

$$R = N_A k_B = 8.3145 \text{ kJ/(kmol K)}$$

- bezogen auf die Masse $m = n M$:

$$p V = m (R/M) T =: m R_i T$$

$$\Rightarrow p v = R_i T$$

$R_i = R/M$: spezifische Gaskonstante

- Molvolumen V_m :

Volumen eines Mols eines idealen Gases bei Normalbedingungen $p = 1.01325 \text{ bar}$, $T = 273.15 \text{ K}$ beim idealen Gas gegeben durch

$$V_m = R T / p = 22.414 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

in Worten: Ein Mol eines idealen Gases unter Normalbedingungen hat ein Volumen von 22.414 l

- Volumen-Ausdehnung beim idealen Gas:

Ausdehnungskoeffizient γ ist oben definiert worden als

$$\gamma(T) := 1/V \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

mit $V = (nR/p) * T$:

$$\gamma(T) = 1/V nR/p = 1/T$$

- Aufgaben:

Aufgabe 9

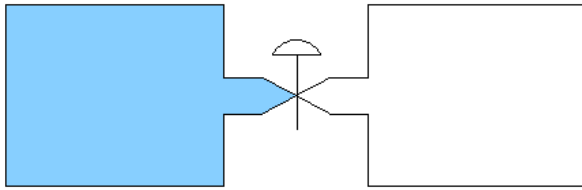
Aufgabe 10

Kalorische Zustandsgleichung



- Überströmversuch:

(ideales) Gas expandiert in ein Vakuum hinein:



Beobachtung: Nach Ausgleich anfänglicher Temperaturunterschiede ist die Endtemperatur gleich der Anfangstemperatur.

Interpretation mit Hilfe der kalorischen Zustandsgleichung

$$du = c_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv$$

- $du = 0$, denn $dQ = 0$ und $dW_V = 0$ (wegen $p = 0$)
- $dT = 0$ nach Beobachtung
- $\rightarrow u$ hängt nicht von v ab

- Kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases:

- Innere Energie hängt nicht vom (spezifischen) Volumen ab, also:

$$du = c_v(T) dT$$

integriert:

$$\begin{aligned} u_2 - u_1 &= \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT \\ &= \bar{c}_v|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

(letzteres nach Definition des Durchschnittswerts)

- für die spezifische Enthalpie ergibt sich:

$$h = u + p v = u + R_i T$$

hängt also auch nur von der Temperatur ab, nicht vom Druck

kalorische Zustandsgleichung für die Enthalpie:

$$dh = c_p(T) dT$$

integrierte Form analog zu u .

- Beziehung zwischen c_p und c_v :

Aus $h = u + R_i T$ folgt:

$$\begin{aligned} dh - du &= R_i dT \\ \Rightarrow c_p dT - c_v dT &= R_i dT \\ \Rightarrow c_p - c_v &= R_i \end{aligned}$$

Die Differenz der spezifischen Wärmen beim idealen Gas ist unabhängig von der Temperatur.

- Adiabatenkoeffizient κ :

definiert durch:

$$\begin{aligned}\kappa &:= \frac{c_p}{c_v} \\ &= \frac{c_v + R_i}{c_v} \\ &= 1 + \frac{R_i}{c_v}\end{aligned}$$

c_v steigt in der Regel mit T , κ sinkt dementsprechend.

nützliche Beziehung zwischen h und u beim idealen Gas:

$$dh = c_p dT = \kappa c_v dT = \kappa du$$

- Molare Wärmekapazität:

$C_{m,p}$ und $C_{m,v}$: auf ein Mol bezogen, d.h. mit der Molmasse M :

$$C_{m,p} = M c_p$$

$$C_{m,v} = M c_v$$

Differenz beider Größen:

$$C_{m,p} - C_{m,v} = M (c_p - c_v) = M R_i = R$$

Die Differenz der molaren Wärmekapazitäten beim idealen Gas ist unabhängig von der Temperatur und von der Stoffart.

Aus der Differenz und dem Verhältnis $C_{m,p} / C_{m,v} = \kappa$ kann man beide Größen auf κ zurückführen:

$$\begin{aligned}C_{m,v} &= \frac{1}{\kappa - 1} R \\ C_{m,p} &= \frac{\kappa}{\kappa - 1} R\end{aligned}$$

- Folgerung aus der statistischen Mechanik:

innere Energie bei insgesamt f Freiheitsgraden

$$\begin{aligned}U &= \frac{f}{2} N k_B T = \frac{f}{2} m R_i T \\ \Rightarrow u &= \frac{U}{m} = \frac{f}{2} R_i T \\ \Rightarrow c_v &= \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_V = \frac{f}{2} R_i \\ \Rightarrow c_p &= c_v + R_i = \frac{f+2}{2} R_i \\ \Rightarrow \kappa &= \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{2}{f}\end{aligned}$$

- Folgerung beim einatomigen Gas:

3 Translationsfreiheitsgrade (Bewegung in 3 Raumrichtungen)

$$f = 3$$

$$\kappa = 5/3$$

$$c_v = 3/2 R_i$$

c_v ist temperatur-unabhängig (**perfektes Gas**)

- Folgerung beim zweiatomigen Gas:

Zahl der Freiheitsgrade f :

- 3 Translationsfreiheitsgrade
- 2 Rotationsfreiheitsgrade (Achsen senkrecht zur Hantel)

- 2 Schwingungsfreiheitsgrade (für eine Schwingungsform)

Rotationen brauchen bestimmte Mindestenergien (Quantenmechanik!), daher erst bei mittleren Temperaturen ($> 100 \dots 200 \text{ K}$) wirksam

Drehung um Hantelachse braucht sehr hohe Anregungs-Energie \hbar^2/J , da das Trägheitsmoment sehr niedrig

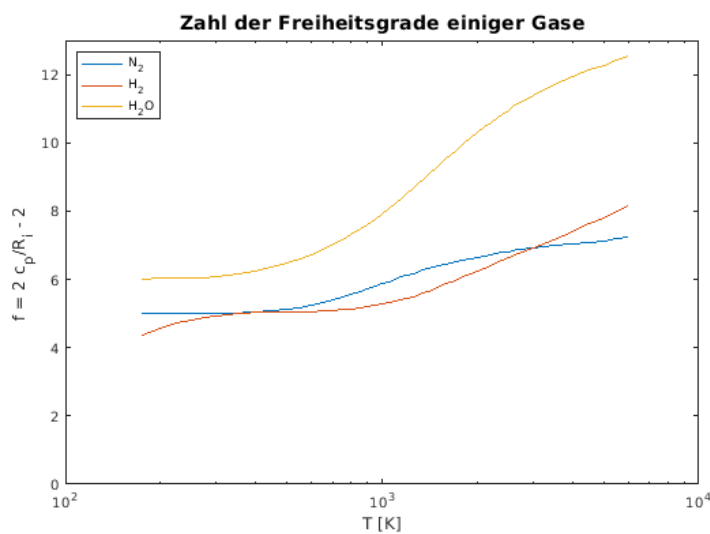
Schwingungen brauchen noch höhere Energien, sind daher typischerweise erst ab $T > 1000\text{K}$ aktiv
 f , c_v und κ also temperaturabhängig

- Verhältnisse beim mehratomigen Gas:

viele verschiedene Rotations- und Schwingungsfreiheitsgrade

komplizierte Temperaturabhängigkeit von f und c_v

reale Werte für die "Zahl der Freiheitsgrade" aus Messung von c_p :



- Aufgaben:

Aufgabe 11

Aufgabe 12

Zustandsänderungen



- Allgemeines
- Isochore
- Isobare
- Isotherme
- Isentrope
- Polytrope

- Einleitung:

betrachten Zustandsänderungen für vorgegebenen Prozess

veranschaulichen Änderungen jeweils im p-V-Diagramm

vernachlässigen Dissipation (reversibel)

keine Hub- und Beschleunigungsarbeit

- Berechnung aller relevanten Größen:

Zusammenhang zwischen p, V, T aus der thermischen Zustandsgleichung

innere Energie und Enthalpie werden nicht gesondert berechnet, ergeben sich jeweils aus

$$u_2 - u_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_v(T) dT$$

$$h_2 - h_1 = \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT$$

Volumenänderungsarbeit bei geschlossenen Systemen aus

$$W_{V12} = - \int_1^2 p dV$$

technische Arbeit bei offenen Systemen mit

$$W_{t12} = \int_1^2 V dp$$

Q aus Energiebilanz

$$dU = dQ - p dV$$

$$dH = dQ + V dp$$

- Bemerkungen:

betrachtet wird jeweils eine Richtung (Erhöhung des Drucks etc.)

Formeln für Energieflüsse der anderen Richtung identisch (Vorzeichen ergeben sich)!

- Definition:

Zustandsänderung bei konstantem Volumen

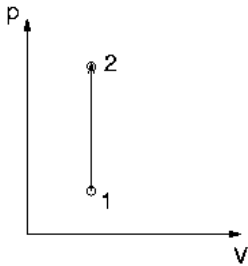
- Thermische Größen:

$V = \text{const.}$

Zusammenhang zwischen p und T :

$$p_1/T_1 = p_2 / T_2$$

im Bild:



- Energien:

Volumenänderungsarbeit

$$W_{V12} = 0$$

Wärme

$$\begin{aligned} Q_{12} &= U_2 - U_1 \\ &= m \int_{T_1}^{T_2} c_V(T) dT \\ &= m \bar{c}_v \Big|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

technische Arbeit:

$$W_{t12} = V_1 (p_2 - p_1) = m R_i (T_2 - T_1)$$

zugeführte Wärme wird vollständig in innere Energie überführt.

- Definition:

Zustandsänderung bei konstantem Druck

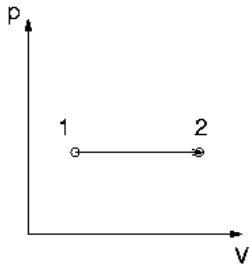
- Thermische Größen:

$p = \text{const.}$

Zusammenhang zwischen V und T:

$$V_1 / T_1 = V_2 / T_2$$

im Bild:



- Energien:

Volumenänderungsarbeit

$$W_{V12} = p_1 (V_1 - V_2) = m R_i (T_1 - T_2)$$

Wärme

$$\begin{aligned} Q_{12} &= H_2 - H_1 \\ &= m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \\ &= m \bar{c}_p \Big|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

technische Arbeit

$$W_{t12} = 0$$

zugeführte Wärme wird teilweise bei Volumenänderung wieder abgegeben, teilweise in innere Energie umgewandelt.

