



Schwingungslehre 1

- Einführung
- Beschreibung von Schwingungen
- Bewegungsgleichungen für Schwingungen
- Lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 2. 3. 2010

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Einführung
- Beschreibung von Schwingungen
 - Klassifizierung von Schwingungen
 - Beschreibung harmonischer Schwingungen
 - Ortsdiagramm
 - Phasenraum-Darstellung
 - Spektralanalyse
- Bewegungsgleichungen für Schwingungen
 - Bausteine schwingender Systeme
 - Aufstellen der Bewegungsgleichung
 - Linearisierung von Bewegungsgleichungen
- Lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad
 - Ungedämpfte freie Schwingung
 - Freie Schwingung mit viskoser Dämpfung
 - Freie Schwingung mit Gleitreibung
 - Erregte Schwingung
 - Bestimmung der Differentialgleichung
 - Harmonische Anregung
 - Schwingungsisolierung
 - Allgemeine periodische Anregung
 - Nicht-periodische Anregung
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
 - Lösung von Aufgabe 1
 - Aufgabe 2
 - Lösung von Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
 - Lösung von Aufgabe 3
 - Aufgabe 4
 - Lösung von Aufgabe 4
 - Aufgabe 5
 - Lösung von Aufgabe 5
 - Aufgabe 6
 - Lösung von Aufgabe 6
 - Aufgabe 7
 - Lösung von Aufgabe 7
 - Aufgabe 8
 - Lösung von Aufgabe 8
 - Aufgabe 9

- Lösung von Aufgabe 9
- Aufgabe 10
 - Lösung von Aufgabe 10
- Aufgabe 11
 - Lösung von Aufgabe 11
- Aufgabe 12
 - Lösung von Aufgabe 12
- Aufgabe 13
 - Lösung von Aufgabe 13
- Aufgabe 14
 - Lösung von Aufgabe 14
- Aufgabe 15
 - Lösung von Aufgabe 15
- Aufgabe 16
 - Lösung von Aufgabe 16
- Aufgabe 17
 - Lösung von Aufgabe 17
- Aufgabe 18
 - Lösung von Aufgabe 18
- Aufgabe 19
 - Lösung von Aufgabe 19
- Aufgabe 20
 - Lösung von Aufgabe 20
- Aufgabe 21
 - Lösung von Aufgabe 21
- Aufgabe 22
 - Lösung von Aufgabe 22
- Aufgabe 23
 - Lösung von Aufgabe 23
- Aufgabe 24
 - Lösung von Aufgabe 24
- Anhang
 - Literatur
 - Exkurs: Komplexe Zahlen
 - Exkurs: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
 - Herleitung: Stoßantwort des erregten Schwingers
 - Applets
 - Matlab-Beispiele
 - ex2.m
 - ex3a.m
 - ex3b.m
 - ex5.m
 - ex7.m

- ex12.m
- ex13.m
- schubkurbel.m



Einführung

- Maschinendynamik:
 - i.w. Untersuchung der Schwingungseigenschaften von Maschinen
 - Zielsetzungen
 - Bestimmung dynamischer Lasten
 - Überprüfung der Konstruktion
 - Optimierung von Parametern
 - reale Maschinen sehr komplex → Rückführung auf vereinfachtes Modell nötig
 - Vorgehensweise
 - Erstellung eines Modells
 - Lösung des Modells
 - Rückübersetzung der Ergebnisse auf Maschine
- Modellbildung:
 - schwierigster und wichtigster Teil
 - Ausgangspunkt
 - Konstruktionsunterlagen
 - Messungen an realer Maschine
 - Rüstzeug: grundlegende Modelle und ihre Eigenschaften
- Lösung des Modells:
 - mit Hilfe der hier vorgestellten Methoden
 - per Hand bei wenigen Freiheitsgraden
 - mit Numerik-Programmen wie Matlab für mittlere Probleme
 - mit FEM-Modellen bei komplexen Modellen mit vielen Freiheitsgraden
- Rückübersetzung der Ergebnisse:
 - grundsätzlich von Modellbildung her
 - wichtig zur Kontrolle der Modellergebnisse
 - ggf. Korrektur des Modells



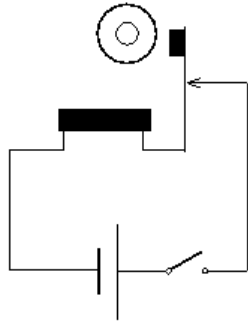
Beschreibung von Schwingungen

- Klassifizierung von Schwingungen
- Beschreibung harmonischer Schwingungen
- Ortsdiagramm
- Phasenraum-Darstellung
- Spektralanalyse



Klassifizierung von Schwingungen

- Schwingungen:
 - mehr oder weniger regelmäßige zeitabhängige Vorgänge
 - charakterisiert durch eine Zustandsgröße $x = x(t)$
 - Beispiele für x
 - Auslenkung (Feder)
 - Winkel (Fadenpendel)
 - Druck (Schall)
 - Spannung (elektrischer Schwingkreis)
 - Temperatur (Schwingung im Tages- oder Jahresrhythmus)
 - im engeren Sinne: streng periodisch mit Periode T (Schwingungsdauer)
 - $x(t + T) = x(t)$
 - Frequenz f = Zahl der Schwingungen pro Zeit
 - $f = 1/T$
- Unterscheidung nach Art der Bewegungsgleichung:
 - linear
 - von x oder \dot{x} abhängende Terme nur linear
 - Gleichungen analytisch lösbar
 - Superpositionsprinzip gilt
 - nichtlinear
 - Gleichung komplizierter
 - häufig nur numerisch lösbar
 - kein Superpositionsprinzip
 - Vielzahl neuartiger Phänomene
- Unterscheidung nach Zahl der Schwinger:
 - ein Freiheitsgrad
 - z.B. Feder, Pendel
 - beschrieben durch eine Differentialgleichung
 - viele Freiheitsgrade
 - z.B. gekoppelte Schwinger
 - beschrieben durch mehrere Differentialgleichungen
 - kontinuierliche Schwinger
 - z.B. Saite, Balken, Platten
 - "unendlich viele" Freiheitsgrade
 - beschrieben durch partielle Differentialgleichung
- Unterscheidung nach Entstehungsmechanismus:
 - aus dem Schwinger selbst (autonom)
 - Eigenschwingungen (praktisch immer gedämpft)
 - selbsterregt (mit äußerer Energiezufuhr)
 - Beispiel Klingel:

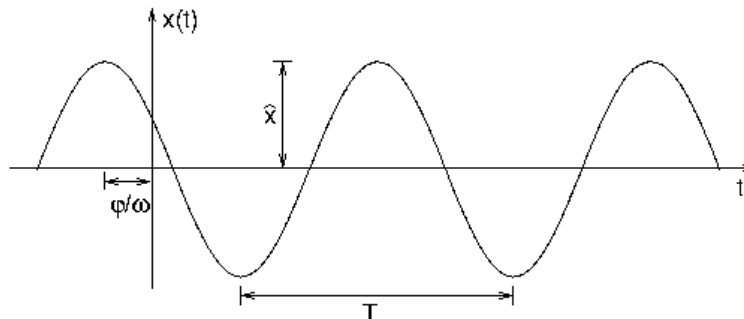


- von außen bestimmt (heteronom)
 - direkte äußere Einwirkung (erzwungene Schwingung)
 - Beispiel: Übertragung äußerer Vibrationen
 - äußere Änderung von Systemparametern (parametererregte Schwingung)
 - Beispiel: Schaukel, angenähert durch Änderung der Pendellänge



Beschreibung harmonischer Schwingungen

- Harmonische Schwingung:
 - gegeben durch
 - $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \phi)$
 - Amplitude \hat{x} = Maximalausschlag
 - Kreisfrequenz ω
 - $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$
 - Anfangsphase ϕ



- Überlagerung zweier Schwingungen gleicher Frequenz:
 - wegen Superpositionsprinzip (bei linearen Systemen)

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$= \hat{x}_1 \cos(\omega t + \phi_1) + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

- ergibt wieder eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz
 - $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \phi)$
- mit Hilfe der Additionstheoreme folgt (etwas mühsam)

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \hat{x}_2^2}$$

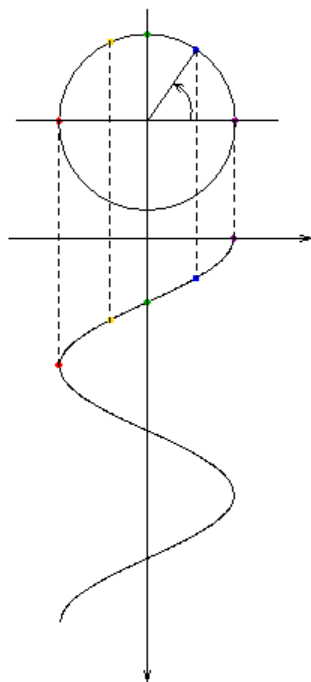
$$\tan \phi = \frac{\hat{x}_1 \sin \phi_1 + \hat{x}_2 \sin \phi_2}{\hat{x}_1 \cos \phi_1 + \hat{x}_2 \cos \phi_2}$$

- Vorsicht: Formel legt ϕ nur im Bereich $0 \dots \pi$ fest! Daher:
 - Quadranten des Winkels aus Vorzeichen von Zähler und Nenner bestimmen
 - ggf. π zum erhaltenen Winkel addieren.
- Zeigerdiagramm:
 - Darstellung über komplexe Zahlen
 - Ausgangspunkt Euler-Gleichung
 - $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$
 - mit $\text{Re}\{z\}$ als Realteil der komplexen Zahl z ist daher

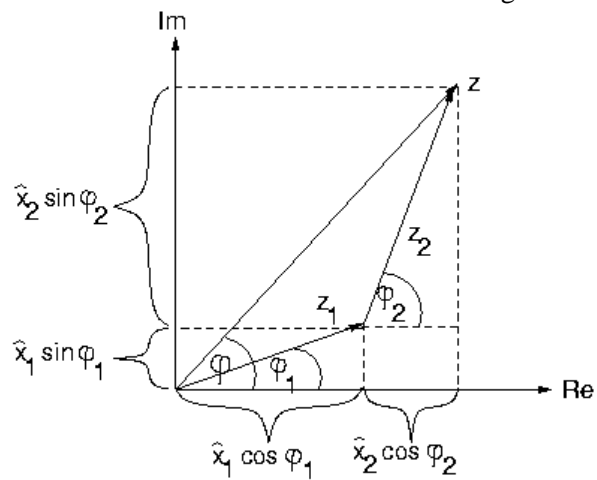
•

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x} \cos(\omega t + \phi) \\ &= \operatorname{Re}\{\hat{x} e^{j(\omega t + \phi)}\} \end{aligned}$$

- Veranschaulichung in der komplexen Ebene:
 - $\hat{x} e^{j(\omega t + \phi)}$: gleichmäßig rotierender Zeiger
 - $x(t)$: Projektion des Zeigers auf die x-Achse
 - im Bild:



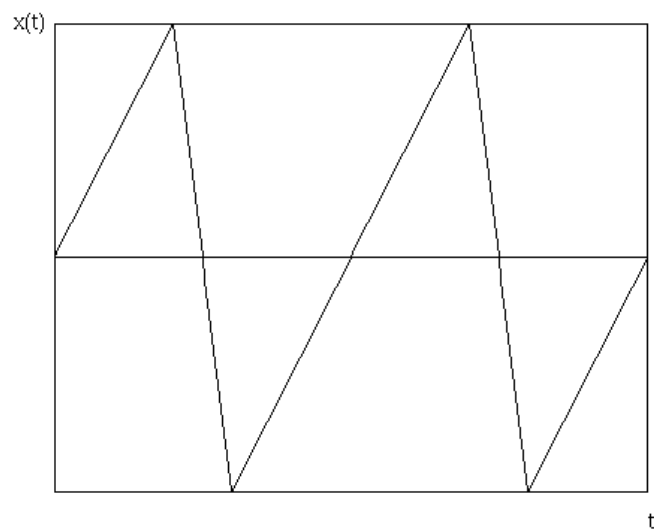
- Additionsformeln damit direkt aus der Zeigeraddition



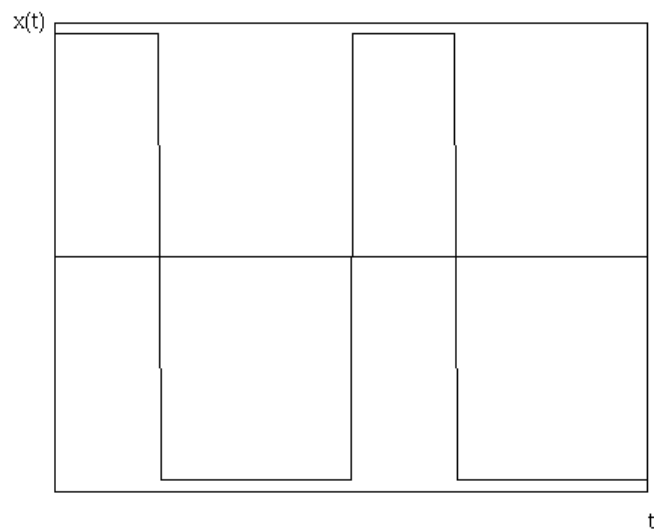


Ortsdiagramm

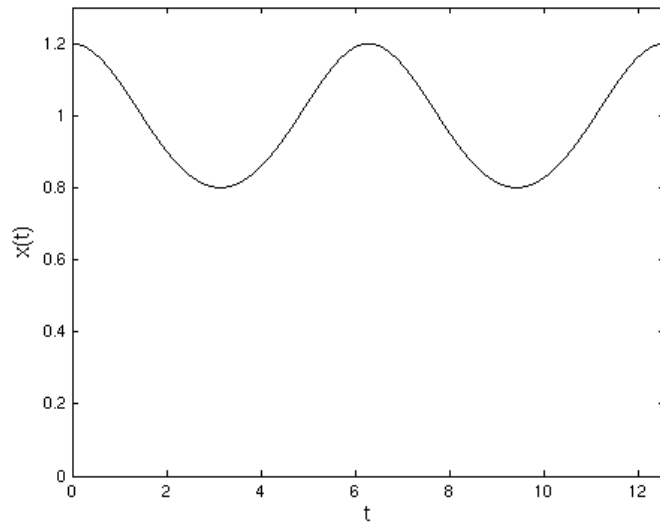
- Ortsraum-Darstellung:
 - Grundveranschaulichung von Schwingungen
 - $x(t)$ über t
- Beispiele für periodische Anregungsfunktionen:
 - Sägezahnschwingung



- Rechteckschwingung



- Bewegung eines Schubkurbelantriebs (s. Aufgabe 3)



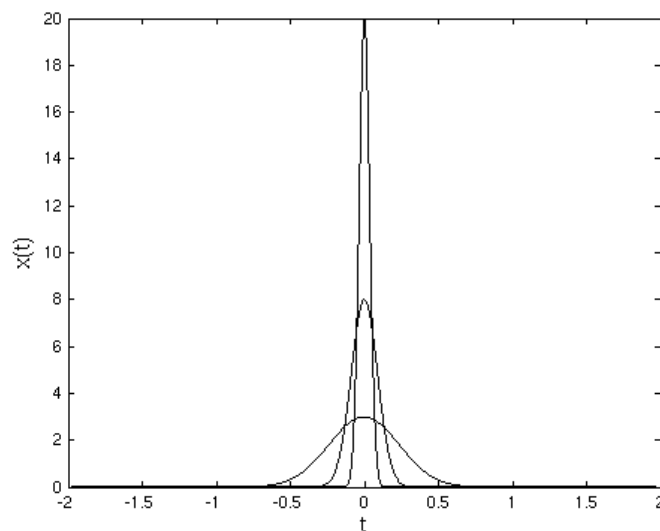
- Beispiele für nichtperiodische Anregungsfunktionen:

- Dirac-Impuls

- ganz kurzer Impuls
- idealisiert: nur bei 0
- $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$
- hat bestimmte Stärke (= Fläche unter dem Graphen)

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

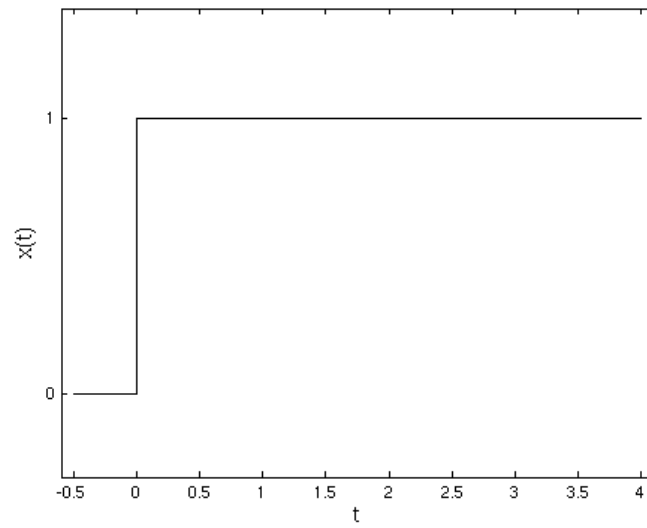
- keine Funktion, sondern Grenzwert immer schmalere und höherer Impulse



- wichtige Eigenschaft

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$

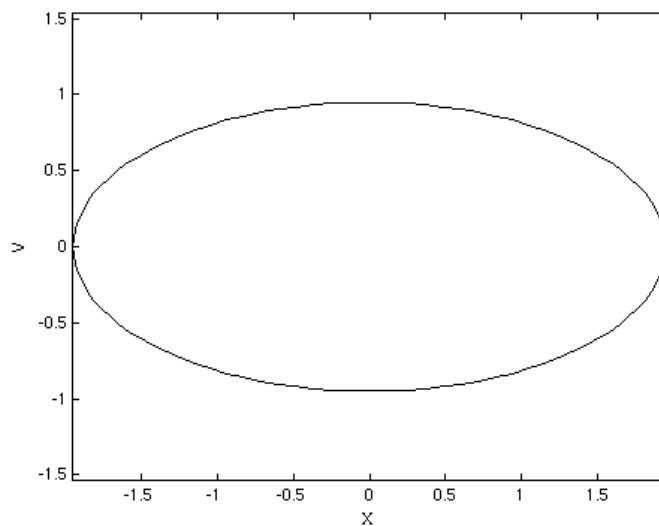
- Sprungfunktion $\sigma(t)$



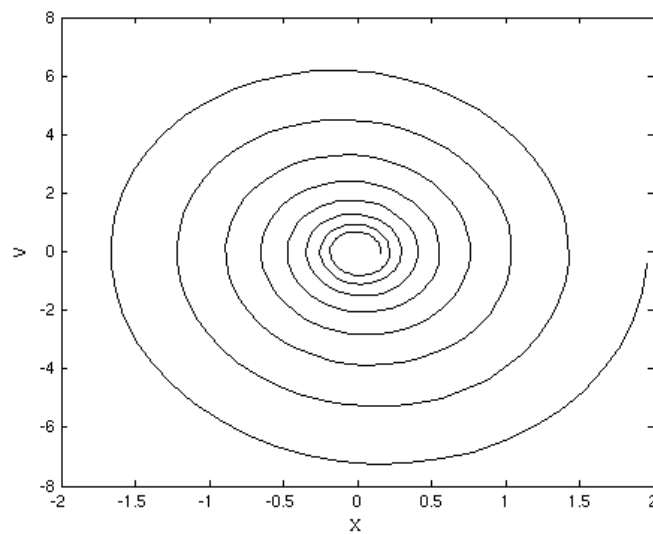


Phasenraum-Darstellung

- Phasenraum:
 - Punkte gegeben durch x und seine zeitliche Änderung ("Geschwindigkeit") $\dot{x} = dx/dt$
 - periodischer Vorgang \rightarrow geschlossene Kurve im Phasenraum
 - Zeit nicht explizit aufgetragen
 - Zustand (Punkt im Phasenraum) bewegt sich zeitlich auf der Kurve
- Beispiele:
 - harmonische Schwingung



- abklingende Schwingung



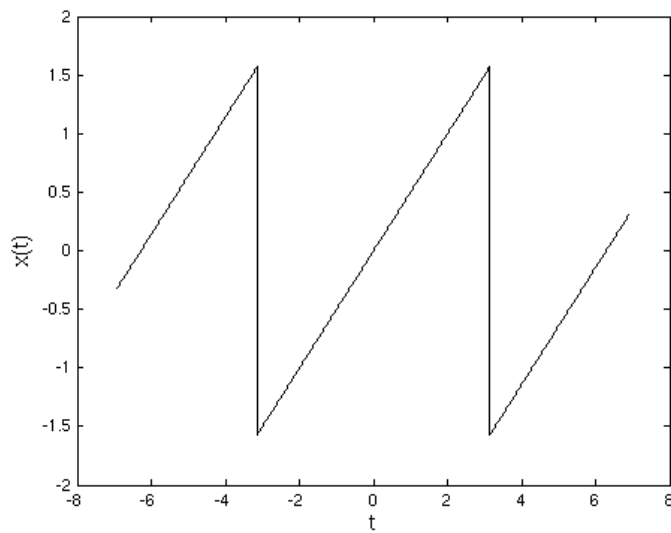
- Aufgaben:

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3

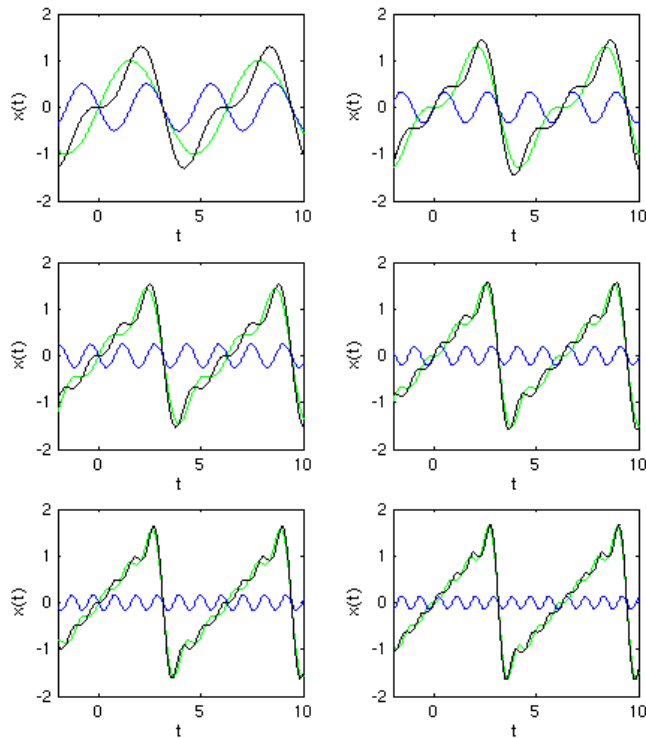


Spektralanalyse

- Grundtatsache:
 - Periodische Funktionen können geschrieben werden als Überlagerung eines Grundtons (harmonische Funktion gleicher Frequenz) und seiner Obertöne (harmonische Funktionen mit n-facher Frequenz, $n = 2, 3, 4, \dots$)
- Beispiel Sägezahnsschwingung:
 - $x(t) = t/2$ für $t = -\pi \dots \pi$



- Aufbau aus Grund- und Oberschwingungen



- als Applet zum Experimentieren



- in Formeln:

- $x(t) = \sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) \dots$

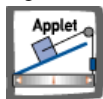
- Allgemeine Fourierzerlegung:

- für ungerade Funktion $x_u(t)$ (d.h. punktsymmetrisch am Ursprung) mit Periode $T = 2\pi/\omega$

- $x_u(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_4 \sin(4\omega t) + \dots$

- analog für gerade Funktion $x_g(t)$ (spiegelsymmetrisch zur y-Achse)

- $x_g(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + a_4 \cos(4\omega t) + \dots$



- unsymmetrische Funktionen: Summe aus geradem und ungeraden Anteil

- $$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

- Berechnung der Koeffizienten mit folgenden Formeln

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

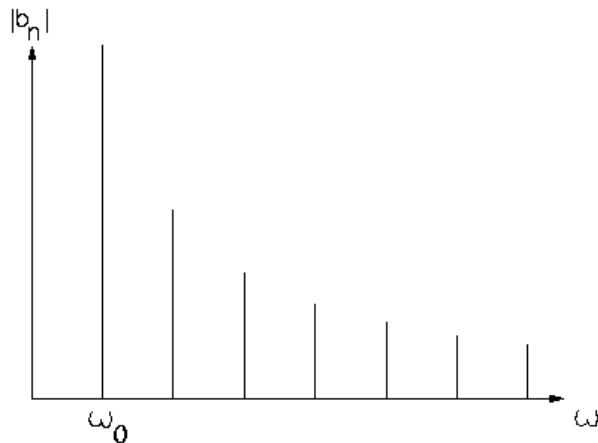
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(n\omega t) dt \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Alternativ mit Amplitude und Phasenverschiebung

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \psi_n)$$

- Spektrum:

- Darstellung der Größe der Koeffizienten über der Frequenz
- bei der Sägezahnswingung



- Spektren einiger Beispielfunktionen im Applet



- Komplexe Fourierzerlegung:

- Zusammenfassung beider Summen mit einer komplexen e-Funktion

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

- Zerlegung in Real- und Imaginärteil ergibt beide Teilreihen
- Ausnutzung der Symmetrie von sin und cos → Werte für n und -n ergeben einfach Faktor 2
- Berechnung der Koeffizienten c_n

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega t} dt \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- Bestimmung von a_n und b_n aus c_n

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = j(c_n - c_{-n})$$

- Fouriertransformation:

- Zerlegung einer nichtperiodischen Funktion in harmonische Funktionen

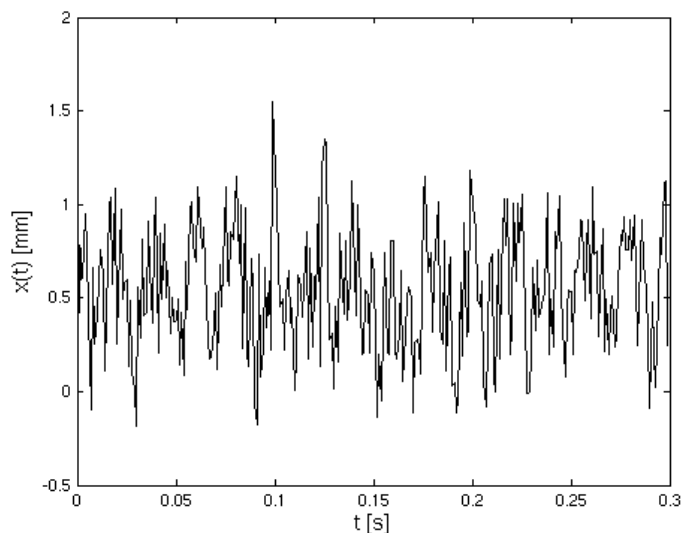
- keine Periode → "alle" Frequenzen treten auf (nicht nur Obertöne)
- Summe über Obertöne → Integral über alle Frequenzen ω
- Koeffizienten $c_n \rightarrow$ komplexe Funktion $F(\omega)$ (Fouriertransformierte)
- Darstellung der Funktion $x(t)$

- $$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

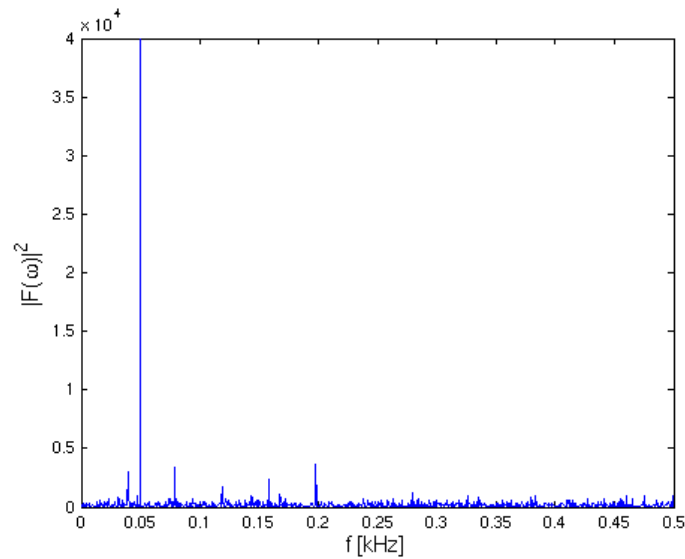
- Berechnung der Fouriertransformierten

- $$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

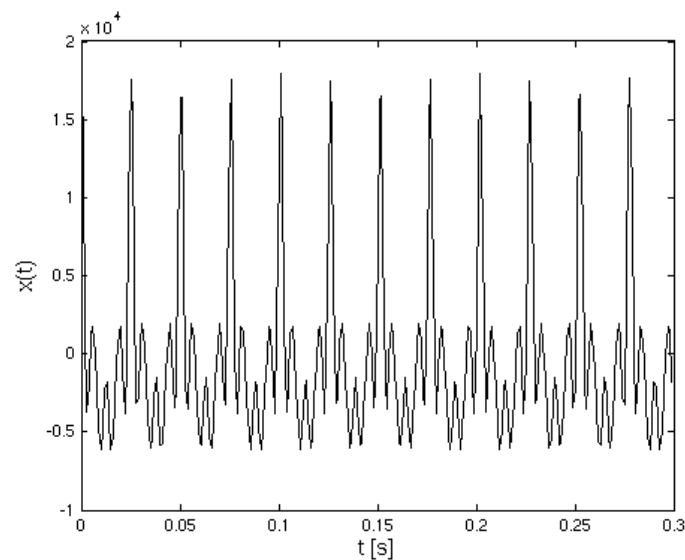
- Spektralfunktion:
 - Stärke der Anteile zur Frequenz ω
 - je nach Fragestellung $\text{Re}(F)$ oder $|F|^2$
- Spektralanalyse in der Praxis
 - wichtige Methode zur Analyse von Schwingungen
 - spezielle numerische Methoden zur Berechnung der Fouriertransformierten (FFT = Fast Fourier Transform)
 - Geräte zur sofortigen Berechnung und Darstellung von Spektralfunktionen (Spektralanalysatoren)
- Beispiel:
 - seltsame Störungen in einer Maschine, hervorgerufen durch Vibrationen unbekannter Herkunft
 - Messung der Vibrationen ergibt



- Spektralanalysator zeigt
 - Untergrund bei allen Frequenzen
 - Spitzen in festen Frequenzabständen (Grundfrequenz 39.6 Hz)
 - zusätzliche Spitze bei 50 Hz



- Interpretation:
 - Trafoschwingungen bei 50 Hz
 - Rauschen (Messfehler + allgemeine Störungen) als Untergrund
 - besondere Störung mit Grundfrequenz 39.6 Hz
- Analyse der Störung:
 - starke Impulse im Ortsraum



- Unwucht in einer Welle, schlägt rhythmisch gegen das Lager
- Aufgaben:
 - Aufgabe 4
 - Aufgabe 5



Bewegungsgleichungen für Schwingungen

- Bausteine schwingender Systeme
- Aufstellen der Bewegungsgleichung
- Linearisierung von Bewegungsgleichungen