- Definition:

Zustandsänderung bei konstanter Temperatur

- Thermische Größen:

$T = \text{const.}$

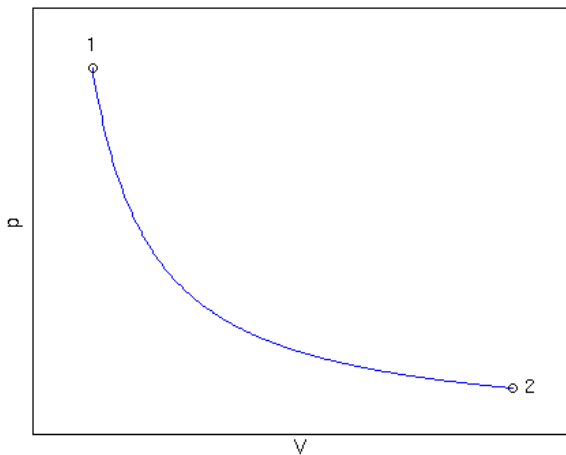
Zusammenhang zwischen p und V :

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 = m R_i T$$

Prozessverlauf

$$p = m R_i T \frac{1}{V} \quad (\text{Hyperbel})$$

im Bild:



- Energien:

Volumenänderungsarbeit

$$\begin{aligned} W_{V12} &= - \int_1^2 \frac{m R_i T}{V} dV \\ &= m R_i T \ln \frac{V_1}{V_2} \\ &= p_1 V_1 \ln \frac{p_2}{p_1} \end{aligned}$$

innere Energie bleibt konstant

Wärme

$$Q_{12} = - W_{V12}$$

technische Arbeit:

$$\begin{aligned} W_{t12} &= \int_1^2 \frac{m R_i T}{p} dp \\ &= m R_i T \ln \frac{p_2}{p_1} \\ &= W_{V12} \end{aligned}$$

zugeführte Wärme wird vollständig zur Volumenausdehnung verwendet.

- Definition:
Zustandsänderung ohne Wärmeübergang (adiabat)
auch **Adiabate** genannt

- Beziehung zwischen p und V:

- Aus der Energiebilanz folgt:

$$dQ = dU + p dV = m c_V dT + p dV = 0$$

$$\Rightarrow m dT = - p dV / c_V \quad (*)$$

analog über die Enthalpie:

$$\begin{aligned} dQ &= dH - V dp \\ &= m c_p dT - V dp \\ &= - \frac{c_p p dV}{c_V} - V dp \quad \text{mit } (*) \\ &= -\kappa p dV - V dp = 0 \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= -\kappa \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

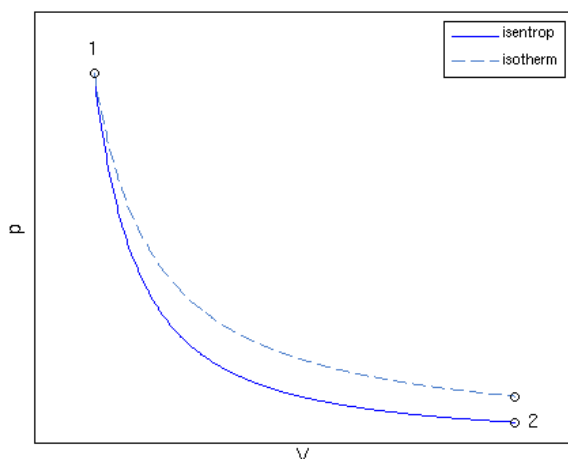
Integrieren (unter der Annahme $\kappa(T) = \text{const.}$):

$$\begin{aligned} \ln(p_2/p_1) &= -\kappa \ln(V_2/V_1) = \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\kappa \\ \Rightarrow p_2/p_1 &= (V_1/V_2)^\kappa \\ \Rightarrow p_1 V_1^\kappa &= p_2 V_2^\kappa = \text{const.} \end{aligned}$$

- Prozessverlauf

$$p = p_1 V_1^\kappa 1/V^\kappa$$

- Isentropen fallen steiler als Isothermen, da $\kappa > 1$
- im Bild:



- Beziehungen für T:

Wegen $pV/T = \text{const.}$ gilt

$$\begin{aligned} p_2/p_1 &= \frac{T_2 V_1}{V_2 T_1} \\ &= (V_1/V_2)^\kappa \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} T_1/T_2 &= (V_2/V_1)^{(\kappa-1)} \\ &= (p_1/p_2)^{(\kappa-1)/\kappa} \end{aligned}$$

- Energien:

- Volumenänderungsarbeit

$$W_{V12} = -p_1 V_1^\kappa \int_1^2 dV/V^\kappa$$

Ausintegrieren und Umformen ergibt

$$W_{V12} = \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} - 1 \right]$$

Ersetzen von V durch T:

$$\begin{aligned} W_{V12} &= \frac{p_1 V_1}{\kappa - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \\ &= \frac{m R_i T_1}{\kappa - 1} \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \\ &= \frac{m R_i}{\kappa - 1} (T_2 - T_1) \end{aligned}$$

- ähnliche Beziehungen lassen sich für W_{t12} herleiten
- $Q_{12} = 0$, daher

$$W_{V12} = U_2 - U_1 = m \int_{T_1}^{T_2} c_V(T) dT$$

- Volumenausdehnung geschieht vollständig zu Lasten der inneren Energie.
- Analog

$$\begin{aligned} W_{t12} &= H_2 - H_1 = m \int_{T_1}^{T_2} c_p(T) dT \\ &= m \int_{T_1}^{T_2} \kappa(T) c_V(T) dT \\ &= \frac{\int_{T_1}^{T_2} \kappa(T) c_V(T) dT}{\int_{T_1}^{T_2} c_V(T) dT} W_{V12} \\ &=: \bar{\kappa}_{T_1}^{T_2} W_{V12} \end{aligned}$$

- Aufgaben:

Aufgabe 13

Aufgabe 14

Aufgabe 15

Polytrope

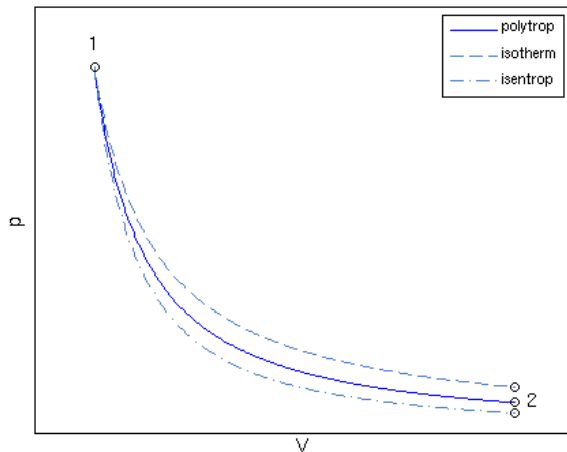
- Definition:

- Zustandsänderung gemäß der Beziehung

$$p V^n = \text{const.}$$

Polytropenexponent n , meistens $1 < n < \kappa$

- im Bild:



- beschreibt u.a. praktische auftretende Prozesse, bei denen Wärmeaustausch mit der Umgebung besteht, die aber zu schnell ablaufen, um isotherm zu sein
- enthält alle bisher betrachteten Prozesse als Sonderfälle:

n	Prozess
0	isobar
1	isotherm
κ	isentrop
∞	isochor

- wieso isochor:

$$\begin{aligned}
 pV^n &= \text{const} \Rightarrow V = \text{const}/p^{(1/n)} \\
 n &\rightarrow \infty \\
 \Rightarrow 1/n &\rightarrow 0 \\
 \Rightarrow p^{(1/n)} &\rightarrow 1 \\
 \Rightarrow V &\rightarrow \text{const.}
 \end{aligned}$$

- Beziehungen für T:

aus $pV/T = \text{const.}$ ergibt sich

$$T V^{n-1} = \text{const.}$$

$$p^{n-1} / T^n = \text{const.}$$

- Energien:

- Volumenänderungsarbeit ergibt sich genau wie im isentropen Fall mit n statt κ

$$\begin{aligned}
 W_{V12} &= \frac{p_1 V_1}{n-1} \left[\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{n-1} - 1 \right] \\
 &= \frac{m R_s}{n-1} (T_2 - T_1)
 \end{aligned}$$

kann auch mit der Wärmekapazität ausgedrückt werden. Mit

$$R_i = c_p - c_v = c_v (\kappa - 1)$$

erhält man

$$W_{V12} = m \overline{c_v} \left|_{T_1}^{T_2} \frac{\kappa - 1}{n - 1} (T_2 - T_1)\right.$$

- technische Arbeit analog zur Isentrope

$$W_{t12} = n W_{V12}$$

- Wärme

$$\begin{aligned} Q_{12} &= -W_{V12} + U_2 - U_1 \\ &= -m \overline{c_v} \left|_{T_1}^{T_2} \frac{\kappa - 1}{n - 1} (T_2 - T_1)\right. + m \overline{c_v} \left|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1)\right. \\ &= m \overline{c_v} \left|_{T_1}^{T_2} \frac{n - \kappa}{n - 1} (T_2 - T_1)\right. \\ &= W_{V12} \frac{n - \kappa}{\kappa - 1} \end{aligned}$$

- Wärmebilanz bei Expansion:

Bereich von n	T ₂ - T ₁	Q ₁₂
n > κ	< 0	< 0 (Wärme wird abgeführt)
n = κ	< 0	= 0 (adiabatisch)
1 < n < κ	< 0	> 0 (Wärme wird zugeführt)
n = 1	= 0	> 0 (Wärme wird zugeführt)
n < 1	> 0	> 0 (Wärme wird zugeführt)

- Aufgaben:

Aufgabe 16

- Einfacher Kreisprozess
- Arbeit beim reversiblen Kreisprozess
- Thermischer Wirkungsgrad
- Carnot-Prozess
- Wärmepumpe und Kältemaschine

Einfacher Kreisprozess



- thermodynamische Maschinen:

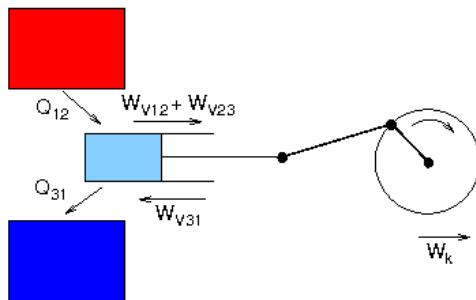
arbeiten kontinuierlich

geschlossenes System: nach gewünschter Prozessführung muss System möglichst geschickt wieder in den Ausgangszustand gebracht werden

offenes System: Arbeitsstoff (Wasser, Dampf, etc.) wird in den Ausgangszustand gebracht und dem System wieder zugeführt (Stoff-Kreislauf)

- Beispiel-Maschine:

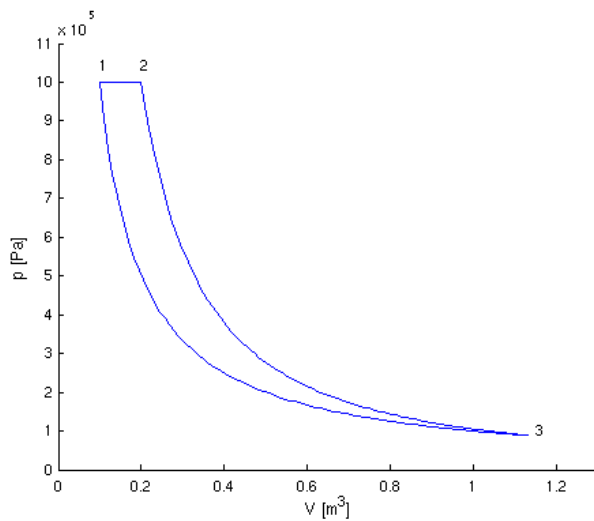
geschlossenes System:



arbeitet in drei Schritten:

1. System wird erwärmt und dehnt sich isobar aus
2. System wird thermisch isoliert, dehnt sich adiabatisch aus, bis die Anfangstemperatur erreicht ist
3. System wird isotherm komprimiert bis zum Ausgangsvolumen

im p-V-Diagramm:



Nettoeffekt:

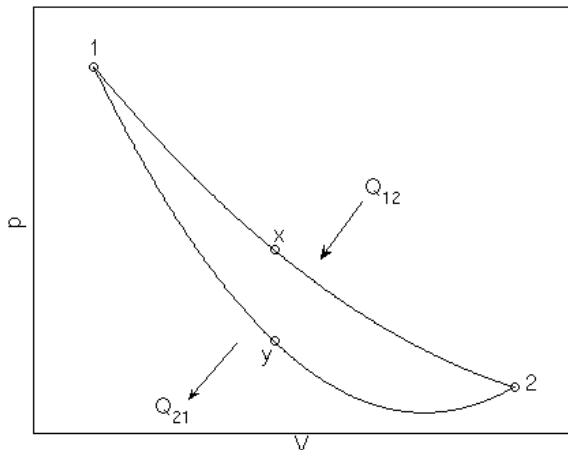
- Wärme fließt vom Heiz- zum Kühlsystem
- Kurbelwelle dreht sich

verwandelt Wärme in mechanische Arbeit

Arbeit beim reversiblen Kreisprozess



- Beispielprozess Kolbenmaschine:
im p-V-Diagramm



Weg 1-x-2:

- Gas expandiert
- gibt Volumenänderungsarbeit $W_{V12} < 0$ an Energiespeicher ab (z.B. Kurbelwelle oder Feder)
- nimmt Wärme Q_{12} auf

Weg 2-y-1:

- Gas wird verdichtet
- nimmt Volumenänderungsarbeit $W_{V21} > 0$ vom Energiespeicher auf
- gibt dabei Wärme Q_{21} ab

- Arbeit W_k des Kreisprozesses:

Summe aller zu- und abgeführten Volumenänderungsarbeiten
wegen 1. Hauptsatz:

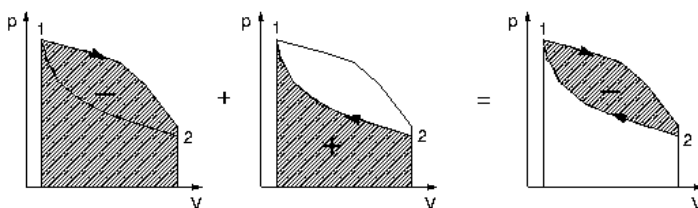
$$\begin{aligned} Q_{12} + W_{V12} &= U_2 - U_1 \\ &= -(U_1 - U_2) \\ &= -(Q_{21} + W_{V21}) \\ \Rightarrow W_k &= W_{V12} + W_{V21} = -(Q_{12} + Q_{21}) \end{aligned}$$

allgemein:

$$W_k = \Sigma W_V = - \Sigma Q$$

- W_k im p-V-Diagramm:

W_V ist gegeben durch Fläche unter der p-V-Kurve, daher:



$-W_k$ ist die im p-V-Diagramm vom Kreisprozess umschlossene Fläche

- rechtslaufender Kreisprozess:

$$W_k < 0, \Sigma Q > 0$$

Gesamteffekt: Wärme wird aufgenommen und Volumenarbeit abgegeben

Wärmeanlage

Wärmezufuhr (etwa bei x) bei höherer Temperatur als Wärmeabfuhr (bei y)

- linkslaufender Kreisprozess:

$$W_k > 0, \sum Q < 0$$

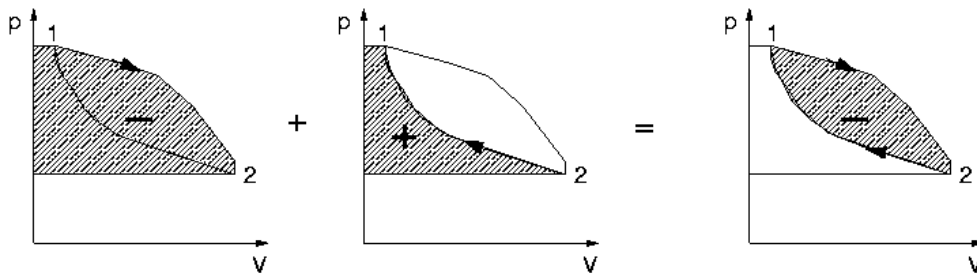
Gesamteffekt: Volumenarbeit wird hineingesteckt und Wärme abgegeben

Wärmepumpe oder Kältemaschine

Wärmezufuhr (etwa bei y) bei niedrigerer Temperatur als Wärmeabfuhr (bei x)

- Technische Arbeit im Kreisprozess:

gegeben durch Fläche $V(p)$:



W_k ist auch die Summe der technischen Arbeiten beim offenen System

Thermischer Wirkungsgrad



- Thermischer Wirkungsgrad η einer Wärmekraftmaschine:
Verhältnis von gewonnener Nutzarbeit zu hineingestecktem Aufwand
Gewichtung der Arbeiten
- beim rechtslaufenden Kreisprozess:
Wärme Q_{zu} wird hineingesteckt
Arbeit $|W_k|$ ist der Nutzeffekt
Wärme Q_{ab} ist nutzlose Abwärme
also:
$$\eta = |W_k| / Q_{zu}$$
- Aufgaben:
Aufgabe 17

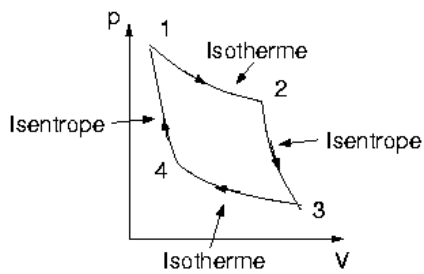
- Carnot'scher Kreisprozess:

wichtiger Vergleichsprozess

gegeben durch vier Schritte:

1. isotherme Expansion
2. adiabatische Expansion
3. isotherme Kompression
4. adiabatische Kompression

im p-V-Diagramm:



- Berechnung der Nutzarbeit:

W_k ist gegeben durch

$$W_k = - \sum Q$$

$$= -(Q_{12} + Q_{34}) \quad (Q_{23} = Q_{41} = 0)$$

Isotherme 12 und 34, daher

$$Q_{12} = - p_1 V_1 \ln(p_2/p_1)$$

$$= m R_i T_1 \ln(V_2/V_1)$$

$$Q_{34} = m R_i T_3 \ln(V_4/V_3)$$

Isothermen:

$$T_1 = T_2, \quad T_3 = T_4$$

Adiabatzen:

$$T_4 / T_1 = (V_1 / V_4)^{(\kappa - 1)}$$

$$T_2 / T_3 = (V_3 / V_2)^{(\kappa - 1)}$$

zusammen:

$$T_3 / T_1 = T_4 / T_1 = (V_1 / V_4)^{(\kappa - 1)}$$

$$= T_3 / T_2 = (V_2 / V_3)^{(\kappa - 1)}$$

$$\Rightarrow (V_1 / V_4) = (V_2 / V_3)$$

$$\Rightarrow (V_4 / V_3) = (V_1 / V_2)$$

also für Q_{34}

$$Q_{34} = m R_i T_3 \ln(V_1 / V_2) = - m R_i T_3 \ln(V_2 / V_1)$$

$$= - Q_{12} T_3 / T_1$$

schließlich:

$$W_k = -(Q_{12} + Q_{34})$$

$$= -Q_{12} (1 - T_3 / T_1)$$

- Thermischer Wirkungsgrad des Carnot-Prozesses:

nach Definition:

$$\eta = -W_k / Q_{12}$$

$$= 1 - T_3 / T_1$$

bestmöglicher Wirkungsgrad zwischen Temperaturen T_3 und T_1 (s.u.)

Wirkungsgrad besser bei höherer Temperatur T_1 der Wärmezufuhr und niedrigerer Temperatur T_3 der Wärmeabfuhr

$\eta = 0$ bei $T_3 = T_1$, d.h. keine Nutzarbeit ohne Temperaturgefälle

$\eta < 1$ für $T_3 > 0$. Eine vollständige Umwandlung von Wärme in Arbeit geht nicht, weil sich die Temperatur $T_3 = 0$ nicht erreichen lässt.

- Aufgaben:

Aufgabe 18

Wärmepumpe und Kältemaschine



- linkslaufender Kreisprozess:

Volumenarbeit wird benutzt, um Wärme von einem kälteren in einen wärmeren Raum zu pumpen.

Warmer Raum wird wärmer, Umgebung wird kälter (Wärmepumpe)

Kalter Raum wird kälter, Umgebung wird wärmer (Kältemaschine)

- Leistungszahl ε :

Nutzen/Aufwand (wie Wirkungsgrad)

Wärmepumpe:

- Nutzen: abgegebene Wärme der Maschine
- Aufwand: Volumenarbeit

$$\varepsilon_w := |Q_{ab}| / W_k$$

Kältemaschine:

- Nutzen: aufgenommene Wärme der Maschine
- Aufwand: Volumenarbeit

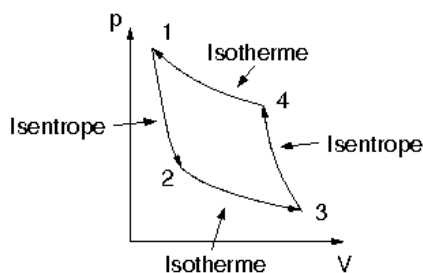
$$\varepsilon_k := Q_{zu} / W_k$$

Zusammenhang zwischen ε_w und ε_k :

$$\varepsilon_w = 1 + \varepsilon_k$$

- linkslaufender Carnot-Prozess:

im p-V-Diagramm



Leistung der Wärmepumpe

$$\varepsilon_w = Q_{41} / (Q_{41} + Q_{23})$$

$$= 1 / (1 - T_3 / T_1)$$

$$= 1 / \eta_{\text{Carnot}} > 1$$

Mehr Heizenergie wird aus der Umgebung geliefert, als die Pumpe selbst aufwenden muss.

Leistung der Kältemaschine:

$$\varepsilon_k = Q_{23} / -(Q_{41} + Q_{23})$$

$$= -1 / (-T_1 / T_3 + 1)$$

$$= T_3 / (T_1 - T_3)$$

- Aufgaben:

Aufgabe 19

Aufgabe 20

Aufgaben



- 🔦 Aufgabe 1
- 🔦 Aufgabe 2
- 🔦 Aufgabe 3
- 🔦 Aufgabe 4
- 🔦 Aufgabe 5
- 🔦 Aufgabe 6
- 🔦 Aufgabe 7
- 🔦 Aufgabe 8
- 🔦 Aufgabe 9
- 🔦 Aufgabe 10
- 🔦 Aufgabe 11
- 🔦 Aufgabe 12
- 🔦 Aufgabe 13
- 🔦 Aufgabe 14
- 🔦 Aufgabe 15
- 🔦 Aufgabe 16
- 🔦 Aufgabe 17
- 🔦 Aufgabe 18
- 🔦 Aufgabe 19
- 🔦 Aufgabe 20

Aufgabe 1



- Ein Quecksilber-Manometer wird an ein Unterdruckgefäß angeschlossen. Die Säule sinkt auf eine Höhendifferenz von 50 cm. Wie groß ist der Unterdruck im Gefäß?