Bausteine schwingender Systeme

- Voraussetzungen für schwingendes System:
 - Gleichgewichtslage (z.B. Kräftegleichgewicht)
 - stabil → kleine Auslenkungen ergeben Rückstellkräfte
 - Umwandlung von kinetischer und potentieller Energie
- Masse:
 - Größe mit Trägheit
 - setzt Beschleunigung Widerstand entgegen
 - Träger der kinetischen Energie
 - Zusammenfassung aller relevanten Massen in einer oder mehreren Punkten
 - bei Drehbewegung Trägheitsmoment J
 - für homogene Körper mit einfacher Geometrie aus Tafeln
 - Satz von Steiner berücksichtigen!
- Feder:
 - Größe, die rücktreibende Kraft erzeugt
 - setzt Auslenkung Widerstand entgegen
 - Träger der potentiellen Energie
 - Kraftgesetz fast immer linear angenommen
 - $F = -c x$
 - analog bei Drehbewegungen
 - $M = -c_\phi \phi$
 - Federkonstante allgemein aus Messungen oder aus Materialeigenschaften
- Beispiele:
 - Zugstab, Querschnittsfläche A , Länge L , Elastizitätsmodul E
 - $c = E A/L$
 - Balken mit Punktlast, Flächenträgheitsmoment J_a , Länge L , Elastizitätsmodul E
 - $c = 3 E J_a / L^3$
 - Torsionsstab mit kreis- oder kreisringförmigem Querschnitt, polares Flächenmoment 2. Grades I_P , Länge L , Schubmodul G
 - $c_\phi = G I_P / L$
- Dämpfer:
 - Größe, die Schwingung hemmt
 - setzt Bewegung Widerstand entgegen
 - verbraucht Energie (genauer: wandelt sie in Wärme um)
 - verschiedene Kraftgesetze bzw. Werkstoffmodelle
 - viskose Dämpfung
 - Kraftgesetz
 - $F = -b v$
 - analog für Torsionsbewegung
 - z.B. in geschmierten Lagern oder bei Wirbelstromdämpfung

○ Coulomb-Reibung

- Reibung zwischen Körper und Auflagefläche
- Stärke unabhängig von der Geschwindigkeit
- entgegengesetzt zur Geschwindigkeit gerichtet
- proportional zur Auflagekraft F_N

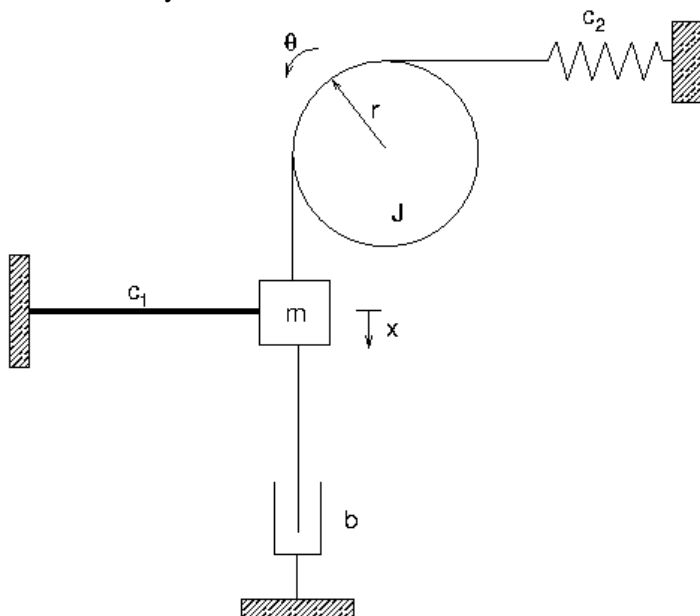
- $$F_R = \begin{cases} -\mu F_N & | \ v > 0 \\ \mu F_N & | \ v < 0 \end{cases}$$

- kompakte Schreibweise mit der Vorzeichenfunktion sign
- $F_R = -\mu F_N \text{sign}(v)$



Aufstellen der Bewegungsgleichung

- Grundvorgehen:
 - Bestimmen der Zahl der Freiheitsgrade
 - Einführen der Koordinaten (Auslenkungen/Winkel) zur Beschreibung der Bewegung
 - Bestimmen aller Kräfte/Momente durch Freischneiden
 - Aufstellen der Kraft-/Momentenbilanz
 - ggf. Überführen in eine Standardform
- Beispiel:
 - betrachtetes System



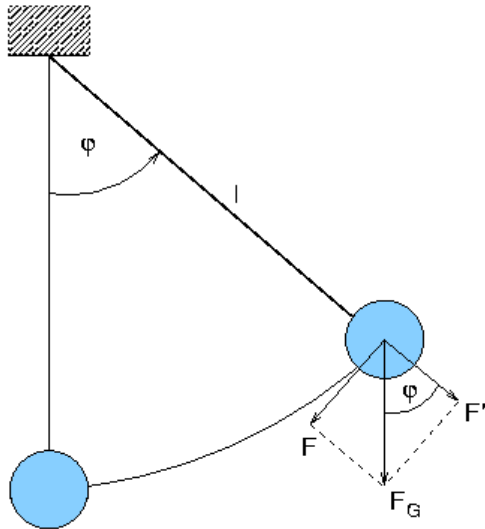
- ein Freiheitsgrad
- wählen Koordinate θ , verknüpft mit x durch $x = r \theta$
- Momentenbilanz
 - $(J + mr^2)\ddot{\theta} = -c_2 r^2 \theta - c_1 r^2 \theta - br^2 \dot{\theta}$
- Standardform
 - $\ddot{\theta} + \frac{br^2}{J + mr^2} \dot{\theta} + \frac{(c_1 + c_2)r^2}{J + mr^2} \theta = 0$
- Nullpunkte der Koordinaten:
 - so wählen, dass sie im Gleichgewicht = 0
 - statische Kräfte (z.B. Gewicht und zugehörige Ruheausdehnung einer Feder) heben sich auf
 - müssen in Bewegungsgleichung nicht berücksichtigt werden
 - genauere Betrachtung bei nicht-linearer Federkennlinie nötig
- Bestimmen der Kräfte:



- häufig nur näherungsweise für kleine Auslenkungen
- Vorzeichen bestimmen
 - Koordinate in positiver Richtung etwas auslenken
 - Kraft zeigt in gleicher Richtung → Term positiv
 - Kraft zeigt in entgegengesetzte Richtung → Term negativ
- Standardform:
 - vorgegebene Form der Bewegungsgleichung mit möglichst wenig oder möglichst einfachen Parametern
 - erleichtert Vergleich mit Standardlösung
 - häufig Vorfaktor der Trägheitsterme = 1
 - Parameter möglichst einfach oder dimensionslos
- Aufgaben:
 - Aufgabe 6
 - Aufgabe 7



Linearisierung von Bewegungsgleichungen

- Beispiel Fadenpendel:
 - Masse an einem Faden unter Gewichtskraft



- Idealisierungen
 - keine Reibungsverluste
 - Faden gewichtslos und undeformbar
 - Faden ist stabil bei großen Winkeln ("Stange")
- rücktreibende Kraft
 - $F = -m g \sin \phi$
- Bewegungsgleichung aus Momentengleichgewicht
 - $d^2 \phi / dt^2 + (g/l) \sin \phi = 0$
- Lösung der Bewegungsgleichung:
 - nichtlinear \rightarrow schwierig
 - hier analytisch möglich, aber aufwändig
 - numerische Lösung
 - 
 - im Phasenraum
 - 
 - neue Phänomene
 - Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude
 - unbeschränkter Winkel (Überschlag)
- Näherung kleiner Schwingungen:

- Annahme kleiner Auslenkungen
- Gleichung näherungsweise linear
- in praktischen Anwendungen häufig gut erfüllt
- Vorgehensweise bei der Linearisierung:
 - Bewegungsgleichung aufstellen
 - stabile Gleichgewichtslage(n) bestimmen
 - Koordinate x einführen mit $x = 0$ im Gleichgewicht
 - lineare Näherung für nichtlineare Kräfte durch Taylorentwicklung
 - komplett: $f(x) = f(0) + x f'(0) + \dots$
 - schrittweise: $\sin(x) \approx x$, $\exp(x) \approx 1 + x$, $x^2 \approx 0$ etc.
 - Einsetzen \rightarrow
 - lineare Gleichung
 - Terme $f(0)$ heben sich auf (Gleichgewicht)
- Linearisierung beim Fadenpendel:
 - Gleichgewichtslagen
 - $\sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$
 - Linearisierung um $\phi = 0$
 - $x = \phi$
 - $\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 \mp \dots$
 - $\Rightarrow \ddot{x} + (g/l) x = 0$
 - harmonische Schwingung mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$
 - Linearisierung um $\phi = \pi$
 - $x = \phi - \pi$
 - $\sin \phi = \sin(\pi + x) = -\sin x$
 - $\Rightarrow \ddot{x} - (g/l) x = 0$
 - x wächst exponentiell
 - instabiles Gleichgewicht
- Aufgaben:
 - Aufgabe 8
 - Aufgabe 9
 - Aufgabe 10



Lineare Schwinger mit einem Freiheitsgrad

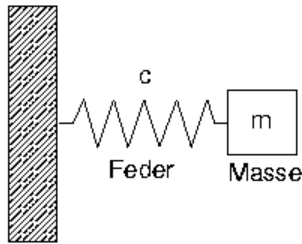
- Ungedämpfte freie Schwingung
- Freie Schwingung mit viskoser Dämpfung
- Freie Schwingung mit Gleitreibung
- Erregte Schwingung



Ungedämpfte freie Schwingung

- Feder-Masse-System:

- Masse m an Feder mit Federkonstanten c



- als Applet zum Experimentieren



- Federkraft

- $F_f = -c x$ (Hookesches Gesetz)

- Trägheitskraft

- $F_t = -m \ddot{x}$

- Bewegungsgleichung

- $$F_t + F_f = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0$$

- Mit der Abkürzung

- $\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}$

- erhält man

- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- Lösung der Bewegungsgleichung:

- lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten

- Exponentialansatz

- $x(t) = e^{j\omega t}$

- Einsetzen in die Dgl. liefert Beziehung für ω

- $-\omega^2 + \omega_0^2 = 0$

- 2 Lösungen für ω

- $\omega = \pm \omega_0$

- damit 2 Lösungen für x

- $x_{a,b} = e^{\pm j\omega_0 t}$

- lineare Dgl. mit reellen Koeffizienten \rightarrow Realteil und Imaginärteil sind Lösung

- $x_1(t) = \operatorname{Re}\{x_a\} = \cos(\omega_0 t)$
 - $x_2(t) = \operatorname{Im}\{x_a\} = \sin(\omega_0 t)$
 - allgemeine Lösung ist Superposition von x_1 und x_2
 - $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$
 - harmonische Schwingung mit Frequenz
 - $f = \omega_0/2\pi$ (Eigenfrequenz)
- Anfangsbedingungen:
 - bestimmen von A, B aus
 - $x(0) = x_0$ (Anfangsauslenkung)
 - $\dot{x}(0) = v_0$ (Anfangsgeschwindigkeit)
 - Einsetzen in allgemeine Lösung \rightarrow
 - $A = x_0$
 - $B = v_0/\omega_0$
 - damit vollständige Lösung
 - $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + v_0/\omega_0 \sin(\omega_0 t)$
- Bestimmung von Amplitude und Phasenverschiebung:
 - Überlagerung von Kosinus- und Sinusschwingung ergibt
 - $x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \phi)$
 - Formeln zur Addition harmonischer Schwingungen liefern mit $\phi_1 = 0, \phi_2 = -\pi/2$

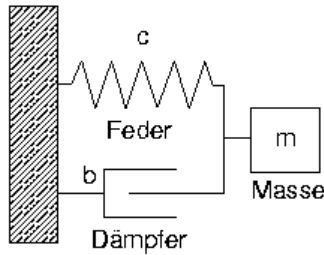
$$\hat{x} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$$
 - $\tan \varphi = \frac{-v_0}{x_0 \omega_0}$
 - Achtung: ggf. π zur Lösung von ϕ addieren!
- Aufgaben:
 - Aufgabe 11
 - Aufgabe 12
 - Aufgabe 13



Freie Schwingung mit viskoser Dämpfung

- Feder-Masse-System:

- wie oben, aber zusätzlich mit Dämpfer



- als Applet zum Experimentieren



- (Ortsraum)



- (Phasenraum)

- Reibungskraft

- $F_R = -b v$

- Bewegungsgleichung

- $F_f + F_R - m \ddot{x} = 0$

- $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{c}{m} x = 0$

- mit den Abkürzungen

- $\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \delta = \frac{b}{2m}$

- hat man etwas übersichtlicher

- $\ddot{x} + 2 \delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- Lösung der Bewegungsgleichung:

- Exponentialansatz $x(t) = e^{\lambda t}$ führt auf folgende Bestimmungsgleichung für λ

- $\lambda^2 + 2 \delta \lambda + \omega_0^2 = 0$

- Lösung

- $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

- Ergebnis hängt ab vom Vorzeichen des Terms unter der Wurzel

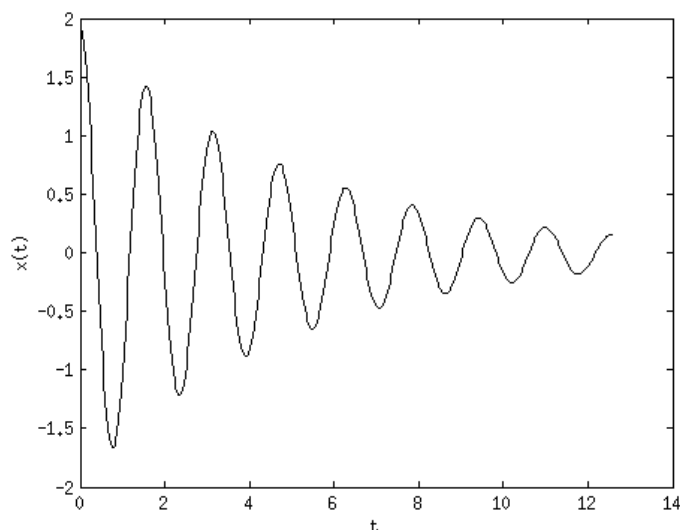
- drei Fälle, abhängig vom Dämpfungsmaß $D := \delta/\omega_0$

$D < 1$	→ 2 komplexe Werte für λ
$D > 1$	→ 2 reelle Werte für λ
$D = 1$	→ 1 reeller Wert für λ

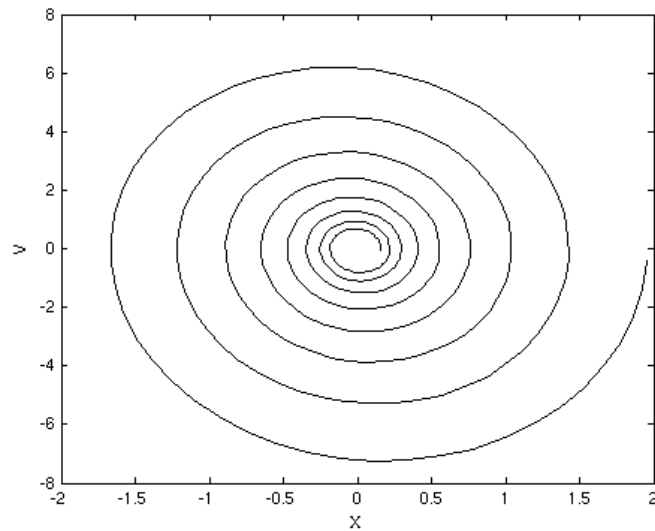
- Fall $D < 1$ (gedämpfte Schwingung):
 - mit weiterer Abkürzung
 - $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
 - ist
 - $\lambda_{1,2} = -\delta \pm j \omega$
 - damit Lösungen
 - $x_{a,b}(t) = e^{-\delta t} e^{\pm j \omega t}$
 - reelle Lösung als Superposition von Real- und Imaginärteil
 -

$$\begin{aligned}
 x(t) &= e^{-\delta t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \\
 &= \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