- Zur Lösung benötigen Sie:

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2 \text{ (Schwerebeschleunigung)}$$

$$\rho = 13600 \text{ kg/m}^3 \text{ (Dichte von Quecksilber)}$$

- Lösung

Aufgabe 2



- Ein Druckbehälter mit einem Volumen von 7.36 m^3 enthalte 1370 kg Äthan (C_2H_6). Welche Werte haben spezifisches Volumen, Dichte und Molvolumen (Volumen für ein Mol)? Welche Stoffmenge befindet sich im Behälter?
- Benutzen Sie die Molmasse $M = 30.05 \text{ kg/kmol}$. Können Sie diesen Wert erklären?
- Lösung

Aufgabe 3



- Eine 1000 m lange Fernheizleitung aus Stahl mit 0.30% Kohlenstoff wird bei 20 °C verlegt. Die maximale Leitungstemperatur beträgt 120°C, die minimale 10 °C. Wie lang ist die Leitung dann jeweils?
- Nehmen Sie für den Ausdehnungskoeffizienten den konstanten Wert

$$\alpha = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K}$$

- Lösung

Aufgabe 4

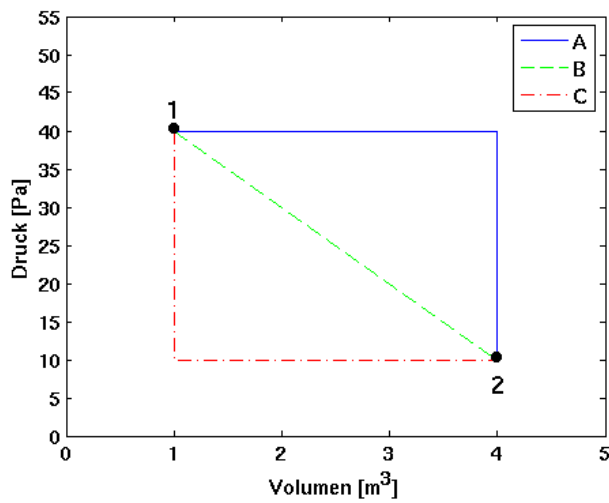


- Ein figurbewusster Ingenieurstudent kommt auf die Idee, Eiswasser zu trinken, um abzunehmen. Der Körper erwärmt das Wasser von 0°C auf 37°C Körpertemperatur. Er verbraucht dazu das körpereigene Fett, das einen Energiegehalt von 32 kJ/g hat. Wieviel Wasser muss er trinken, um so ein Pfund (0.5 kg) abzunehmen?
- Lösung

Aufgabe 5



- Eine Gasprobe wird reversibel vom Anfangszustand ($p_1 = 40 \text{ Pa}$, $V_1 = 1 \text{ m}^3$) in den Endzustand ($p_2 = 10 \text{ Pa}$, $V_2 = 4 \text{ m}^3$) überführt. Welche Volumenänderungsarbeit leistet das Gas jeweils für die drei Wege A, B, C gemäß der Abbildung?



- Während des Wegs B werde die Wärmemenge $Q_B = 100 \text{ J}$ vom System aufgenommen. Berechnen Sie die Energiedifferenz $U_2 - U_1$ und die längs der Wege A und C aufgenommenen Wärmemengen.
- Lösung

Aufgabe 6



- Einer adiabaten Maschine strömen 10.0 m^3 Luft mit 5 bar zu. Die Luft gibt in der Maschine die innere Arbeit 6.04 MJ ab und tritt mit 1 bar aus, wobei sich das Luftvolumen auf 34.5 m^3 vergrößert hat. Wie ändern sich Enthalpie und innere Energie der Luft während des Durchströmens, wenn man Änderungen der kinetischen und Lageenergie vernachlässigen kann?
- Lösung

Aufgabe 7



- a. 500 kg Aluminium sind durch Wärmezufuhr von 300 °C auf 500 °C zu erwärmen. Welche Wärmemenge ist zuzuführen?
- b. Wie groß ist die benötigte Wärmemenge bei einer Anfangstemperatur von 220 °C?
- spezifische Wärmekapazitäten von Aluminium (immer bei konstantem Druck):

$$\bar{c}_p \Big|_{0^\circ\text{C}}^{100^\circ\text{C}} = 0.908 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

$$\bar{c}_p \Big|_{0^\circ\text{C}}^{300^\circ\text{C}} = 0.954 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

$$\bar{c}_p \Big|_{0^\circ\text{C}}^{500^\circ\text{C}} = 0.992 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

- Lösung

Aufgabe 8



- Ein Stahlgussstück von 120 kg wird zum Härten in ein Ölbad von 550 kg gebracht, dessen Temperatur von 22 °C auf eine mittlere Temperatur von 65 °C ansteigt. Mit welcher Temperatur wurde der Stahl eingetaucht?
- Mittlere spezifische Wärme des Härteöls im betrachteten Bereich sei
 - $c_{\text{Öl}} = 1.7 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
- Mittlere spezifische Wärme des Stahls werde angenommen mit
 - $c_{\text{Stahl}} = 0.58 \text{ kJ}/(\text{kg K})$
- Lösung

Aufgabe 9



- In einer Stahlflasche von 10 l Inhalt befindet sich Sauerstoff von 20 °C und 50 bar. Für einen physikalischen Versuch wird Sauerstoff entnommen, wodurch der Flaschendruck auf 40 bar bei konstanter Temperatur fällt. Welche Sauerstoffmasse wurde entnommen? Welche Stoffmenge in mol ist das?
- Verwenden Sie die Molmasse $M_{O_2} = 32 \text{ kg / kmol}$
- Der entnommene Sauerstoff wird über ein Ventil auf einen Druck von 1.04 bar reduziert und mit einer Heizung auf 60 °C erwärmt. Welches Volumen nimmt er nun ein? Wieviel nimmt er unter Normalbedingungen ein?
- Lösung

Aufgabe 10



- Das beste Vakuum, das man im Labor erzeugen kann, liegt bei etwa 10^{-13} Pa. Wieviel Gasmoleküle pro cm^3 befinden sich in einem solchen Vakuum bei Zimmertemperatur (20 °C)? Wie stark sinkt der Druck, wenn der Vakuumbehälter mit flüssigem Wasserstoff auf 19 K gekühlt wird?
- Lösung

Aufgabe 11



- Ein Kohlendioxid-Strom von $\dot{m} = 5.668 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$ wird reversibel von der Anfangstemperatur $t_1 = 70.0 \text{ °C}$ mit einer Heizleistung von $\dot{Q}_{12} = 3.225 \text{ kW}$ isobar erhitzt. Welche Temperatur wird dabei erreicht?
- Hinweis 1: Den Wert der molaren Wärmekapazität bei 70 °C bestimmen Sie aus der **Tabelle** mit linearer Interpolation.
- Hinweis 2: Da die Wärmekapazität stark temperaturabhängig ist, müssen Sie zunächst einen Wert schätzen, dann iterieren, bis sich ein konsistenter Wert ergibt.
- **Lösung**

Aufgabe 12



- Bestimmen Sie aus der **Tabelle** von mittleren isobaren molaren Wärmekapazitäten für Sauerstoff, Kohlendioxid und Ammoniak Näherungswerte für die nicht-gemittelten Werte bei den angegebenen Temperaturen. Berechnen Sie daraus $f(T)$ für alle drei Gase und stellen es graphisch dar.
- Hinweis: Berechnen Sie z. B. $\overline{C_{m,p}} \Big|_{200^\circ\text{C}}^{300^\circ\text{C}}$ und verwenden Sie dies als Näherung für $C_{m,p}(250^\circ\text{C})$
- **Lösung**

Aufgabe 13



- Im Zylinder eines Verbrennungsmotors befindet sich 1 g Luft unter 45 bar und 590 °C. Während sich das Zylindervolumen beim Rückgang des Kolbens vergrößert, wird dem System durch eingespritzten und dabei verbrannten Brennstoff die Energie 2.0 kJ zugeführt. Die Brennstoffzufuhr wird so dosiert, dass der Druck im Zylinder konstant bleibt (Prinzip des Dieselmotors).
 1. Bestimmen Sie die thermischen Zustandsgrößen vor und nach der Brennstoffzufuhr.
 2. Welche Volumenänderungsarbeit wird vom Gas an den Kolben abgegeben?
 3. Wie ändern sich Enthalpie und innere Energie?
- Hinweis: Die Veränderung der Masse und Gaszusammensetzung im Zylinder sind zu vernachlässigen; auch nach der Verbrennung ist mit Luft zu rechnen. Der Vorgang verlaufe reversibel.
- Hinweis zur Beschleunigung der Rechnung: Für die Bestimmung der spezifischen Wärme c_p schätzen Sie mal 2200 °C als Endtemperatur ;-)

- Benötigte Tabellenwerte:

Molmasse von Luft: $M = 28.966 \text{ kg/kmol}$

spezifische Wärmekapazität von Luft:

$$\bar{c}_p|_{0^\circ\text{C}}^{590^\circ\text{C}} = 1.049 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

$$\bar{c}_p|_{0^\circ\text{C}}^{2200^\circ\text{C}} = 1.171 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

- Lösung

Aufgabe 14



- In einem gut gekühlten 10 l großen Zylinder wird Luft von 1 bar bei konstant bleibender Temperatur durch einen Kolben zunächst auf 1 l, dann auf 0.1 l reversibel verdichtet.
 1. Welche Volumenänderungsarbeit ist in jedem Schritt erforderlich?
 2. Wieviel Wärme wird jeweils zu- oder abgeführt?
 3. Wie ändern sich Druck, innere Energie und Enthalpie ?
- Lösung

Aufgabe 15



- In einem 10 l großen, adiabaten Zylinder wird Luft von 1 bar, 15 °C durch einen Kolben zunächst auf 1 l, dann auf 0.1 l reversibel verdichtet.
- Bestimmen Sie die thermischen und kalorischen Zustandsgrößen und die Volumenänderungsarbeit für jeden Schritt.
- Hinweis: Temperaturabhängigkeit von κ soll vernachlässigt werden. Rechnen Sie mit dem Wert $\kappa = 1.40$ für 0 °C.
- Lösung

Aufgabe 16



- Im Zylinder eines Verbrennungsmotors befinden sich 1 g Luft unter 29.5 bar und 945 °C. Während sich das Zylindervolumen beim Rückgang des Kolbens vergrößert, wird gleichzeitig Brennstoff eingespritzt und verbrannt. Dadurch findet eine Volumenvergrößerung mit dem Polytropenexponenten $n = -1$ statt, wobei der Druck auf 38.2 bar ansteigt.
 1. Bestimmen Sie die thermischen Zustandsgrößen vor und nach der Brennstoffzuführung.
 2. Zeichnen Sie die Zustandsänderung im p-V-Diagramm.
 3. Berechnen Sie die Volumenänderungsarbeit und die kalorischen Zustandsgrößen. Welche Energie wird durch den Brennstoff zugeführt ?
- Benötigte Tabellenwerte:
 - R_i von Luft: $R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$
 - spezifische Wärmekapazität von Luft (steht so selten in Tabellen ;-):

$$\overline{c_p} \Big|_{945^\circ\text{C}}^{1767^\circ\text{C}} = 1.22 \text{ kJ/(kgK)}$$

- Lösung

Aufgabe 17



- 100 kg Luft von 150 bar und 40 °C durchlaufen folgenden Kreisprozess:
 1. 50 MJ Wärme werden isobar zugeführt
 2. Die Luft wird expandiert, wobei sich durch Brennstoff-Beheizung ein Polytropen-Exponent $n = 1.2$ ergibt
 3. Sie wird isotherm wieder auf den Anfangszustand verdichtet.
- Untersuchen Sie diesen Kreisprozess:
 1. Stellen Sie ihn schematisch im p-V-Diagramm dar.
 2. Berechnen Sie für die Eckpunkte die thermischen und kalorischen Zustandsgrößen, wobei $U_1 = 0$ gesetzt sei.
 3. Berechnen Sie die Nutzarbeit.
 4. Bestimmen Sie den thermischen Wirkungsgrad und vergleichen Sie mit einem Carnot-Prozess mit gleichen Temperaturen.
- Vernachlässigen Sie die Temperaturabhängigkeit von C_p und benutzen den angegebenen 0°C-Wert.
- Benötigte Tabellenwerte:
 - R_i von Luft: $R_i = 287.2 \text{ J/(kg K)}$
 - $c_p(0 \text{ °C}) = 1.004 \text{ kJ/(kg K)}$
- Lösung

Aufgabe 18



- In einem Zylinder befindet sich ein Gas, dessen Volumen mit einem Kolben zwischen $V_1 = 1.435 \text{ m}^3$ und $V_3 = 9.055 \text{ m}^3$ eingestellt werden kann. Durch geeignete Erwärmung bzw. Kühlung wird das Gas einem Carnot-Prozess unterworfen, wobei der maximale Druck $p_1 = 20 \text{ bar}$ betrage und das Zwischenvolumen V_2 verschieden gewählt werden kann.
 - a. Wie groß ist die vom Kreisprozess abgegebene Arbeit W_k für $V_2 = 4.250 \text{ m}^3$?
 - b. Bei welchem Wert von V_2 wird $-W_k$ maximal? Wie groß ist es dann?
- Verwenden Sie einen temperaturunabhängigen Wert $\kappa = 1.40$.
- Lösung

Aufgabe 19



- Betrachten Sie den Kreisprozess aus **Aufgabe 17** als linkslaufenden Prozess.
 1. Wie groß ist die Kreisprozessarbeit?
 2. Welche Wärme wird aufgenommen und abgegeben ?
 3. Mit welcher Leistungszahl arbeitet er als Wärmepumpe oder Kältemaschine?
- **Lösung**

Aufgabe 20



- In einem Zylinder von 100 cm^3 befinde sich Luft von 1 bar und 343 K. Sie durchlaufe folgenden Kreisprozess (**Otto-Prozess**):
 1. isentrope Verdichtung auf 10 cm^3
 2. isochore Drucksteigerung durch Verbrennung des Brennstoffs auf eine Temperatur von 1973 K
 3. adiabatische Expansion
 4. isochore Druckminderung durch Ausstoßen der heißen Abgase und gleichzeitiges Einsaugen eines frischen Gemisches
- Untersuchen Sie diesen Kreisprozess:
 1. Stellen Sie ihn schematisch im p-V-Diagramm dar.
 2. Berechnen Sie für die Eckpunkte die thermischen Zustandsgrößen.
 3. Bestimmen Sie den thermischen Wirkungsgrad und vergleichen Sie mit einem Carnot-Prozess, der die gleichen Höchst- und Niedrigst-Temperaturen benutzt.
- Vernachlässigen Sie die Temperaturabhängigkeit von C_p und benutzen den Wert $\kappa = 1.40$
- Lösung

- Lineare Interpolation
- Tabellen
- Matlab-Beispiele
- Literatur
- Nachweise

Lineare Interpolation



- Gegeben seien Tabellenwerte für eine Größe y als Funktion einer anderen Größe x (z. B. c_p als Funktion von T):

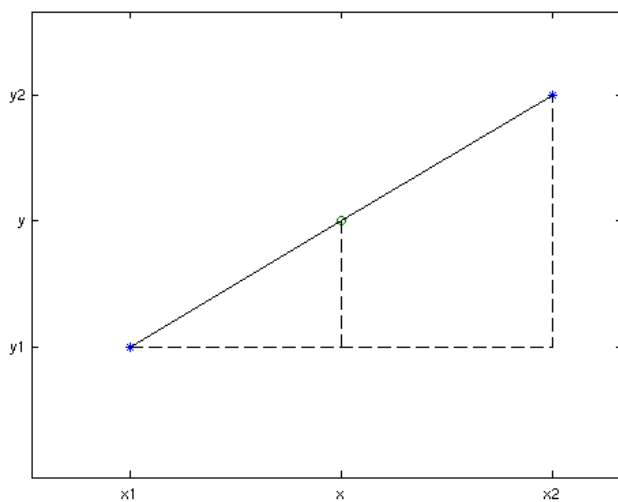
x_1	x_2	x_3	x_4	...
y_1	y_2	y_3	y_4	...

Gesucht ist ein Schätzwert für y bei gegebenem Wert x , der nicht in der Tabelle steht.

- Lösung: Suche die beiden Tabellenwerte x_1, x_2 , die x umgeben (also $x_1 \leq x \leq x_2$) und die zugehörigen Werte y_1, y_2 . Dann ist:

$$y = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- Herleitung: Die Funktion werde zwischen den Tabellenwerten linear approximiert:



Dann liefern die beiden Steigungsdreiecke sofort:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

● Mittlere molare Wärmekapazitäten

Tabelle 1



Mittlere molare Wärmekapazitäten $\overline{c_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^t$

Auszug von [2], Tabelle T-4

T	O ₂	CO ₂	NH ₃
°C	kJ/(kmol K)	kJ/(kmol K)	kJ/(kmol K)
0	29.26	35.92	34.99
100	29.53	38.17	36.37
200	29.92	40.13	38.13
300	30.39	41.83	40.04
400	30.87	43.33	41.98
500	31.32	44.66	44.04
600	31.75	45.85	46.09
700	32.14	46.91	48.01
800	32.49	47.86	49.85
900	32.82	48.72	51.53
1000	33.11	49.50	53.08

- Lösung von Aufgabe 11
- Lösung von Aufgabe 12
- Lösung von Aufgabe 18

exercise11.m



```
function exercisel1()
% Lösung von Aufgabe 11 mit fzero
mdot = 5.668e-3;      % in kg/s
Q12dot = 3225;      % in W
t1 = 70;            % in °C
M = 44.01e-3;      % in kg/mol, für CO2

% Daten einlesen
data = load('cps.dat');
tD = data(:,1);    % in °C
cpD = data(:,3)/M; % in J/(kg K)

% zu lösende Gleichung als Funktion von t2
f = @(t2) Q12dot - mdot*cp(t1, t2, tD, cpD)*(t2 - t1);

% Intervall für die Lösung finden und lösen
epsi = 1e-5;
cpmin = min(cpD);
t2 = fzero(f, [t1 + epsi, t1 + Q12dot/(mdot*cpmin)])
end

%-----
function y = cp(t1, t2, tD, cpD)
% berechnet die mittlere spezifische Wärmekapazität von t1 bis t2
% t1      Starttemperatur in °C
% t2      Starttemperatur in °C
% tD      Tabellenwerte für t
% cpD     Tabellenwerte für cp
% y       Wärmekapazität in J/(kg K)

cp_t1 = interp1(tD, cpD, t1);
cp_t2 = interp1(tD, cpD, t2);
y = (t2*cp_t2 - t1*cp_t1)/(t2 - t1);
end
```

exercise12.m



```
function exercisel2()
% Loesung von Aufgabe 12
R = 8.3145; % in J/(mol K)

% cp-Daten einlesen
load 'cps.dat';
t = cps(:,1); % in Grad Celsius
cp_O2 = cps(:,2); % in J/(mol K)
cp_CO2 = cps(:,3);
cp_NH3 = cps(:,4);

% Berechnung unter der Annahme delta t = 100 = const.
anz = size(t,1) - 1;
ti = t(1:anz) + 50;
cpi_O2 = (cp_O2(2:anz+1).*t(2:anz+1) - cp_O2(1:anz).*t(1:anz))/100;
cpi_CO2 = (cp_CO2(2:anz+1).*t(2:anz+1) - cp_CO2(1:anz).*t(1:anz))/100;
cpi_NH3 = (cp_NH3(2:anz+1).*t(2:anz+1) - cp_NH3(1:anz).*t(1:anz))/100;

% Freiheitsgrade
f_O2 = 2*(cpi_O2/R - 1);
f_CO2 = 2*(cpi_CO2/R - 1);
f_NH3 = 2*(cpi_NH3/R - 1);

% und plotten
plot(ti, f_O2, ti, f_CO2, ti, f_NH3)
title('Zahl der Freiheitsgrade einiger Gase', 'FontSize', 16);
xlabel('t [\circ C]', 'FontSize', 14);
ylabel('f', 'FontSize', 14);
legend('O_2', 'CO_2', 'NH_3', 2);
axis([0 1000 0 16]);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild21.png');
```

exercise18.m



```
function exercisel8()
% Lösung von Aufgabe 18
% gegeben Carnot-Kreisprozess mit festem m, Startpunkt p1, V1
% sowie V3. Gesucht V2 so, dass -Wk (= Q) maximal wird.
kappa = 1.4;
p1 = 2e6;
V1 = 1.435;
V3 = 9.055;

%% Teil a
V2 = 4.250;
Q12 = -p1*V1*log(V1/V2)
T3_durch_T1 = (V2/V3)^(kappa-1)
Wk = -Q12*(1 - T3_durch_T1)

%%
V2s = V1:(V3-V1)/100:V3;
Wk = p1*V1*log(V2s/V1).*((V2s/V3).^(kappa-1) - 1);
plot(V2s, -Wk)
xlabel('V_2', 'FontSize', 14);
ylabel('-W_k', 'FontSize', 14);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild37.png');

V2max = fzero(@(x) dQ(x, kappa, V1, V3), (V1+V3)/2)
Wkmax = p1*V1*log(V2max/V1).*((V2max/V3)^(kappa-1) - 1)

%-----
function y = dQ(V, kappa, V1, V3)
% Ableitung von Q(V2)
t1 = (V/V3)^(kappa-1);
y = (t1 - 1)./V + ((kappa-1)./V).*log(V/V1).*t1;
```