- Darstellung im Ortsraum



- Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Maximalwerte
 - $q := x_i / x_{i+1} = e^{\delta T}$
- mit Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$
- Logarithmieren →
 - $\Lambda := \ln(q) = \delta T$ (logarithmisches Dämpfungsmaß)
- Darstellung im Phasenraum

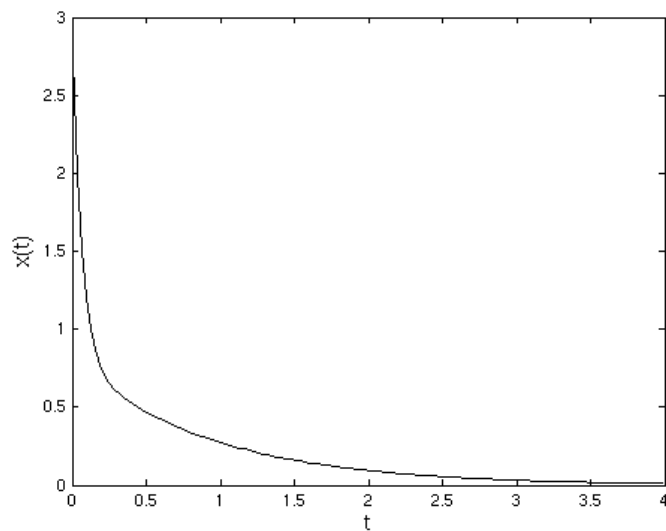


- Fall $D > 1$ (Kriechfall):

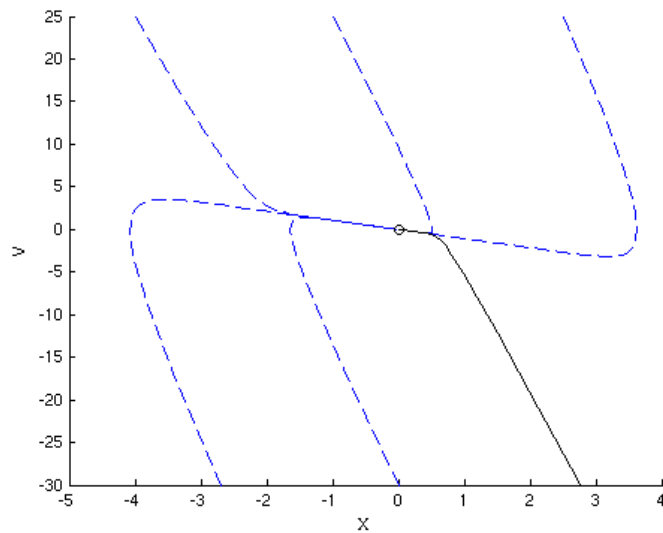
- allgemeine Lösung

- $x(t) = Ae^{-(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$

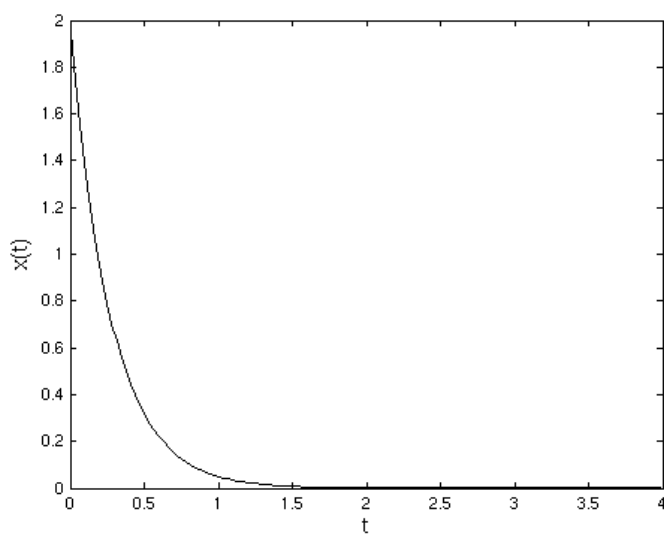
- A, B aus den Anfangsbedingungen
- Term mit B dominiert bald
- Darstellung im Ortsraum



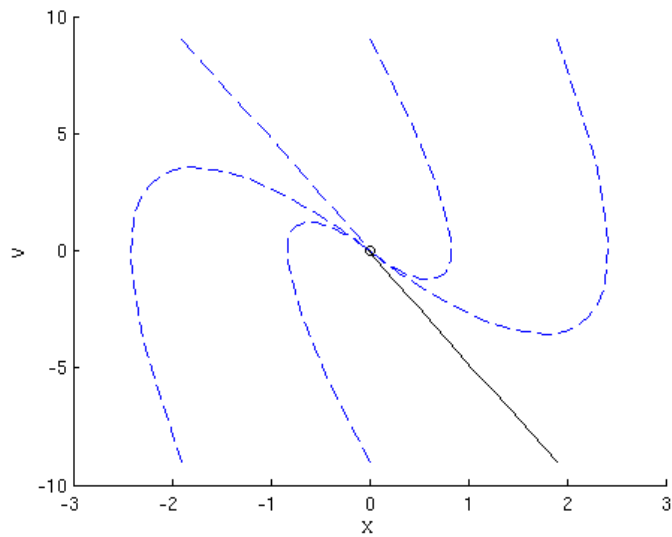
- Darstellung im Phasenraum



- Fall $D = 1$ (aperiodischer Grenzfall):
 - Grenzfall bei der kritischen Dämpfung
 - $b = 2 m \omega_0$
 - Einfacher Exponentialansatz liefert nur eine Lösung
 - allgemeine Lösung
 - $x(t) = (A + B t) e^{-\delta t}$
 - mit dem Ansatz
 - $x(t) = y(t) e^{-\delta t}$
 - oder einfach Verifizieren durch Einsetzen
 - Darstellung im Ortsraum



- Darstellung im Phasenraum



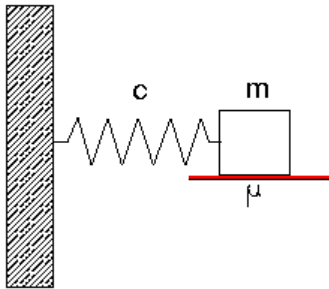
- klingt bei gegebenem ω_0 am schnellsten ab
- wichtig für Schwingungsdämpfer, Messgeräte etc.
- Aufgaben:
 - Aufgabe 14
 - Aufgabe 15
 - Aufgabe 16



Freie Schwingung mit Gleitreibung

- Feder-Masse-System:

- mit Gleitreibung



- als Applet zum Experimentieren



(Ortsraum)



(Phasenraum)

- Bewegungsgleichung

- $$m\ddot{x} + cx = \begin{cases} -\mu F_N & | \dot{x} > 0 \\ \mu F_N & | \dot{x} < 0 \end{cases}$$

- in Standardform

- $\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\omega_0^2 x_R \operatorname{sign}(\dot{x})$

- mit

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}$$

- $x_R := \frac{\mu F_N}{c}$

- Lösung der Bewegungsgleichung:

- innerhalb eines Bereichs ($v > 0$ bzw. $v < 0$)

- konstante Zusatzkraft
- analog zur Gewichtskraft beim senkrechten Pendel
- effektive Verschiebung des Nullpunkts

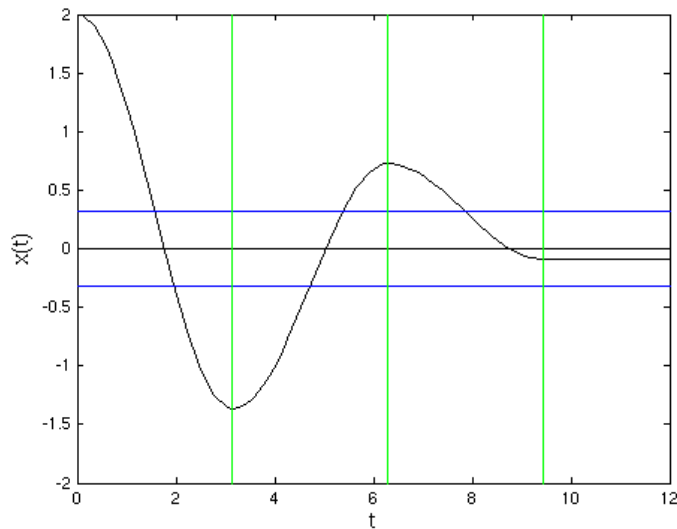
- Lösung durch Einführung der verschobenen Auslenkung

- $$q = \begin{cases} x + x_R & | \dot{x} > 0 \\ x - x_R & | \dot{x} < 0 \end{cases}$$

- ergibt harmonische Schwingungsgleichung für q

- Bewegung im Ortsraum:

-



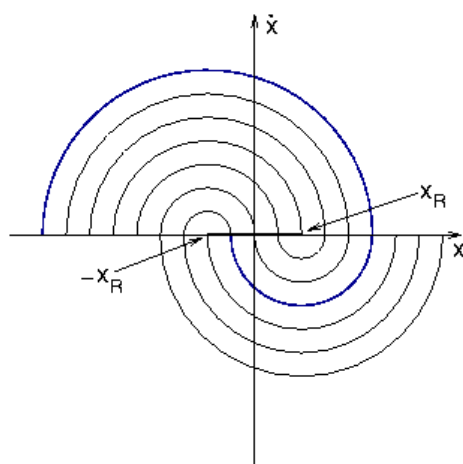
- gleiche Schwingungsperiode wie ohne Reibung
- Nullpunkt wechselt bei jedem Bereichswechsel
- Abnahme der Amplitude bei jeder Halbschwingung um $2 x_R$
- Reibung größer als Federkraft \rightarrow Stillstand am Wendepunkt mit $|x| < x_R$
- Zahl der Halb-Schwingungen: kleinste ganze Zahl mit

$$|x_0| - 2nx_R < x_R$$

$$\Rightarrow n = \left\lceil \frac{|x_0| - x_R}{2x_R} \right\rceil$$

- Phasenraum-Diagramm:

○



- Halbkreise mit verschiedenem Mittelpunkt in oberer und unterer Halbebene
- endet in Strecke $[-x_R, x_R]$ auf der x-Achse

- Aufgaben:

- Aufgabe 17



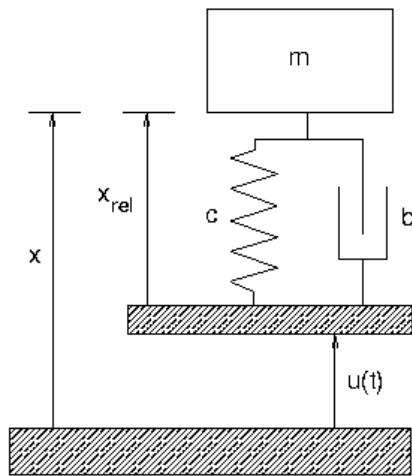
Erregte Schwingung

- Bestimmung der Differentialgleichung
- Harmonische Anregung
- Schwingungsisolierung
- Allgemeine periodische Anregung
- Nicht-periodische Anregung



Bestimmung der Differentialgleichung

- Erzwungene Schwingungen:
 - Anregung eines schwingfähiges System durch äußere Kräfte
 - Ursachen z.B.
 - direkte Kraftübertragung
 - Fußpunkterregung
 - Unwucht
 - Anregung häufig harmonische Schwingung
 - $F_E(t) = \hat{F}_E \cos(\Omega t)$
- Aufstellen der Bewegungsgleichung:
 - Schwinger mit viskoser Dämpfung
 - beliebige äußere Kraft F_E
 - $m \ddot{x} + b \dot{x} + c x = F_E$
 - mit den Abkürzungen
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$
$$D = \frac{b}{2m\omega_0}$$
$$f_E = \frac{F_E}{m\omega_0^2}$$
 -
 - ist dies
 - $\ddot{x} + 2 D \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f_E$
- Erregerfunktion f_E :
 - gleiche Einheit wie x
 - im statischen Fall $f_E(t) \equiv x_S = \text{const}$:
 - $x = x_S$ (statische Verschiebung)
- Schwinger mit Fußpunkterregung:
 - System schwingt, weil sich der Boden bewegt



- Bewegung des Bodens: $u(t)$
- Abstand des Schwingers vom Boden
 - $x_{rel}(t) = x(t) - u(t)$
- Dämpfung und Feder bezogen auf x_{rel} , daher
 - $\ddot{x} + 2 D \omega_0 (\dot{x} - \dot{u}) + \omega_0^2 (x - u) = 0$
- Bewegungsgleichung für x_{rel}
 - $\ddot{x}_{rel} + 2 D \omega_0 \dot{x}_{rel} + \omega_0^2 x_{rel} = -\ddot{u} \equiv \omega_0^2 f_E$
- speziell für harmonische Anregung

$$u(t) = \hat{u} \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow f_E = \hat{u} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos(\Omega t)$$

- zusätzlicher Faktor Ω^2
- Bewegungsgleichung für x
 - $\ddot{x} + 2 D \omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = 2 D \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u \equiv \omega_0^2 f_E$
- für harmonische Anregung

$$f_E(t) = \hat{u} \cos(\Omega t) - 2 D \hat{u} \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\Omega t)$$

$$= \hat{f}_E \cos(\Omega t + \psi)$$

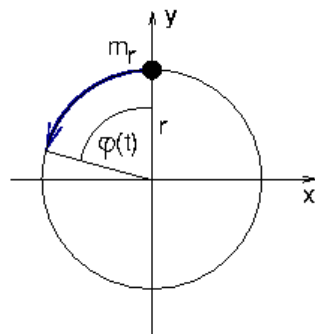
- mit

$$\hat{f}_E = \hat{u} \sqrt{1 + 4 D^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\tan \psi = 2 D \frac{\Omega}{\omega_0}$$

- komplizierter Faktor und zusätzliche Phasenverschiebung ψ
- Vergleich der Bezugssysteme
 - Absolutsystem x
 - Inertialsystem

- Kräfte leicht berechenbar
- besser verallgemeinerbar auf gekoppelte Systeme
- Relativsystem x_{rel}
 - x_{rel} leichter messbar
 - Abstand zum Boden wichtige Größe
 - keine zusätzliche Phasenverschiebung
- Schwinger mit rotierender Unwucht:
 - Modell:
 - Masse m_r (Unwucht) rotiert im Abstand r von Drehachse
 - beliebige Drehbewegung $\phi(t)$
 - Anregung des Schwingers (Gesamtmasse m) nur in vertikaler Richtung



- Rotorbewegung q_r :

- $$q_r = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi(t) \\ r \cos \varphi(t) \end{pmatrix}$$

- Vertikale Kraft durch Rotor auf Maschine = Gegenkraft zur Beschleunigung des Rotors

- $$F_r = -m_r \ddot{q}_{r,y}$$

$$= m_r r \ddot{\varphi} \sin \varphi + m_r r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$$

- speziell bei konstanter Drehgeschwindigkeit

- $$\varphi = \Omega t$$

$$\Rightarrow F_E = m_r r \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

$$\Rightarrow f_E = \frac{m_r r}{m} \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \cos(\Omega t)$$

- ebenfalls zusätzlicher Faktor Ω^2
- Aufgaben:
 - Aufgabe 18



Harmonische Anregung

- Simulation:



- - Verhalten bei $b/m = 0.3/s$, $c/m = 1/s^2$ und verschiedenen Anregungsfrequenzen
 - $\Omega = 0.5/s$
 - erst Einschwingen, dann harmonische Schwingung
 - folgt Anregung leicht phasenverschoben
 - $\Omega = 1.0/s$
 - sehr große Amplitude (Resonanz) um $\pi/2$
 - zur Anregung phasenverschoben
 - $\Omega = 2.0/s$
 - wieder kleinere Amplitude
 - Phasenverschiebung fast π (gegenläufig zur Anregung)
- Lösung der Bewegungsgleichung:
 - Erregerfunktion ist harmonische Schwingung
$$f_E(t) = \hat{f}_E \cos \Omega t$$
 - $= \hat{f}_E \operatorname{Re}(e^{j\Omega t})$
 - allgemeine Lösung besteht aus Überlagerung zweier Schwingungen
 - $x(t) = x_{\text{homogen}}(t) + x_{\text{part}}(t)$
 - $x_{\text{homogen}}(t)$
 - Lösung der Gleichung ohne Anregung (homogene Gleichung)
 - gedämpfte Schwingung oder (für $D > 1$) Kriechen
 - enthält Abhängigkeit von Anfangsbedingungen
 - meistens irrelevant
 - nötig, wenn Maximalamplitude gesucht
- Bestimmung einer partikulären Lösung:
 - am einfachsten im Komplexen als Realteil der Lösung von
 - $\ddot{z} + 2D\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 \hat{f}_E e^{j\Omega t}$
 - Lösungsansatz: Schwingung mit Anregungsfrequenz
 - $z(t) = \hat{f}_E H e^{j\Omega t}$
 - Einsetzen ergibt
 - $-\Omega^2 H + 2D\omega_0 H j\Omega + \omega_0^2 H = \omega_0^2$

$$\Rightarrow H = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2D\Omega\omega_0 j}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\Omega\omega_0)^2} [(\omega_0^2 - \Omega^2) - (2D\Omega\omega_0)j]$$

-
- durch Zerlegen von H in Polarform

- $H = V e^{j\varphi}$

- erhält man

$$V = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4D^2\Omega^2\omega_0^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{-2D\Omega\omega_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

-
- Lösung damit

$$x(t) = \operatorname{Re} \{z(t)\}$$

$$= \operatorname{Re} \{ \hat{f}_E V e^{j(\Omega t + \varphi)} \}$$

$$= \hat{f}_E V \cos(\Omega t + \varphi)$$

-
- Vergrößerungsfunktion V = Vielfaches der Amplitude im Vergleich mit statischer Anregung
- Einführen des Frequenzverhältnisses

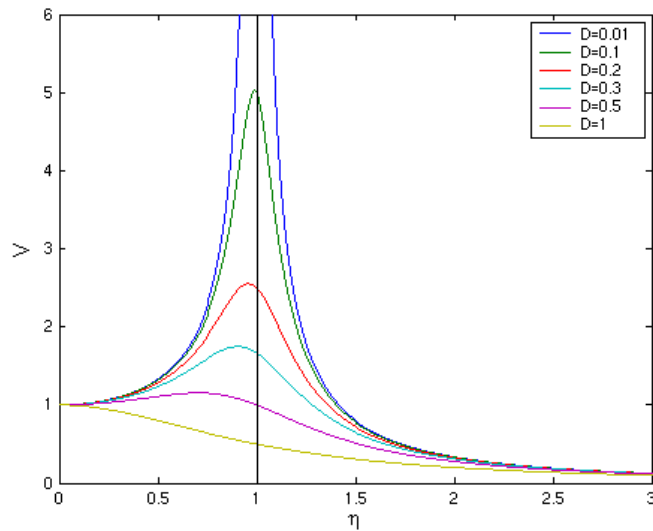
- $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

- liefert

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{-2D\eta}{1 - \eta^2}$$

- Vergrößerungsfunktion:
 - graphisch

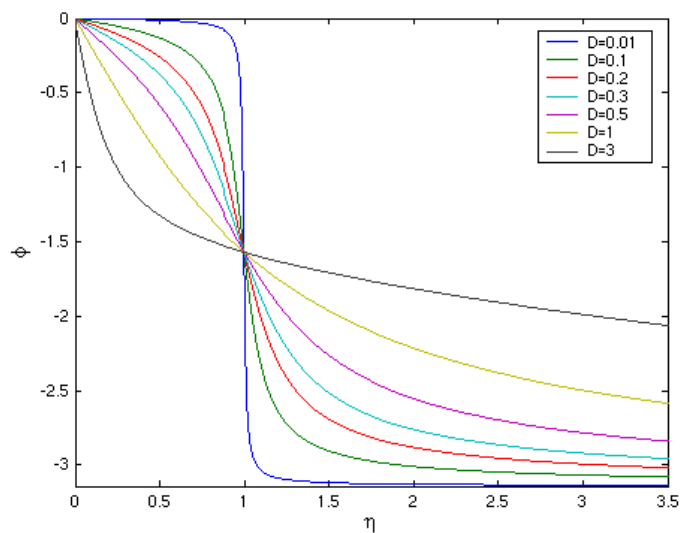


- für kleine Dämpfung ($D \ll 1$): Maximum bei $\eta = 1$ (Resonanz)
- Maximalwert für $D < 1/\sqrt{2}$:

$$\eta_{max} = \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$V(\eta_{max}) = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

- Phasenwinkel:
 - graphisch



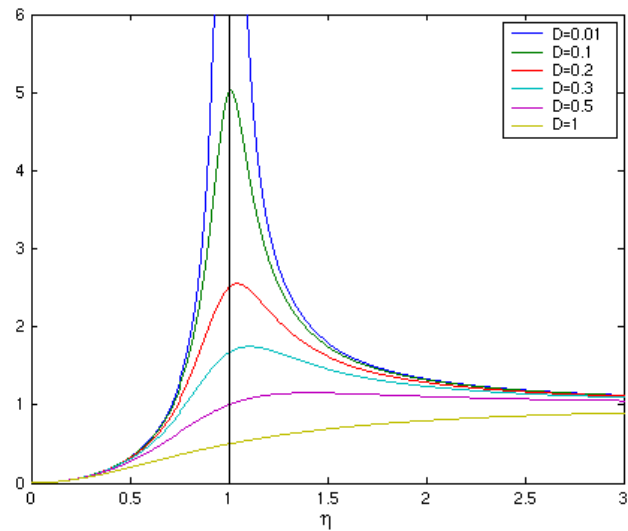
- besondere Fälle:
 - niedrige Anregungsfrequenz \rightarrow Masse folgt direkt
 - Resonanz \rightarrow Phasenverschiebung $= \pi/2$
 - hohe Anregungsfrequenz \rightarrow gegenläufige Bewegung
- Aufgaben:

- Aufgabe 19
- Aufgabe 20
- Aufgabe 21

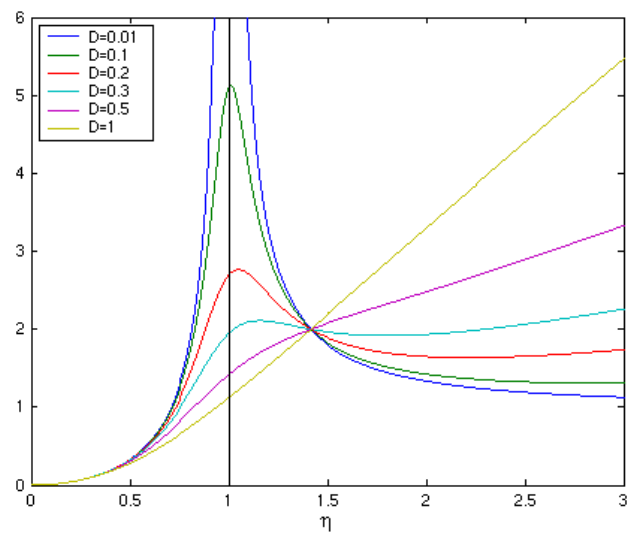


Schwingungsisolierung

- Problemstellung:
 - Verminderung des Einflusses von Schwingungen
 - Amplituden und Kräfte möglichst klein halten
 - zwei Richtungen:
 - Übertragung von Schwingungen (z.B. durch Unwuchten) auf den Boden (aktive Isolierung)
 - Übertragung von Bodenschwingungen auf die Maschine (passive Isolierung)
 - Rechnungen und Ergebnisse in beiden Fällen sehr ähnlich
 - betrachten i.f. nur aktive Schwingungsisolierung
- Bodenkräfte beim Schwinger mit Unwucht:
 - Amplitude der Erregerfunktion war
 - $\hat{f}_E = \frac{m_r r}{m} \eta^2$
 - Auslenkung
 - $$\begin{aligned} x(t) &= V \hat{f}_E \cos(\Omega t + \varphi) \\ &= \frac{m_r r}{m} \eta^2 V \cos(\Omega t + \varphi) \end{aligned}$$
 - Kraft R auf den Boden durch Feder und Dämpfer übertragen →
 - $$\begin{aligned} R &= cx + b\dot{x} \\ &= c \left(x + \frac{2D}{\omega_0} \dot{x} \right) \\ &= \frac{c}{m} m_r r \eta^2 V [\cos(\Omega t + \varphi) - 2D\eta \sin(\Omega t + \varphi)] \end{aligned}$$
 - Addition der beiden Winkelfunktionen ergibt für die Amplitude der Kraft
 - $\hat{R} = \frac{c}{m} m_r r \eta^2 V \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2} = \hat{F}_E V \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}$
- Interpretation des Ergebnisses:
 - kleine Auslenkung → η^2 V klein



○ kleine Kraft $\rightarrow \eta^2 V \sqrt{1 + 4D^2 \eta^2}$ klein



○ Maßnahmen bei bestimmten Bereichen von η

- $\ll 1$ für jeden Wert von D gut
- ≈ 1 möglichst hohe Dämpfung erforderlich
- $\approx \sqrt{2}$ fast unabhängig von D
- $\gg \sqrt{2}$ möglichst geringe Dämpfung erforderlich

- Problem bei großem η
 - starke Resonanz beim Hochfahren der Maschine mit kleiner Dämpfung
- Lösungsverfahren
 - Resonanzbereich möglichst schnell durchlaufen
 - abschaltbare Dämpfung, am Anfang zugeschaltet
- Aufgaben:
 - Aufgabe 22



Allgemeine periodische Anregungen

- Harmonische Anregung mit Phasenverschiebung:

- Erregerfunktion

- $f_E(t) = \hat{f}_E \cos(\Omega t + \psi)$

- z.B. im Inertialsystem bei Fußpunkterregung
- bedeutet einfach Verschiebung des Zeit-Nullpunkts
- Lösung entsprechend phasenverschoben

- $x(t) = \hat{f}_E V(\eta, D) \cos(\Omega t + \psi + \varphi(\eta, D))$

- Periodische Anregungsfunktion:

- f_E beliebige Funktion mit Periode T
- darstellbar als Fourierreihe mit Grundkreisfrequenz $\Omega = 2\pi/T$

- $f_E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$

- jedes Glied der Reihe harmonische Anregung mit Frequenzverhältnis

- $\eta_n = n \frac{\Omega}{\omega_0} = n\eta$

- Partikuläre Lösung:

- Lösung $x_n(t)$ für n-tes Teilglied

- $x_n(t) = C_n V(n\eta, D) \cos(n\Omega t + \psi_n + \varphi(n\eta, D))$

- Superpositionsprinzip → Gesamtlösung ist Summe der Einzellösungen

- $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n V(n\eta, D) \cos(n\Omega t + \psi_n + \varphi(n\eta, D))$

- Resonanz kann bei irgendeinem Glied der Reihe auftreten
- Lösungsfunktion i.a. sehr verschieden von Anregung
- Schwinger wirkt wie Filter

- Aufgaben:

- Aufgabe 23



Nicht-periodische Anregung

- Stoßartige Anregung:

- sehr kurzer Kraftstoß, Stärke \hat{f}_E

- beschrieben durch δ -Funktion

- Bewegungsgleichung

- $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2\hat{f}_E\delta(t)$

- Schwinger direkt vor dem Stoß in Ruhe

- Schwinger direkt nach dem Stoß nicht mehr erregt

- Anfangsgeschwindigkeit v_0 durch Stoß

- danach freie gedämpfte Schwingung

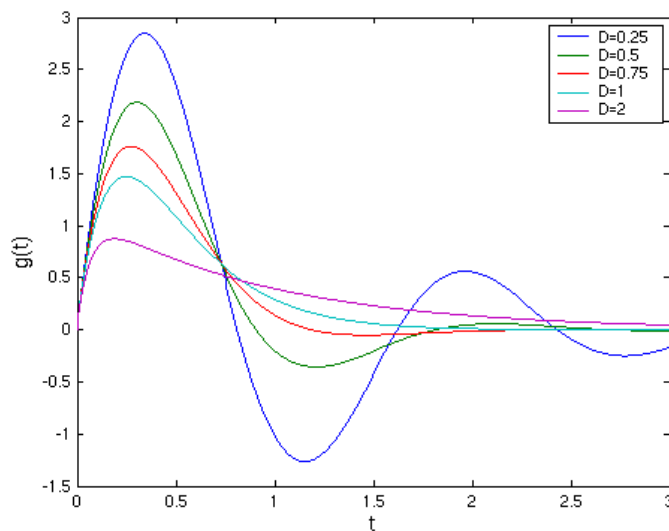
- Lösung für $D < 1$

- $x_{\text{Stoß}}(t) = \hat{f}_E g(t)$

- mit der Greensfunktion

- $g(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1-D^2}\omega_0 t) \sigma(t)$

- im Bild



- Herleitung im Anhang

- Zeitverschobener Stoß:

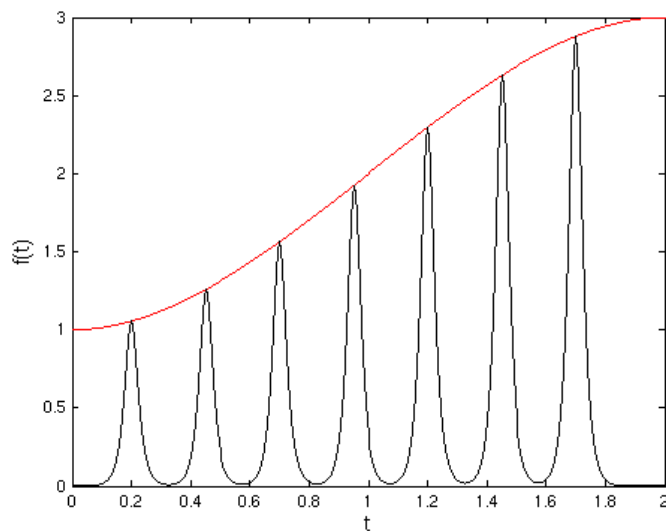
- Kraftstoß zu beliebiger Zeit t_0

- $f_E(t) = \hat{f}_E \delta(t - t_0)$

- (homogene) Bewegungsgleichung hängt nicht explizit von der Zeit ab

- Lösung wie bei $t_0 = 0$, aber zeitverschoben

- $x(t) = \hat{f}_E g(t - t_0)$
- Beliebige Anregungsfunktion:
 - zusammengesetzt aus vielen Stößen



- in Formeln
 - $f_E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t') \delta(t - t') dt'$
 - Superpositionsprinzip ("Integral = kontinuierliche Summe") \rightarrow
 - $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(t') g(t - t') dt'$
 - Wegen $\sigma(t - t') = 0$ für $t' > t$ folgt die Lösung als Faltungsintegral
 - $x(t) = \int_{-\infty}^t f_E(t') g(t - t') dt'$
- Aufgaben:
 - Aufgabe 24