1. Cerbe, Wilhelms: Technische Thermodynamik
Hanser, 18. Aufl. 2017, ISBN: 978-3446451193
2. Langeheinecke et al.: Thermodynamik für Ingenieure
Springer-Vieweg, 10. Aufl. 2017, ISBN 978-3658143008
3. Thess: Das Entropieprinzip: Thermodynamik für Unzufriedene
De Gruyter Oldenbourg, 2. Aufl. 2014, ISBN 978-3486760453
4. Lucas: Thermodynamik
Springer, 7. Aufl. 2008, ISBN 978-3540686453
5. Hahne: Technische Thermodynamik : Einführung und Anwendung
De Gruyter Oldenbourg, 5. Aufl. 2011, ISBN 978-3486592313
6. Iben, Schmidt: Starthilfe Thermodynamik
Teubner 2013, ISBN 978-3519002628
7. Moran: Fundamentals of Engineering Thermodynamics
John Wiley, 9. Aufl. 2018, ISBN 978-1119391760
8. Peter Stephan (Hrsg.) et al.: VDI-Wärmeatlas
Springer Vieweg, 12. Aufl. 2019, ISBN 978-3662529881

Nachweise



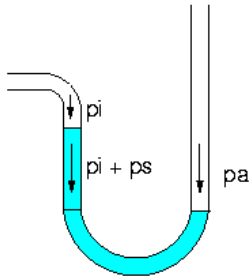
- Bilder:
 - Bild 1 basiert auf dem Bild [WPPressGaugeMech.jpg](#) aus der freien Enzyklopädie [Wikipedia](#) und steht unter der [GNU-Lizenz für freie Dokumentation](#). Der Urheber des Bildes ist User:Leonard G.
- Tabellen:

Tabellen-Nr	Herkunft
1	[2]

Lösung von Aufgabe 1



- Skizze:



- Größen:

Innendruck p_i

Außendruck p_a

Druck der Säule: p_s

- Gleichgewichtsbedingung:

$$p_i + p_s = p_a$$

- p_s aus der Gewichtskraft der Säule:

Mit G = Gewichtskraft der Säule, A = Querschnittsfläche des Rohres:

$$p_s = G / A$$

Gewichtskraft aus der Masse der Säule m_s :

$$p_s = m_s g / A$$

Über die Dichte ρ und die Höhe der Säule h :

$$p_s = \rho A h g / A = \rho h g$$

- Mit dem Wert $h = 0.5 \text{ m}$ erhält man für den Unterdruck $p_a - p_i = p_s$:

$$p_s = 13600 \text{ kg/m}^3 * 0.5 \text{ m} * 9.81 \text{ m/s}^2$$

$$= 66708 \text{ kg/(m s}^2) = 66708 \text{ Pa}$$

$$= 0.66708 \text{ bar}$$

Lösung von Aufgabe 2



- spezifisches Volumen:

$$v = V / m$$
$$= 7.36 \text{ m}^3 / 1370 \text{ kg} = 5.372 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}$$

- Dichte:

$$\rho = 1 / v$$
$$= 1 / (5.37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg}) = 186.1 \text{ kg/m}^3$$

- Molvolumen:

$$V_m = M v$$
$$= 30.05 \text{ kg/kmol} \cdot 5.37 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3/\text{kg} = 0.1614 \text{ m}^3/\text{kmol}$$

- Stoffmenge:

$$n = m / M$$
$$= 1370 \text{ kg} / (30.05 \text{ kg/kmol}) = 45.59 \text{ kmol}$$

- Abschätzung der relativen Molekülmasse:

C: 12 (6 Protonen, 6 Neutronen)

H: 1 (1 Proton)

$$\rightarrow \text{C}_2\text{H}_6: 2 \cdot 12 + 6 \cdot 1 = 30$$

Abweichung: Sowohl H als auch C kommen als Isotopen-Gemische vor, ihre wirklichen Molekülmassen sind Mittelwerte über die Isotope entsprechend ihrer Häufigkeit.

Lösung von Aufgabe 3



- Benötigte Beziehung:

$$\Delta l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T$$

- Damit:

$$\Delta l_1 = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} \cdot 1000 \text{ m} \cdot (10^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})$$

$$= -0.11 \text{ m}$$

$$\Delta l_2 = 11 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} \cdot 1000 \text{ m} \cdot (120^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})$$

$$= 1.1 \text{ m}$$

- Länge der Leitung dann jeweils

$$l_1 = 999.89 \text{ m}$$

$$l_2 = 1001.1 \text{ m}$$

Lösung von Aufgabe 4



- Energiegehalt des Fetts:

$$E_{\text{Fett}} = 0.5 \text{ kg} * 32 \text{ kJ/g} = 16\,000 \text{ kJ}$$

- spezifische Wärmekapazität des Wassers

$$c_W := 1 \text{ kCal}/(\text{kg } ^\circ\text{C}) = 4.186 \text{ kJ}/(\text{kg K})$$

- Energiebedarf zur Erwärmung des Wassers:

$$E_W = m \Delta T c_W = E_{\text{Fett}}$$

- Damit:

$$m = E_{\text{Fett}} / (c_W * \Delta T)$$

$$= 16000 \text{ kJ} / (4.186 \text{ kJ}/(\text{kg K}) 37 \text{ K}) = 103.3 \text{ kg}$$

also etwa 103 l.

Lösung von Aufgabe 5



- Benötigte Beziehung:

$$W_{V12} = - \int_1^2 p dV$$

- Damit:

$$W_V^C = -10 \text{ Pa} \cdot 3 \text{ m}^3 = -30 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3 = -30 \text{ J}$$

$$W_V^A = -40 \text{ Pa} \cdot 3 \text{ m}^3 = -120 \text{ J}$$

$$W_V^B = W_V^C + \frac{1}{2}(W_V^A - W_V^C) = -75 \text{ J}$$

- innere Energie:

$$U_2 - U_1 = W_V^B + Q^B = 25 \text{ J}$$

Beim idealen Gas hieße das: bei U_2 liegt eine höhere Temperatur vor.

- Wegen

$$U_2 - U_1 = W_V^A + Q^A$$

gilt dann

$$Q^A = U_2 - U_1 - W_V^A = 145 \text{ J}$$

$$Q^C = U_2 - U_1 - W_V^C = 55 \text{ J}$$

Lösung von Aufgabe 6



- Änderung der Enthalpie:

$$H_2 - H_1 = W_{i12} = -6.04 \text{ MJ}$$

Energie wird vom System geleistet

- Änderung der inneren Energie:

$$U_2 - U_1 = H_2 - p_2 V_2 - H_1 + p_1 V_1$$

$$= -6.04 \text{ MJ} + 5 \text{ bar } 10.0 \text{ m}^3 - 1 \text{ bar } 34.5 \text{ m}^3$$

$$= -6.04 \text{ MJ} + 15.5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

$$= -4.49 \text{ MJ}$$

Lösung von Aufgabe 7



a. Anfangstemperatur 300 °C:

- Mit den Tabellenwerten erhält man zunächst die mittlere spezifische Wärmekapazität im betrachteten Temperaturbereich:

$$\begin{aligned}\bar{c}_p|_{300^{\circ}\text{C}}^{500^{\circ}\text{C}} &= \frac{500 \text{ K } \bar{c}_p|_{0^{\circ}\text{C}}^{500^{\circ}\text{C}} - 300 \text{ K } \bar{c}_p|_{0^{\circ}\text{C}}^{300^{\circ}\text{C}}}{200 \text{ K}} \\ &= \frac{(500 \text{ K } 0.992 \text{ kJ}/(\text{kgK}) - 300 \text{ K } 0.954 \text{ kJ}/(\text{kgK}))}{200 \text{ K}} \\ &= 1.049 \text{ kJ}/(\text{kgK})\end{aligned}$$

- Damit ergibt sich für die Wärmemenge:

$$\begin{aligned}Q_{12} &= m \bar{c}_p|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \\ &= 500 \text{ kg } 1.049 \text{ kJ}/(\text{kgK}) 200 \text{ K} \\ &= 104.9 \text{ MJ}\end{aligned}$$

b. Anfangstemperatur 220 °C:

- **Lineare Interpolation** aus den gegebenen Werten liefert:

$$\bar{c}_p|_{0^{\circ}\text{C}}^{220^{\circ}\text{C}} = 0.9356 \text{ kJ}/(\text{kgK})$$

- Mittlere spezifische Wärmekapazität im betrachteten Temperaturbereich also:

$$\begin{aligned}\bar{c}_p|_{220^{\circ}\text{C}}^{500^{\circ}\text{C}} &= \frac{500 \text{ K } \bar{c}_p|_{0^{\circ}\text{C}}^{500^{\circ}\text{C}} - 220 \text{ K } \bar{c}_p|_{0^{\circ}\text{C}}^{220^{\circ}\text{C}}}{280 \text{ K}} \\ &= \frac{(500 \text{ K } 0.992 \text{ kJ}/(\text{kgK}) - 220 \text{ K } 0.9356 \text{ kJ}/(\text{kgK}))}{280 \text{ K}} \\ &= 1.036 \text{ kJ}/(\text{kgK})\end{aligned}$$

- Wärmemenge:

$$\begin{aligned}Q_{12} &= m \bar{c}_p|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \\ &= 500 \text{ kg } 1.036 \text{ kJ}/(\text{kgK}) 280 \text{ K} \\ &= 145.1 \text{ MJ}\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 8



- Auflösen der Gleichung für die Mischungstemperatur nach t_a :

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{t_{Mi}(m_a \bar{c}_a|_{t_{Mi}}^{t_a} + m_b \bar{c}_b|_{t_b}^{t_{Mi}}) - m_b \bar{c}_b|_{t_b}^{t_{Mi}} t_b}{m_a \bar{c}_a|_{t_{Mi}}^{t_a}} \\ &= \frac{65^\circ\text{C} (120 \text{ kg } 0.58 \text{ kJ}/(\text{kgK}) + 550 \text{ kg } 1.7 \text{ kJ}/(\text{kgK})) - 550 \text{ kg } 1.7 \text{ kJ}/(\text{kgK}) 22^\circ\text{C}}{120 \text{ kg } 0.58 \text{ kJ}/(\text{kgK})} \\ &= 642.7^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 9