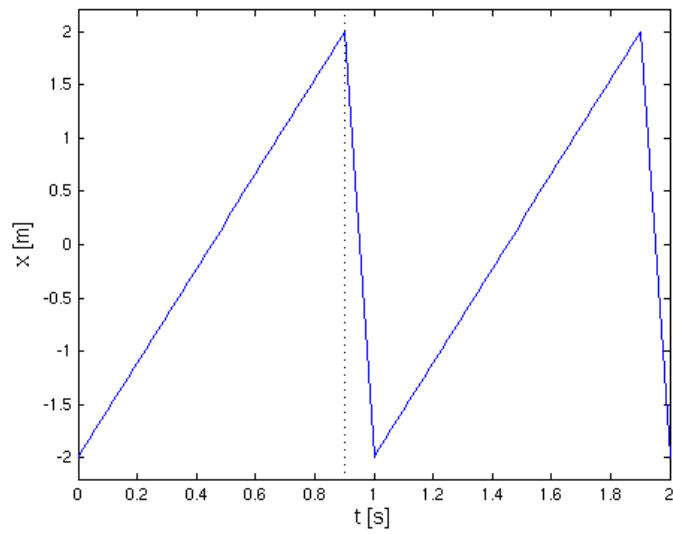
Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12
- Aufgabe 13
- Aufgabe 14
- Aufgabe 15
- Aufgabe 16
- Aufgabe 17
- Aufgabe 18
- Aufgabe 19
- Aufgabe 20
- Aufgabe 21
- Aufgabe 22
- Aufgabe 23
- Aufgabe 24



Aufgabe 1

- Bestimmen Sie das Phasenraum-Diagramm für folgende Sägezahn-Schwingung:

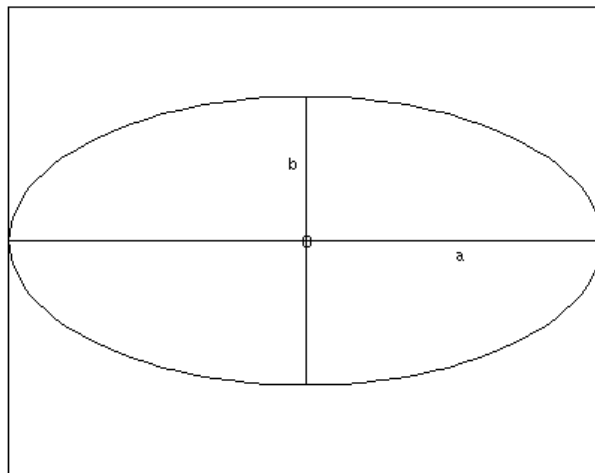



- Lösung



Aufgabe 2

- Untersuchen Sie das Phasenraum-Diagramm der harmonischen Schwingung $x(t) = \hat{x} \cos(\omega t)$
 1. Zeigen Sie, dass es eine Ellipse ist und bestimmen Sie deren Halbachsen a und b.

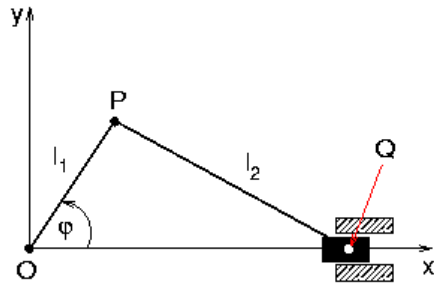



2.  Erstellen Sie das Phasenraum-Diagramm mit Matlab.
- Hinweis:
 - Die Gleichung einer Ellipse mit den Halbachsen a und b lautet in Koordinatenform
 - $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$
 - Lösung



Aufgabe 3

- Ein Schubkurbelgetriebe werde zur Umsetzung einer Drehbewegung in eine Schubbewegung verwendet.

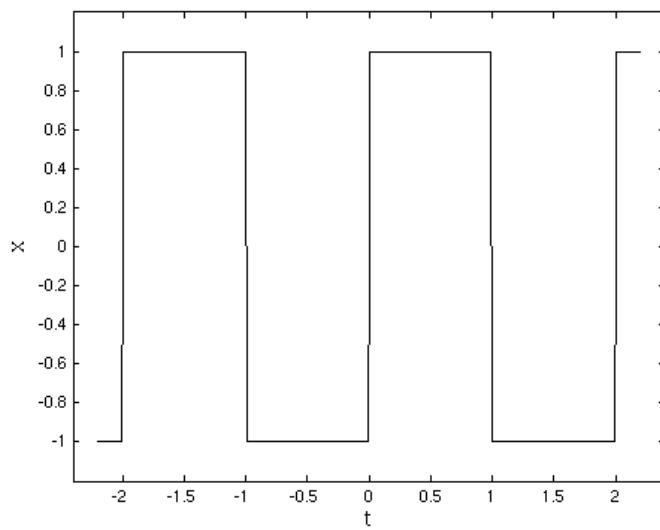


- Bestimmen Sie die Ortskurve $x(t)$ des Endpunkts Q bei konstanter Antriebsfrequenz ω .
 -  Erzeugen Sie ein Orts- und ein Phasendiagramm für verschiedene Werte des Schubstangenverhältnisses
 - $\lambda := l_1/l_2 < 1$
- Lösung



Aufgabe 4


- Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten der folgenden Rechteckschwingung (der Einfachheit halber ohne Einheiten):



- Lösung



Aufgabe 5

-  Untersuchen Sie das Fourierspektrum der Schubkurbelbewegung aus Aufgabe 3:
 1. Berechnen Sie mit Hilfe der `quadl`-Funktion die ersten 10 Fourierkoeffizienten für die Schubstangenverhältnisse $\lambda = 0.4$ und $\lambda = 0.99$. Stellen Sie die Spektren graphisch dar.
 2. Rekonstruieren Sie die Ortskurven aus den Fourierkoeffizienten mit dem Applet `Fouriersynthese` mit Kosinusfunktionen.
 3. Überprüfen Sie die Ergebnisse, indem Sie mit Matlab jeweils die 10 Schwingungen explizit addieren und zusammen mit den Ortskurven der Schubkurbelbewegung plotten.
- Hinweise:
 - Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten bietet sich eine Schleife an, die in Matlab mit dem `for`-Kommando realisiert wird.
 - Die Koeffizienten lassen sich übersichtlich mit einem Stem-Plot darstellen.
- Lösung



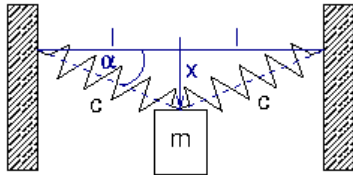
Aufgabe 6


- Eine Masse m hängt an einer an der Decke befestigten Feder mit der Federkonstanten c und schwingt unter ihrem Eigengewicht.
 1. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf. Verwenden Sie als Koordinate x die Auslenkung der Feder aus ihrer Ruhelage.
 2. Bestimmen Sie die Auslenkung x_g , bei der die statischen Kräfte im Gleichgewicht sind.
 3. Die Koordinate q sei definiert als Abweichung von der Gleichgewichtslage
 - $q := x - x_g$Schreiben Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe von q .
- Lösung



Aufgabe 7

- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung einer zwischen zwei Federn eingespannten Masse m , die die Federn durch ihr Gewicht symmetrisch nach unten auslenkt:

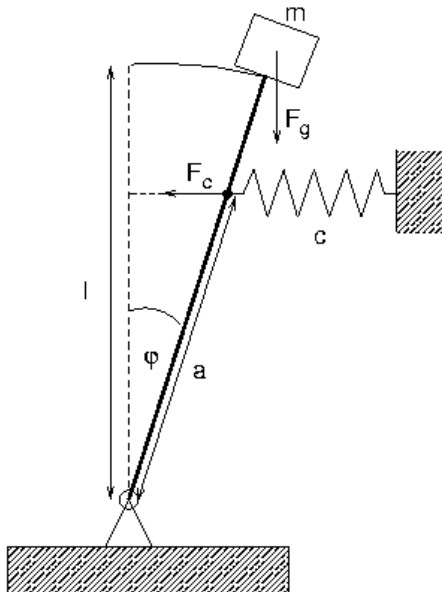


- Nehmen Sie an, dass bei waagerechter Position beide Federn entspannt sind (keine Vorspannung).
-  Berechnen Sie die Gleichgewichtslage der Masse für folgende Werte der Parameter:
 - $m = 350 \text{ kg}$
 - $c = 1.5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$
 - $l = 50 \text{ mm}$
- Lösung



Aufgabe 8

- Ein Pendel der Länge l und der Masse m werde durch eine Feder in der Nähe der Überkopfstellung gehalten. Die Feder sei genau in der senkrechten Pendellage entspannt.

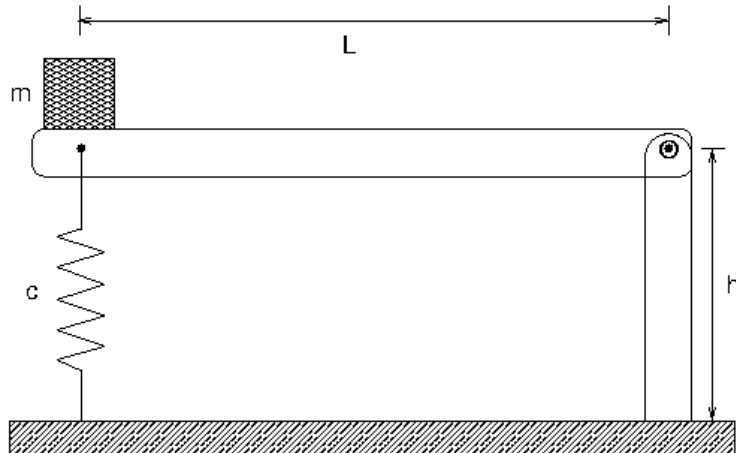


- Stellen Sie die (nichtlineare) Bewegungsgleichung für ϕ auf. Vernachlässigen Sie dabei die leichte Schräglage der Feder.
 - Bestimmen Sie alle Gleichgewichtslagen.
 - Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die Gleichgewichtslagen.
 - Was geschieht bei halb so großer Federkonstanten c ?
 - Analysieren Sie Ihre bisherigen Ergebnisse algebraisch: Für welche Werte der Konstanten gibt es nur einen oder mehrere Gleichgewichtslagen, wann sind sie stabil?
- Werte:
 - $l = 1.8 \text{ m}$
 - $a = 1.5 \text{ m}$
 - $m = 10 \text{ kg}$
 - $c = 100 \text{ N/m}$
 - $g = 9.81 \text{ m/s}^2$
 - Lösung



Aufgabe 9

- Ein starrer masseloser Hebel wird durch eine Feder in waagerechter Position gehalten. Wird er am Ende mit einer Masse m belastet, beginnt er zu schwingen.

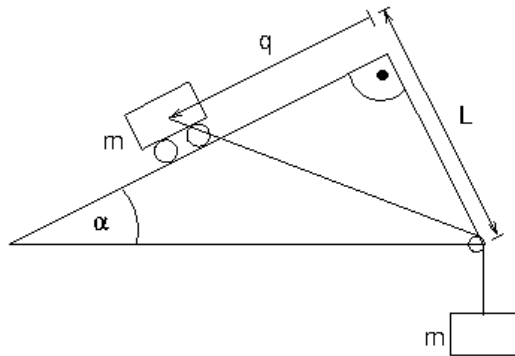


- Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems unter Vernachlässigung der kleinen horizontalen Verschiebung der Feder. Berechnen Sie den Gleichgewichtswinkel und linearisieren Sie die Gleichung.
 - Erweitern Sie die Bewegungsgleichung, indem Sie die seitliche Auslenkung der Feder berücksichtigen. Behandeln Sie die Masse vereinfacht als Punktmasse am Angriffspunkt der Feder.
- Lösung



Aufgabe 10

- Eine Masse bewege sich reibungsfrei auf einer schiefen Ebene. Außerdem ziehe ein durch ein Seil umgelenktes Gewicht der Masse m an ihr:



1. Stellen Sie die (nichtlineare) Bewegungsgleichung für q auf.
 2. Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage.
 3. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung um die Gleichgewichtslage.
- Lösung




Aufgabe 11

- Um das Trägheitsmoment J eines Rades zu bestimmen, wird es am Ende einer Stahlwelle (Schubmodul G) der Länge l und des Durchmessers d befestigt und in Torsionsschwingungen versetzt. Deren Schwingungsdauer T wird gemessen als $T = 0.25$ s. Wie groß ist J ?
- Hinweise:
 - Das polare Flächenmoment 2. Grades für einen kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d beträgt
 - $I_P = \pi d^4 / 32$
 - Das Trägheitsmoment der Welle werde vernachlässigt.
- Werte:
 - $d = 30$ mm
 - $l = 0.90$ m
 - $G = 8 \cdot 10^{10}$ N/m²
- Lösung




Aufgabe 12

- Untersuchen Sie das System aus Aufgabe 8.
 1. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T für kleine Auslenkungen.
 2. Was ergibt sich, wenn der Wert der Federkonstanten nur $c = 50 \text{ N/m}$ beträgt?
 3.  Lösen Sie die nichtlineare Schwingungsgleichung mit Matlab und vergleichen Sie die Schwingungsdauer mit dem genäherten Wert aus a. für verschiedene Anfangsauslenkungen. Untersuchen Sie auch die Lösung für den kleineren Wert von c .
- Lösung



Aufgabe 13

- Untersuchen Sie das System aus Aufgabe 10.
 1. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsposition und die Schwingungsdauer T für kleine Auslenkungen.
 2.  Lösen Sie die nichtlineare Bewegungsgleichung mit Matlab für verschiedene Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage und vergleichen Sie die Schwingungsdauern mit dem Ergebnis von a.
- Werte:
 - $L = 2 \text{ m}$
 - $\alpha = 25^\circ$
 - Anfangsauslenkungen 0.1 m , 0.5 m , 0.93 m
- Lösung



Aufgabe 14

- Bei einer schwach gedämpften Schwingung beobachtet man, dass nach 10 Schwingungen die Amplitude um 30% abgenommen hat. Die Periode bestimmt man zu 35 s.
- Ermitteln Sie daraus das logarithmische Dämpfungsmaß Λ und das Dämpfungsmaß D .
- Lösung



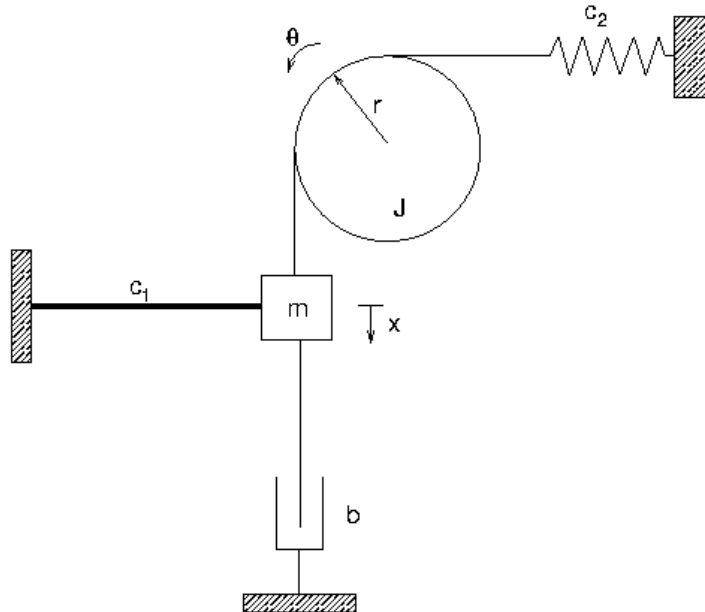
Aufgabe 15

- Eine Masse von 1 kg schwingt fast ungedämpft mit einer Frequenz $f = 50$ Hz. Um die Schwingung möglichst rasch herabzudämpfen, soll eine von drei Dämpfungseinheiten mit den Dämpfungskonstanten 400 kg/s, 600 kg/s, 800 kg/s eingebaut werden. Welche?
 1. Ermitteln Sie jeweils das Dämpfungsmaß D und entscheiden Sie daran.
 2. Um welchen Faktor ist bei jedem der drei Dämpfer die Schwingung nach $1/50$ s abgeklungen? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit a.
- Lösung