- Massen m_1 vor und m_2 nach der Entnahme:

$$m_1 = (p_1 V) / (R_i \cdot T)$$

$$m_2 = (p_2 V) / (R_i \cdot T)$$

$$m_e = m_1 - m_2 = (p_1 - p_2) \cdot (V M_{O_2}) / (R T)$$

$$= 10 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 (0.01 \text{ m}^3 32 \text{ kg/kmol}) / (8.3145 \text{ kJ/(kmol K)} 293.15 \text{ K})$$

$$= 0.1313 \text{ kg}$$

- Stoffmenge n :

$$n = m_e / M_{O_2}$$

$$= 0.1313 \text{ kg} / (32 \text{ kg} / \text{kmol}) = 4.103 \text{ mol}$$

- Volumen des entnommenen Sauerstoffs:

$$V = m_e R_i T_e / p_e = m_e R T_e / (M_{O_2} p_e)$$

$$= 0.131 \text{ kg} 8.3145 \text{ kJ/(kmol K)} 333.15 \text{ K} / (32 \text{ kg} / \text{kmol} 1.04 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2)$$

$$= 0.1093 \text{ m}^3$$

- Volumen V_n unter Normalbedingungen:

$$V_n = n V_M$$

$$= 4.1 \text{ mol} \cdot 22.414 \text{ l/mol}$$

$$= 0.09196 \text{ m}^3$$

Lösung von Aufgabe 10



- Teilchendichte N/V :

$$p V = N k_B T$$

$$\Rightarrow N/V = p / (k_B T)$$

$$= 10^{-13} \text{ N/m}^2 / (1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K } 293.15 \text{ K})$$

$$= 2.472 \cdot 10^7 / \text{m}^3 = 24.72 / \text{cm}^3$$

- Druck bei Abkühlen:

$$p = N/V k_B T$$

$$= 2.47 \cdot 10^7 / \text{m}^3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K } 19 \text{ K}$$

$$= 6.481 \cdot 10^{-15} \text{ Pa}$$

Lösung von Aufgabe 11



- Zunächst wird von Masse auf Stoffmenge umgerechnet, um die Tabelle leichter anwenden zu können:

$$\begin{aligned} \text{Stoffmengenstrom } \dot{n} &= \dot{m} / M \\ &= 5.668 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s} / (44.01 \text{ kg/kmol}) \\ &= 0.1288 \text{ mol/s} \end{aligned}$$

- Wärmestrom aus Stoffmengenstrom:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{12} &= \dot{m} \overline{c_p}|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) \\ &= \left(\frac{\dot{m}}{M} \right) (M \overline{c_p}|_{t_1}^{t_2}) (t_2 - t_1) \\ &= \dot{n} \overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

- Wäre $\overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2}$ bekannt, könnte man t_2 also bestimmen als

$$t_2 = t_1 + \frac{\dot{Q}_{12}}{\dot{n} \overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2}}$$

- Den Wert für die mittlere molare Wärmekapazität erhält man bei bekanntem t_2 wieder aus

$$\overline{c}|_{T_1}^{T_2} = \frac{(T_2 - T_0) \overline{c}|_{T_0}^{T_2} - (T_1 - T_0) \overline{c}|_{T_0}^{T_1}}{T_2 - T_1}$$

- Wert von $\overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{70^\circ\text{C}}$ durch lineare Interpolation:

$$\begin{aligned} \overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{70^\circ\text{C}} &= \overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{0^\circ\text{C}} + \frac{70^\circ\text{C}}{100^\circ\text{C}} \cdot (\overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{100^\circ\text{C}} - \overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{0^\circ\text{C}}) \\ &= 37.50 \text{ kJ}/(\text{kmol K}) \end{aligned}$$

- Vorgehensweise also:

Schätzwert für $\overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2}$ aus Tabelle

damit Startwert für t_2 berechnen

⇒ Tabellenwert für $\overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{t_2}$ durch Interpolation

⇒ Wert für $\overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2}$

⇒ besserer Wert für t_2

- 1. Schätzwert:

$$\begin{aligned} \overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2} &= 40 \text{ kJ}/(\text{kmol K}) \\ \Rightarrow t_2 &= 696.0^\circ\text{C} \\ \Rightarrow \overline{C_{m,p}}|_{0^\circ\text{C}}^{t_2} &= 46.87 \text{ kJ}/(\text{kmol K}) \\ \Rightarrow \overline{C_{m,p}}|_{t_1}^{t_2} &= 47.92 \text{ kJ}/(\text{kmol K}) \\ \Rightarrow t_2 &= 592.6^\circ\text{C} \end{aligned}$$

- Iteration:

t ₂ , alt	$\overline{C_{m,p}} _{t_1}^{t_2}$	t ₂ , neu
°C	kJ/(kmol K)	°C
696.0	47.92	592.6

592.6	46.87	604.3
604.3	47.00	602.8
602.8	46.98	603.0
603.0	46.98	603.0

also: $t_2 = 603.0 \text{ } ^\circ\text{C}$

- Schneller und sicherer mit direkter Lösung der Gleichung:

$$f(t_2) := \dot{Q}_{12} - m \bar{c}_p|_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) = 0$$

vgl. [Matlab-Skript](#)

Lösung von Aufgabe 12

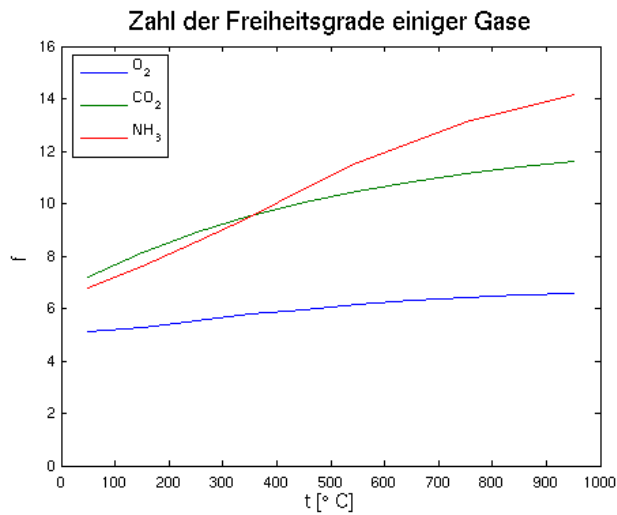


- Beispielsweise:

$$\bar{c}_{100^{\circ}\text{C}}^{200^{\circ}\text{C}} = \frac{\bar{c}_{0^{\circ}\text{C}}^{200^{\circ}\text{C}} - \bar{c}_{0^{\circ}\text{C}}^{100^{\circ}\text{C}}}{200^{\circ}\text{C} - 100^{\circ}\text{C}}$$

$$f = 2 * (C_{m,p} / R - 1)$$

- Rest (incl. graphischer Darstellung) am besten mit einem [Matlab-Skript](#). Damit:



Lösung von Aufgabe 13



a. thermische Größen:

Vor der Verbrennung:

$$p_1 = 45 \text{ bar}, T_1 = 863.15 \text{ K}$$

$$V_1 = m R_i T / p = m R T / (M p)$$

$$= 5.506 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 = 55.06 \text{ cm}^3$$

Nach der Verbrennung: $p_2 = p_1$

Temperatur aus Wärmezufuhr und spezifischer Wärme:

- Schätzwert von T_2 : 2200 °C. Damit wie gehabt aus den Tafelwerten:

$$\bar{c}_p|_{590^\circ\text{C}}^{2200^\circ\text{C}} = 1.216 \text{ kJ}/(\text{kg K})$$

Damit:

$$T_2 - T_1 = Q_{12} / (m \bar{c}_p|_{590^\circ\text{C}}^{2200^\circ\text{C}})$$

$$= 1645 \text{ K}$$

$$T_2 = 2508 \text{ K}, \quad t_2 = 2235 \text{ °C}$$

- Schätzung ist hinreichend genau, c_p -Wert ist ok.

Volumen:

$$V_2 = V_1 T_2 / T_1$$

$$= 160.0 \text{ cm}^3$$

b. Volumenänderungsarbeit:

$$W_{V12} = p (V_1 - V_2) = - 472.2 \text{ J}$$

c. kalorische Größen:

Enthalpie bei isobarem Prozess:

$$H_2 - H_1 = Q_{12} = 2.0 \text{ kJ}$$

innere Energie:

$$\begin{aligned} U_2 - U_1 &= m \bar{c}_v|_{T_1}^{T_2} (T_2 - T_1) \\ &= m (\bar{c}_p|_{T_1}^{T_2} - R/M) (T_2 - T_1) \\ &= 1.528 \text{ kJ} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 14



a. Volumenänderungsarbeit

$$W_{V12} = p_1 V_1 \ln(V_1/V_2) = 2.303 \text{ kJ}$$

$$W_{V23} = p_2 V_2 \ln(V_2/V_3) = p_1 V_1 \ln(V_2/V_3) = 2.303 \text{ kJ}$$

b. Wärme:

$$Q_{12} = -W_{V12} = -2.303 \text{ kJ} \quad (U \text{ konstant bei } T \text{ konstant)}$$

$$Q_{23} = -W_{V23} = -2.303 \text{ kJ}$$

c. Druck:

$$p_2 = p_1 V_1 / V_2 = 10 \text{ bar}$$

$$p_3 = p_1 V_1 / V_3 = 100 \text{ bar}$$

innere Energie und Enthalpie bleiben gleich (isotherm!)

Lösung von Aufgabe 15



- thermische Größen:

$$p_1 = 1 \text{ bar}, V_1 = 0.01 \text{ m}^3, T_1 = 288 \text{ K}$$

$$V_2 = 0.001 \text{ m}^3$$

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^\kappa = 25.12 \text{ bar}$$

$$T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{(\kappa-1)} = 723.8 \text{ K}$$

$$V_3 = 10^{-4} \text{ m}^3, p_3 = 631.0 \text{ bar}, T_3 = 1818 \text{ K}$$

- Volumenänderungsarbeit:

$$W_{V12} = (p_1 V_1)/(\kappa - 1) [(V_1/V_2)^{(\kappa-1)} - 1]$$

$$= 3.780 \text{ kJ}$$

$$W_{V23} = 9.494 \text{ kJ}$$

- kalorische Größen:

$$U_2 - U_1 = W_{V12} = 3.780 \text{ kJ}$$

$$U_3 - U_2 = W_{V23} = 9.494 \text{ kJ}$$

$$H_2 - H_1 = \kappa (U_2 - U_1) = 5.292 \text{ kJ}$$

$$H_3 - H_2 = 13.29 \text{ kJ}$$

Lösung von Aufgabe 16



a. thermische Größen:

$$p_1 = 29.5 \text{ bar}, T_1 = 1218 \text{ K}$$

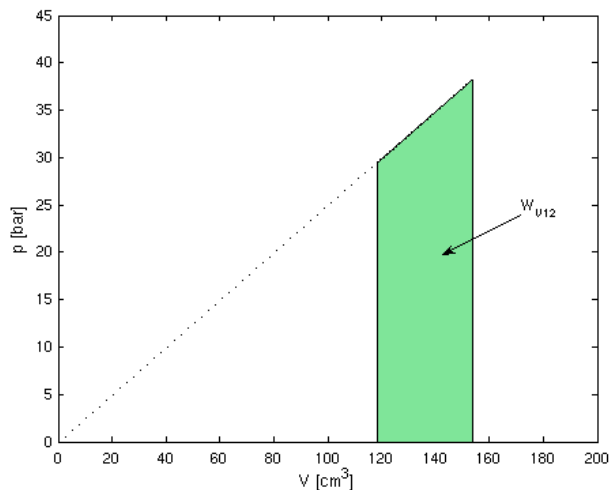
$$V_1 = m R_i T / p = m R T / (M p) = 118.6 \text{ cm}^3$$