Aufgabe 16

- Betrachten Sie das System aus Abschnitt Aufstellen der Bewegungsgleichung

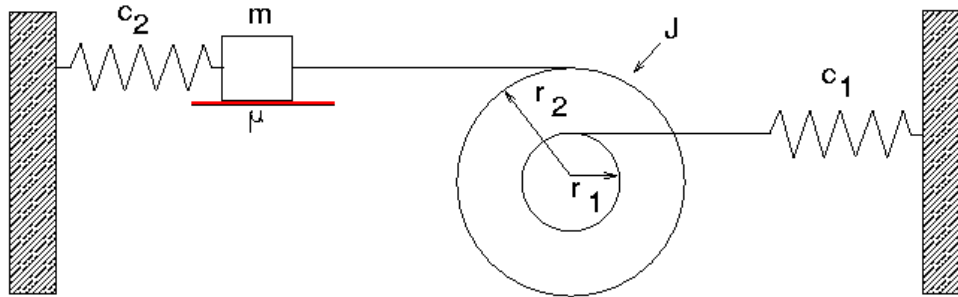


1. Wie groß sind die Schwingungsdauer T und das Dämpfungsmass D ?
 2. Wie groß muss b sein, um Schwingungen möglichst schnell zu unterdrücken?
- Werte:
 - ☐ $c_1 = 75 \text{ N/m}$
 - ☐ $c_2 = 25 \text{ N/m}$
 - ☐ $b = 10 \text{ kg/s}$
 - ☐ $m = 1.2 \text{ kg}$
 - ☐ $J = 0.1 \text{ kg m}^2$
 - ☐ $r = 0.2 \text{ m}$
 - Lösung



Aufgabe 17

- Gegeben sei das System



mit den Werten

$$m = 2 \text{ kg}$$

$$J = 1 \text{ kg m}^2$$

$$c_1 = 70 \text{ N/m}$$

$$c_2 = 40 \text{ N/m}$$

$$r_1 = 0.2 \text{ m}$$

$$r_2 = 0.4 \text{ m}$$

$$\mu = 0.12$$

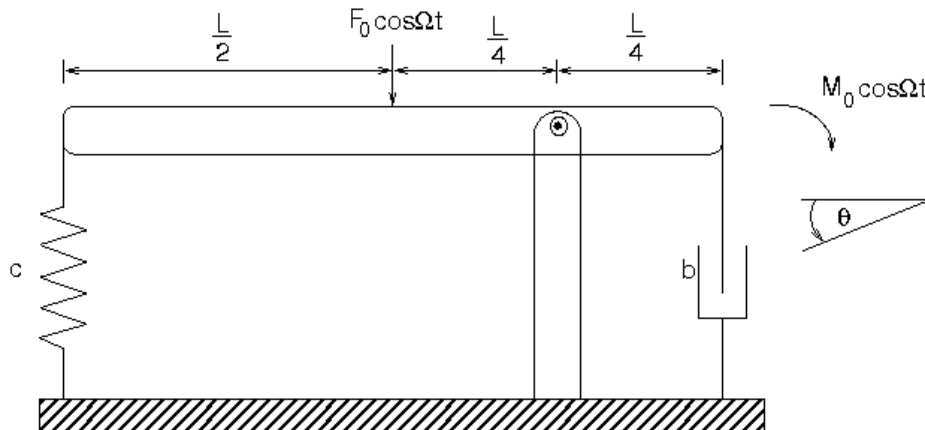
- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Drehwinkel θ auf.
- Bestimmen Sie die Schwingungsperiode T .
- Wie groß ist die Abnahme der Schwingungsamplitude (von θ) pro Schwingung?
- Die Scheibe sei anfangs um 90° gegen die Gleichgewichtslage ausgelenkt. Wieviele Schwingungen macht sie und bei welchem Winkel kommt sie zur Ruhe?

- Lösung



Aufgabe 18

- Ein Hebel der Masse m sei schwingfähig und gedämpft gelagert. Die Federvorspannung halte ihn in horizontaler Position im Gleichgewicht, und es wirken harmonische Kräfte und Momente auf ihn:



- Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Drehwinkel θ auf. Nehmen Sie dabei den Winkel als klein an.
 - Bestimmen Sie Eigenfrequenz ω_0 , Dämpfungsmaß D und Amplitude f_E der Erregerfunktion.
- Werte:
 - $L = 1.8 \text{ m}$
 - $m = 18.5 \text{ kg}$
 - $c = 4000 \text{ N/m}$
 - $b = 2000 \text{ kg/s}$
 - $F_0 = 500 \text{ N}$
 - $M_0 = 150 \text{ Nm}$
 - Lösung



Aufgabe 19

- Das System aus Aufgabe 18 werde angeregt mit einer Kreisfrequenz von $\Omega = 30$ 1/s. Wie groß ist die Nickamplitude (in Grad) und wie groß ist die Phasenverschiebung zwischen Anregung und Bewegung?
- Lösung



Aufgabe 20

- Eine Maschine der Masse $m = 1.5 \text{ t}$ steht auf sechs gleichen Federn der Federkonstante $c = 3 \cdot 10^4 \text{ N/m}$. Sie werden gedämpft mit einem Dämpfungsgrad $D = 0.15$. Aufgrund einer Unwucht treten bei einer Drehzahl von $n_1 = 500 \text{ U/min}$ Schwingungen mit einer Amplitude von $A_1 = 1 \text{ mm}$ auf.

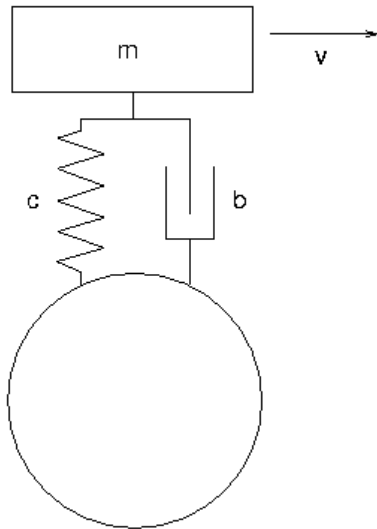
Wie muss die Drehzahl n_2 gewählt werden, damit die Amplitude nur noch $A_2 = 0.1 \text{ mm}$ beträgt ?

- Lösung



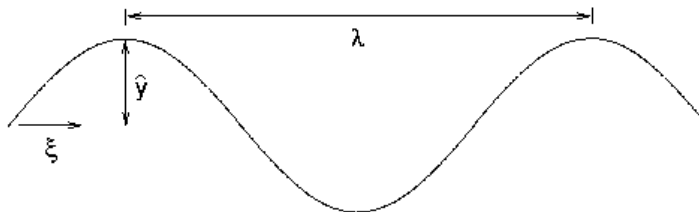
Aufgabe 21

- Ein Auto werde modelliert als ein Schwinger, der über eine Feder und einen Dämpfer mit dem Rad verbunden ist:



Das Rad bewege sich auf einer welligen Straße der Form

○ $y(\xi) = \hat{y} \cos(2\pi \xi/\lambda)$



- Wie groß ist die Amplitude der Beschleunigung im Fahrzeug? Führen Sie die Berechnungen sowohl im Inertialsystem als auch im Relativsystem durch!
- Werte:

$$m = 500 \text{ kg}$$

$$c = 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

$$b = 3000 \text{ Ns/m}$$

$$v = 52 \text{ m/s}$$

$$\hat{y} = 0.01 \text{ m}$$

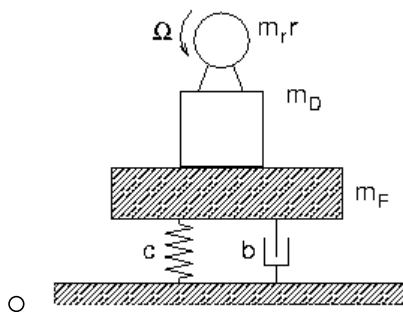
$$\lambda = 2.5 \text{ m}$$

- Lösung



Aufgabe 22

- Ein Dieselgenerator der Masse $m_D = 300 \text{ kg}$ steht auf einem schwingend aufgehängten Fundament. Bei einer Drehzahl $n = 2400 \text{ U/min}$ wird aufgrund einer Unwucht im Generator eine harmonische Kraft mit einer Amplitude von $\hat{F}_E = 1.6 \cdot 10^5 \text{ N}$ auf das Fundament übertragen.



- Die Eigenschwingungen des Systems sollen mit $D = 0.08$ gedämpft werden. Wie groß muss die Masse des Fundaments sein, damit seine Schwingungen eine Amplitude von $\hat{x} = 1 \text{ mm}$ haben und nur 4% der Erregerkraft auf den Boden übertragen werden?
- Lösung



Aufgabe 23

- Ein gedämpfter Schwinger der Masse $m = 500 \text{ kg}$, Federkonstanten $c = 5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ und der Dämpfung $D = 0.1$ wird periodisch ($T = 2 \text{ s}$) durch symmetrische Rechteckimpulse der Amplitude $\hat{f}_E = 0.1 \text{ m}$ angeregt. Die Erregerfunktion hat die Fourierdarstellung (s. Aufgabe 4)

○
$$f_E(t) = 0.1m \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t/s) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t/s) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t/s) + \dots \right)$$

- Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten $\hat{x}_1 \dots \hat{x}_9$ der sich ergebenden Schwingung.
- Lösung



Aufgabe 24

- Ein LKW, modelliert als gedämpfter Schwinger mit Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfungsmaß D , wird durch plötzliches Aufbringen einer Ladung in Schwingungen versetzt. Nach deren Abklingen liegt der Aufbau um $x_S = 0.10$ m tiefer als vorher. Berechnen Sie die Schwingungsform des Aufbaus.
- Werte:
 - $\omega_0 = 1/\text{s}$
 - $D = 1/\sqrt{2}$
- Hinweise:
 - Beschreiben Sie die Erregerfunktion f_E durch eine Sprungfunktion
 - $f_E(t) = \hat{f}_E \sigma(t)$
 - Wie groß ist \hat{f}_E ?
 - Verwenden Sie
 - $\int e^{-x} \sin x \, dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x + \cos x)$
- Lösung



Anhang

- Literatur
- Exkurs: Komplexe Zahlen
- Exkurs: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten
- Herleitung: Stoßantwort des erregten Schwingers
- Applets
- Matlab-Beispiele



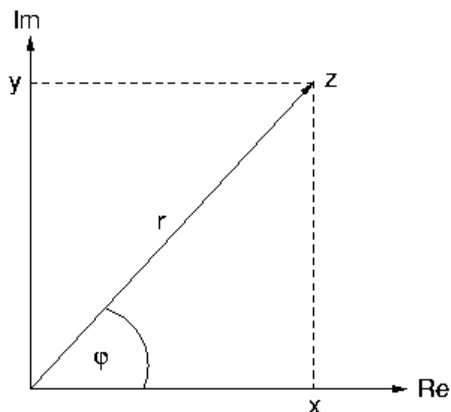
Literatur

1. H. Irretier: Grundlagen der Schwingungstechnik 1
Vieweg 2000, ISBN 3-528-03906-X
2. H. Irretier, Grundlagen der Schwingungstechnik 2
Vieweg 2001, ISBN 3-528-03907-8
3. J. Wittenburg: Schwingungslehre
Springer 1996, ISBN 3-540-61004-9
4. P. Hagedorn, S. Otterbein: Technische Schwingungslehre I
Springer 1987, ISBN 3-540-18096-6
5. P. Hagedorn: Technische Schwingungslehre II
Springer 1989, ISBN 3-540-50869-4
6. F. Holzweißig, H. Dresig: Lehrbuch der Maschinendynamik
Fachbuchverlag Leipzig 1994, 3-343-00866-4
7. K. Magnus, K. Popp: Schwingungen
Teubner-Verlag, 5. Aufl 1997, ISBN 3-519-32302-8
8. Thomson, Dahleh: Theory of Vibration with Applications
Prentice Hall, 5. Aufl 1998, ISBN 0-13-651068-X8
9. S.G. Kelly: Schaum's Outline of Mechanical Vibrations
McGraw-Hill 1996, ISBN 0-07-034041-2



Exkurs: Komplexe Zahlen

- Komplexe Zahl:
 - gegeben durch Realteil x und Imaginärteil y
 - $z = x + j y$
 - veranschaulicht in der Ebene



- Polardarstellung mit Länge r und Winkel ϕ

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- $\tan \varphi = \frac{y}{x}$

- Umkehrung

$$x = r \cos \varphi$$

- $y = r \sin \varphi$

- komplex konjugierte Zahl

- $\bar{z} = x - jy$

- Grundrechenarten:

- Addition/Subtraktion komponentenweise

- $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$

- Multiplikation mit $j^2 = -1$

- $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

- Division durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners

$$\begin{aligned} \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} &= \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

- Eulerformel:

- Beziehung für komplexe Exponentialfunktion

- $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

- erlaubt Polardarstellung als

- $x + jy = re^{j\varphi}$

- Berechnung beliebiger Potenzen damit

- $z^\alpha = \left(re^{j\varphi}\right)^\alpha = r^\alpha e^{j\alpha\varphi}$



Exkurs: Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

- Grundtyp der Gleichung 2. Ordnung:
 - für gesuchte Funktion $x(t)$
 - $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$
 - homogen $\Leftrightarrow f(t) = 0$
 - inhomogen $\Leftrightarrow f(t) \neq 0$
- Lösungen der homogenen Gleichung:
 - in der Regel zu finden durch Exponentialansatz
 - wahlweise reell
 - $x(t) = e^{\lambda t}$
 - oder komplex
 - $x(t) = e^{j\omega t}$
 - Linearkombination von Lösungen ist Lösung
 - komplexe Lösung \Rightarrow Realteil und Imaginärteil sind Lösungen (bei reellen Koeffizienten a, b, c)
 - Lösung hängt von 2 Parametern ab (Anfangsbedingungen!)
- Lösungen der inhomogenen Gleichung:
 - finde eine einzige Lösung $x_{\text{spez}}(t)$ der inhomogenen Gleichung
 - Lösung der homogenen Gleichung sei $x_{\text{hom}}(t)$
 - allgemeine Lösung dann
 - $x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{spez}}(t)$
 - wenn Summe als Inhomogenität
 - $f = f_1 + f_2$
 - x_i Lösung zu f_i ($i = 1, 2$)
 - $\Rightarrow x = x_1 + x_2$ ist Lösung zu f



Stoßantwort des erregten Schwingers

- Bewegungsgleichung
 - $\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \hat{f}_E \delta(t)$
- Schwinger direkt vor dem Stoß (Zeitpunkt 0^-) in Ruhe
 - $x(0^-) = 0$
 - $\dot{x}(0^-) = 0$
- Berechnung der Lösung:
 - Integration der Bewegungsgleichung von $-t_0$ bis $t_0 \rightarrow$
 - $\dot{x}(t_0) - \dot{x}(-t_0) + 2D\omega_0(x(t_0) - x(-t_0)) + \omega_0^2 \int_{-t_0}^{t_0} x(t) dt = \omega_0^2 \hat{f}_E$
 - Grenzübergang $t_0 \rightarrow 0$, Stetigkeit von $x(t) \rightarrow$
 - $\dot{x}(0^+) - \dot{x}(0^-) = \omega_0^2 \hat{f}_E$
 - Geschwindigkeit springt von 0 auf
 - $v_0 := \dot{x}(0^+) = \omega_0^2 \hat{f}_E$
 - Lösung für $t > 0$ durch Anpassen der Anfangsbedingungen an freie Schwingung
 - für $D < 1$
 - $$x(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\delta t} \sin \omega t$$
$$= \frac{\omega_0 \hat{f}_E}{\sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - D^2} \omega_0 t)$$
 - mit Sprungfunktion $\sigma(t)$ definiert man die Stoßantwort
 - $$g(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - D^2}} e^{-D\omega_0 t} \sin(\sqrt{1 - D^2} \omega_0 t) \sigma(t)$$
 - dann gilt für alle t
 - $x_{\text{Stoß}}(t) = \hat{f}_E g(t)$
 - analoge Sprungfunktionen für $D \geq 1$