$$p_2 = 38.2 \text{ bar}$$

$$pV^{-1} = \text{const} \Rightarrow V_2 = V_1 p_2 / p_1 = 153.6 \text{ cm}^3$$

$$TV^{-2} = \text{const} \Rightarrow T_2 = T_1 V_2^2 / V_1^2 = 2043 \text{ K}$$

b. p-V-Diagramm:



c. kalorische Größen:

$$W_{V12} = (m R_i)/(n - 1) (T_2 - T_1) = - 118.4 \text{ J}$$

$$H_2 - H_1 = m \tilde{c}_p (T_2 - T_1) = 1006 \text{ J}$$

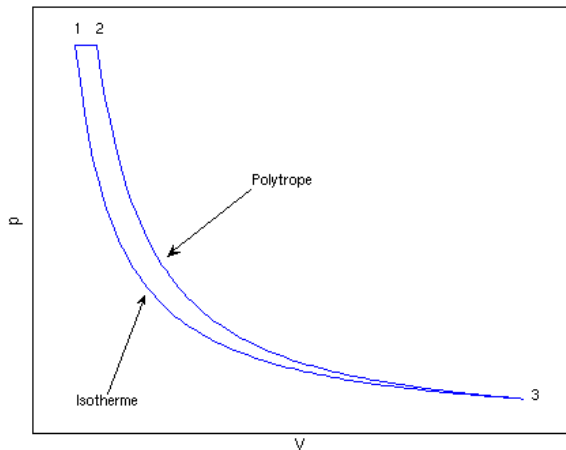
$$U_2 - U_1 = m \tilde{c}_V (T_2 - T_1)$$

$$= m (\tilde{c}_p - R_i) (T_2 - T_1) = 769.0 \text{ J}$$

Verbrennungswärme:

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - W_{V12} = 887.4 \text{ J}$$

a. p-V-Diagramm:



b. Zustandsgrößen:

Punkt 1

$$p_1 = 150 \text{ bar}, T_1 = 313.15 \text{ K}$$

$$V_1 = m R_i T / p = 0.5996 \text{ m}^3$$

$$U_1 = 0$$

$$H_1 = U_1 + p_1 V_1 = 8.994 \text{ MJ}$$

Punkt 2

$$p_2 = 150 \text{ bar}$$

$$Q_{12} = m c_p (T_2 - T_1)$$

$$\Rightarrow T_2 = Q_{12}/(m c_p) + T_1 = 811.2 \text{ K}$$

$$V_2 = V_1 T_2 / T_1 = 1.553 \text{ m}^3$$

$$U_2 = m c_v (T_2 - T_1) + U_1$$

$$= m (c_p - R_i) (T_2 - T_1) + U_1 = 35.70 \text{ MJ}$$

$$H_2 = U_2 + p_2 V_2 = 58.99 \text{ MJ}$$

Punkt 3

$$T_3 = T_1 = 313.15 \text{ K}$$

Aus $p^{n-1} / T^n = \text{const.}$ folgt:

$$p_3 = p_2 (T_3/T_2)^{n/(n-1)} = 0.4966 \text{ bar}$$

$$V_3 = m R_i T_3 / p_3 = 181.1 \text{ m}^3$$

$$U_3 = U_1 = 0 \text{ (Isotherme!)}$$

$$H_3 = U_3 + p_3 V_3 = 8.994 \text{ MJ}$$

c. Nutzarbeit $W_k = \Sigma W_{Vi}$

$$W_{V12} = p_1 (V_1 - V_2) = - 14.30 \text{ MJ}$$

$$W_{V23} = (m R_i)/(n - 1) (T_3 - T_2) = - 71.51 \text{ MJ}$$

$$W_{V31} = p_3 V_3 \ln(p_1/p_3) = 51.36 \text{ MJ}$$

$$W_k = - 34.46 \text{ MJ}$$

d. thermischer Wirkungsgrad:

$$\eta = (|W_k|)/(Q_{12} + Q_{23})$$

$$Q_{12} = 50 \text{ MJ}$$

$$Q_{23} = W_{V23} (n - \kappa)/(\kappa - 1) = 35.82 \text{ MJ}$$

$$\Rightarrow \eta = 0.4015$$

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - T_3/T_2 = 0.6139$$

Lösung von Aufgabe 18



a. W_k bei gegebenem V_2 :

Am schnellsten bestimmt man W_k aus der für den Carnot-Prozess hergeleiteten Beziehung

$$W_k = -Q_{12} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right)$$

Mit den gegebenen Werten erhält man aus der Isothermen $1 \rightarrow 2$

$$Q_{12} = -p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = 3116 \text{ kJ}$$

Wegen der Isothermen $1 \rightarrow 2$ ist $T_1 = T_2$. Die Adiabate $2 \rightarrow 3$ liefert daher

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} = 0.7389$$

also insgesamt

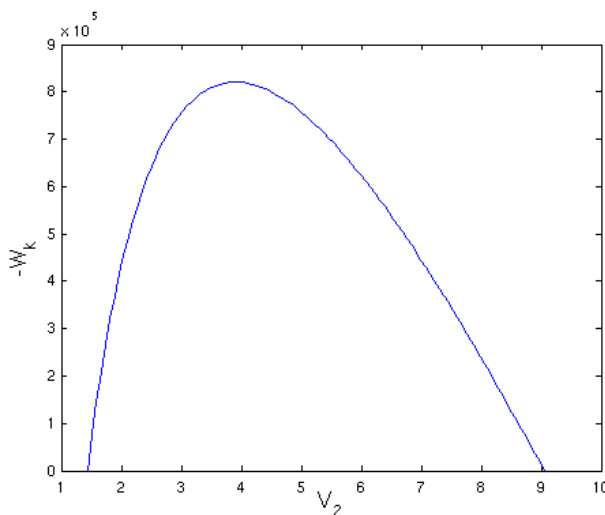
$$W_k = -813.5 \text{ kJ}$$

b. maximales $-W_k$:

Setzt man die Beziehungen aus a. mit beliebigem V_2 an, erhält man

$$\begin{aligned} W_k &= -Q_{12} \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) \\ &= p_1 V_1 \ln \frac{V_1}{V_2} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} \right] \end{aligned}$$

Mit den gegebenen Werten für V_1 , V_3 , p_1 und κ ist das eine Funktion von V_2 , die man - z. B. mit Matlab - leicht graphisch darstellen kann:



Der Plot zeigt ein eindeutiges Maximum zwischen V_1 und V_3 , der Wert lässt sich näherungsweise ablesen zu

$$V_{2,max} \approx 3.9 \text{ m}^3$$

Zur genauen Bestimmung sucht man das Extremum der Funktion $W_k(V_2)$, indem man die Nullstelle seiner 1. Ableitung bestimmt. Zunächst berechnet man

$$W'_k(V_2) = p_1 V_1 \left\{ -\frac{1}{V_2} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} \right] - \frac{\kappa-1}{V_2} \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^{\kappa-1} \ln \frac{V_1}{V_2} \right\}$$

Mit Hilfe der `fzero`-Funktion von Matlab und einem Startwert von z. B. $(V_1 + V_3)/2$ erhält man dann die Nullstelle bei

$$V_{2,\max} = 3.903 \text{ m}^3$$

Einsetzen in die obige Formel für W_k liefert

$$W_k(V_{2,\max}) = -820.8 \text{ kJ}$$

Lösung von Aufgabe 19



a. Werte sind identisch zu Aufgabe 17, aber anderes Vorzeichen. Daher:

$$W_k = 34.46 \text{ MJ}$$

b. Wärmemengen:

$Q_{ab} = -$ aufgenommene Wärme von Aufgabe 17, also

$$Q_{ab} = - (Q_{12} + Q_{23})|_{\text{Aufg. 17}} = - 85.82 \text{ MJ}$$

aufgenommene Wärme aus Energiebilanz:

$$Q_{zu} = - W_k - Q_{ab} = 51.36 \text{ MJ}$$

c. Leistungszahlen:

Wärmepumpe:

$$\varepsilon_w = |Q_{ab}| / W_k = 2.491$$

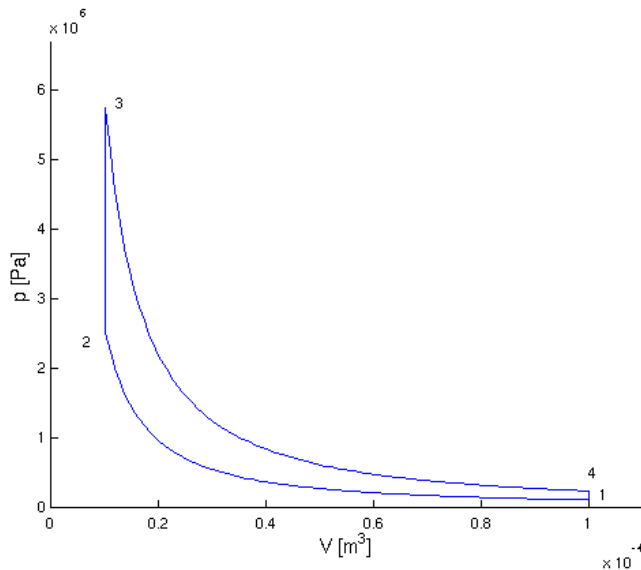
Kältemaschine:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_w - 1 = 1.491$$

Lösung von Aufgabe 20



a. p-V-Diagramm:



b. Thermische Zustandsgrößen:

Punkt 1

$$p_1 = 1 \text{ bar}, V_1 = 100 \text{ cm}^3, T_1 = 343 \text{ K}$$

Punkt 2 (längs Isentrope):

$$V_2 = 10 \text{ cm}^3$$

$$p_2 = p_1 (V_1/V_2)^k = 25.12 \text{ bar}$$

$$T_2 = T_1 (V_1/V_2)^{k-1} = 861.6 \text{ K}$$

Punkt 3 (längs Isochore):

$$T_3 = 1973 \text{ K}$$

$$V_3 = V_2 = 10 \text{ cm}^3$$

$$p_3 = p_2 (T_3/T_2) = 57.52 \text{ bar}$$

Punkt 4 (längs Isentrope):

$$V_4 = V_1 = 100 \text{ cm}^3$$

$$p_4 = p_3 (V_3/V_4)^k = 2.290 \text{ bar}$$

$$T_4 = T_3 (V_3/V_4)^{k-1} = 785.5 \text{ K}$$

c. Wirkungsgrad:

$$\begin{aligned} \eta &= -W_k / Q_{23} = (Q_{23} + Q_{41}) / Q_{23} \\ &= 1 + Q_{41} / Q_{23} \end{aligned}$$

Wegen angenommener Temperaturunabhängigkeit von c_V :

$$Q_{23} = m c_V (T_3 - T_2)$$

$$Q_{41} = m c_V (T_1 - T_4)$$

$$\Rightarrow \eta = 1 + (T_1 - T_4) / (T_3 - T_2) = 0.6019$$

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - T_1 / T_3 = 0.8262$$