Applets

- Fouriersynthese mit Sinusfunktionen
- Fouriersynthese mit Kosinusfunktionen
- Fourieranalyse
- Federpendel
- Federpendel mit viskoser Dämpfung
- Federpendel mit viskoser Dämpfung im Phasenraum
- Federpendel mit Coulomb-Reibung
- Federpendel mit Coulomb-Reibung im Phasenraum
- Erzwungene Schwingung
- Mathematisches Pendel
- Mathematisches Pendel im Phasenraum



Matlab-Beispiele

- ex2.m
- ex3a.m
- ex3b.m
- ex5.m
- ex7.m
- ex12.m
- ex13.m
- schubkurbel.m



ex2.m

```
% Ellipse in Parameterdarstellung
a = 1.95;
b = 0.95;
t = [0:2*pi/100:2*pi]; % Zeitwerte
x = a*cos(t);
v = b*sin(t);
plot(x, v, 'k');

% Beschriftungen der Achsen
axis equal
h = ylabel('v');
h = xlabel('x');
```



ex3a.m

```
% Schubkurbelschwingung, Ortskurve
l_2 = 1.0; % beliebiger Wert fuer l_2
w = 1.0;   % beliebiger Wert fuer omega

tmax = 4*pi;
t = [0:tmax/400:tmax];

la = 0.2;
x1 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
la = 0.3;
x2 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
la = 0.4;
x3 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));

plot(t, x1, t, x2, t, x3);
axis([0 tmax 0.5 1.5]);
ylabel('x(t)');
xlabel('t');
legend('\lambda=0.2', '\lambda=0.3', '\lambda=0.4', 0)
```



ex3b.m

```
% Schubkurbelschwingung, Phasenraum
l_2 = 1.0; % beliebiger Wert fuer l_2
w = 1.0;   % beliebiger Wert fuer omega

tmax = 2*pi;
t = [0:tmax/400:tmax];

la = 0.2;
x1 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
v1 = -l_2*w*la*sin(w*t) .* (1 + (la*cos(w*t))./sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
la = 0.3;
x2 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
v2 = -l_2*w*la*sin(w*t) .* (1 + (la*cos(w*t))./sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
la = 0.4;
x3 = l_2*(la*cos(w*t) + sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));
v3 = -l_2*w*la*sin(w*t) .* (1 + (la*cos(w*t))./sqrt(1 - la^2*sin(w*t).^2));

plot(x1, v1, x2, v2, x3, v3)
%axis([0 tmax 0.5 1.5]);
ylabel('v');
xlabel('x');
legend('\lambda=0.2', '\lambda=0.3', '\lambda=0.4', 0)
```




ex5.m

```
% Loesung von Aufgabe 5

% keine grauen, sondern weisse Rahmen um Plots (generell)
set(0,'defaultfigurecolor','white');

% Berechnung der Integrale fuer die Koeffizienten
T = 1; % Schwingungsdauer
om = 2*pi/T;
l2 = 1;
N = 10; % Zahl der Harmonischen
a1 = zeros(N+1, 1); % Spaltenvektor mit den Koeffizienten
% Achtung: Zaehlung beginnt bei 0, in Matlab bei 1!
a2 = zeros(N+1, 1);

l1 = 0.4;
for I = 0:N
    f1 = @(t) schubkurbel(t, om, l1, l2).*cos(I*om*t);
    a1(I+1) = 2/T*quad(f1, 0, T);
end

l1 = 0.99;
for I = 0:N
    f2 = @(t) schubkurbel(t, om, l1, l2).*cos(I*om*t);
    a2(I+1) = 2/T*quad(f2, 0, T);
end

% Ausgabe und Plot der Koeffizienten
a1
a2

n = (0:N)';
x = [n-0.1, n+0.1];
y = [a1, a2];

h = stem(x,y);
set(h(1),'MarkerFaceColor','blue')
set(h(2),'MarkerFaceColor','red','Marker','square')
xlabel('n','FontSize', 14);
ylabel('a_n','FontSize', 14);
title('Fourierkoeffizienten der Schubkurbelbewegung','FontSize', 16);
legend('\lambda = 0.4', '\lambda = 0.99');
axis([-0.3 10.5 -0.2 2]);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild56.png');

% Ortskurven explizit bzw. als Summation der Harmonischen
t = 0:0.01:2;
l1 = 0.4;
x1 = schubkurbel(t, om, l1, l2);
a1(1) = a1(1)/2;
```

```

xlfourier = a1*cos(om*n*t);

plot(t, x1, t, xlfourier);
title('Schubkurbelbewegung, \lambda = 0.4', 'FontSize', 16);
xlabel('t', 'FontSize', 14);
ylabel('x(t)', 'FontSize', 14);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild67.png');

l1 = 0.99;
x2 = schubkurbel(t, om, l1, l2);
a2(1) = a2(1)/2;
x2fourier = a2*cos(om*[0:N]*t);

plot(t, x2, t, x2fourier);
title('Schubkurbelbewegung, \lambda = 0.99', 'FontSize', 16);
xlabel('t', 'FontSize', 14);
ylabel('x(t)', 'FontSize', 14);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild68.png');

% vergroesselter Ausschnitt
axis([1.2 1.8 0 0.16]);
F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild69.png');

```



ex7.m

```
% Loesung von Aufgabe 7
m = 350;
c = 1.5e6;
l = 50e-3;
g = 9.81

func = @(y) y.*(1 - 1./sqrt(1 + y.^2));
y = 0:0.01:5;
f = func(y);
plot(y,f)
xlabel('y')
ylabel('f(y)')
F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild70.png');

p = m*g/(2*c*l)
y0 = fzero(@(y) func(y)-p, 0)
x0 = l*y0
```



ex12.m

```
function ex12()
% Loesung von Aufgabe 12

l = 1.8; % laenge in m
a = 1.5; % Federangriffspunkt in m
m = 10; % in kg
c = 100; % in N/m
c2 = 50;
g = 9.81; % in

% Kreisfrequenz
omega = sqrt(a^2*c/(l^2*m) - g/l)
T = 2*pi/omega

% anderes c
omega2 = a^2*c2/(l^2*m) - g/l

% Teil c
% starke Feder

% Gleichgewichtslage
phig = acos(m*g*l/(a^2*c));
phi0 = [0.1, 0.4, phig-0.01, phig+0.01]; % Anfangswerte

func = @(t,y) dgl12(t, y, g/l, a^2*c/(m*l^2)); % Parameter in dgl12 einsetzen
[t1, y1] = ode45(func, [0 2*T], [phi0(1) 0]);
[t2, y2] = ode45(func, [0 2*T], [phi0(2) 0]);
[t3, y3] = ode45(func, [0 2*T], [phi0(3) 0]);
[t4, y4] = ode45(func, [0 2*T], [phi0(4) 0]);

plot(t1, y1(:,1), t2, y2(:,1), t3, y3(:,1), t4, y4(:,1));
hold on;
plot([0 2*T], [0 0], 'k-'); % t-Achse
plot([0 2*T], [phig phig], 'k:'); % Gleichgewichtslage
plot([T T], [-phig 2*phig], 'k:'); % Schwingungsdauer, linearisiert
hold off;

% Beschriftungen
title('Schwingungen bei verschiedenen Auslenkungen', 'FontSize', 16);
ylabel('phi', 'FontSize', 14);
xlabel('t [s]', 'FontSize', 14);
axis([0, 2*T, -phig, 2*phig]);
legend('0.1', '0.4', 'phig-0.01', 'phig+0.01', 'Location', 'Best')

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild71.png');

% Teil c
% schwache Feder

func = @(t,y) dgl12(t, y, g/l, a^2*c2/(m*l^2)); % Parameter in dgl12 einsetzen
[t5, y5] = ode45(func, [0 20], [0.1 0]);
```

```

plot(t5, y5(:,1), 'b-', [0 20], [0 0], 'k-');

% Beschriftungen
title('Bewegung bei schwacher Feder', 'FontSize', 16);
ylabel('phi', 'FontSize', 14);
xlabel('t [s]', 'FontSize', 14);

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild72.png');

%-----
function dydt = dgl12(t, y, a, b)
% rechte Seite der DGL bei Aufgabe 12
% a = g/l, b = a^2*c/(m*l^2)

dy1 = y(2);
dy2 = a*sin(y(1)) - b*sin(y(1)).*cos(y(1));
dydt = [dy1 dy2]';

```



ex13.m

```
function ex13()
% Loesung von Aufgabe 13

L = 2; % m
alpha = 25*pi/180; % rad
g = 9.81; % m/s^2

% q0 und T bei kleiner Auslenkung
q0 = L*tan(alpha)
omega0 = sqrt(g/L)*sqrt(cos(alpha)^3 / (1 + sin(alpha)^2))
T = 2*pi/omega0

dx = q0 - [0.1 0.5 0.93]; % Anfangswerte

func = @(t,y) dgl13(t, y, L, alpha); % Parameter in dgl13 einsetzen
[t1, y1] = ode45(func, [0 6], [dx(1) 0]);
[t2, y2] = ode45(func, [0 6], [dx(2) 0]);
[t3, y3] = ode45(func, [0 6], [dx(3) 0]);

plot(t1, y1(:,1), t2, y2(:,1), t3, y3(:,1));
hold on;
plot([0 6], [q0 q0], 'k-'); % Gleichgewichtslage
plot([T T], [0 2.1], 'k:'); % Schwingungsdauer, linearisiert
hold off;

% Beschriftungen
title('Schwingungen bei verschiedenen Auslenkungen', 'FontSize', 16);
ylabel('q [m]', 'FontSize', 14);
xlabel('t [s]', 'FontSize', 14);
axis([0 6 0 2.1]);
legend('0.1 m', '0.5 m', '0.93 m', 0)

F = getframe(gcf);
imwrite(F.cdata, 'bild66.png');

%-----
function dydt = dgl13(t, y, L, alpha)
% rechte Seite der DGL bei Aufgabe 13

dy1 = y(2);
g = 9.81; % einfach konstant
fak = 1./sqrt(L^2 + y(1).^2);
dy2 = (g*sin(alpha) - L^2*y(1).*fak.^4.*y(2).^2 - g*fak.*y(1)) ...
    ./ (1 + y(1).^2.*fak.^2);

dydt = [dy1 dy2]';
```



schubkurbel.m

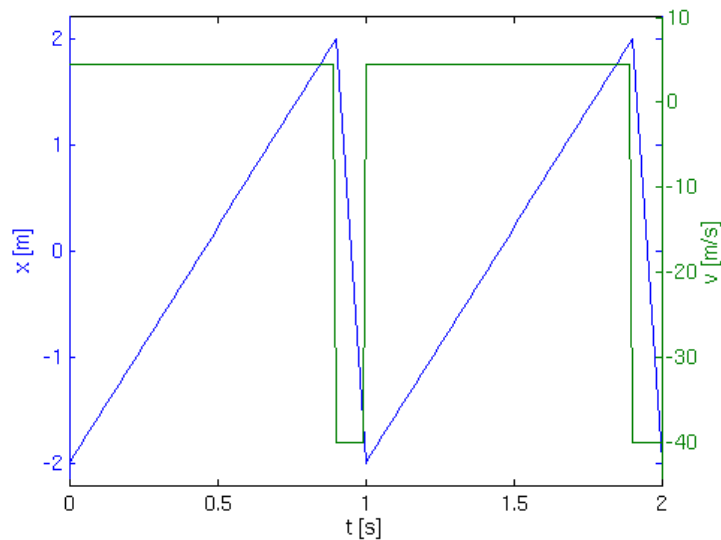
```
function x = schubkurbel(t, om, l1, l2)
% Ortskurve x(t) der Schubkurbelschwingung
%   om   Kreisfrequenz
%   l1   Laenge der kuerzeren Schubstange
%   l2   Laenge der laengeren Schubstange

la = l1/l2;      % Schubstangenverhaeltnis
x = l2*(la*cos(om*t) + sqrt(1 - la^2*sin(om*t).^2));
```

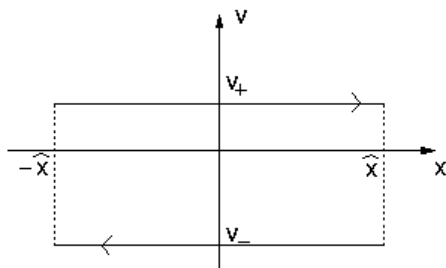


Lösung von Aufgabe 1

- Die Ableitung der Sägezahn-Schwingung besteht aus zwei konstanten Abschnitten:
 - dem langsamen Anstieg mit der Geschwindigkeit $v_+ = 4.44 \text{ m/s}$
 - dem schnellen Abfall mit der Geschwindigkeit $v_- = -40 \text{ m/s}$



- Das Phasenraum-Diagramm beginnt bei der Geschwindigkeit v_+ und einer Auslenkung $-\hat{x}$. Die Kurve bewegt sich bei konstanter Geschwindigkeit bis zu \hat{x} . Dann folgt ein Sprung zur Geschwindigkeit v_- bei gleichem x und eine Rückbewegung mit konstantem v_- . Im Bild





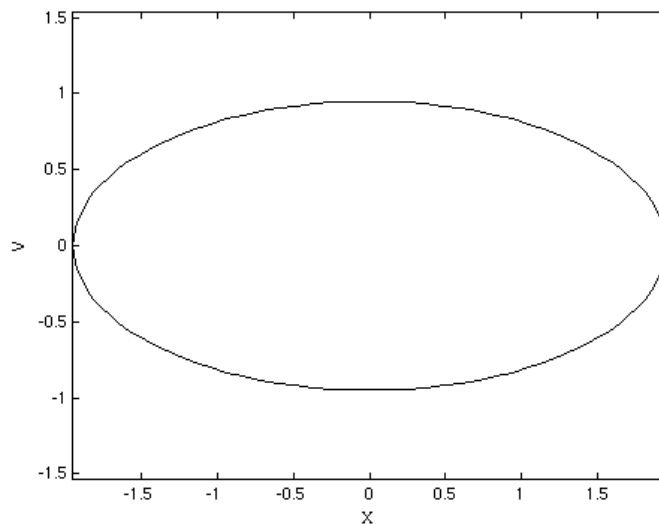
Lösung von Aufgabe 2

1. Berechnung des Phasenraumbilds:

- Die Geschwindigkeit erhält man als
 - $\dot{x} = -\omega \hat{x} \sin(\omega t)$
- Damit ist der Phasenraum-Punkt als zweidimensionalen Vektor
 - $\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x} \cos \omega t \\ -\omega \hat{x} \sin \omega t \end{pmatrix}$
- Dies ist die Parameterdarstellung einer Ellipse mit den Halbachsen
 - $a = \hat{x}$, $b = \omega \hat{x}$.
- Mit Hilfe der Beziehung
 - $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$
- rechnet man dies in die Koordinatendarstellung der Ellipse um:
 - $\left(\frac{x}{\hat{x}}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega \hat{x}}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$

2. Graphische Darstellung mit Matlab

- Das Matlab-Skript ex2.m erstellt das Phasendiagramm





Lösung von Aufgabe 3

1. Berechnung der Ortskurve:

- Der Cosinussatz für das Dreieck OPQ liefert

- $l_2^2 = l_1^2 + x^2 - 2l_1x \cos \varphi$

- Nach x auflösen →

$$x = l_1 \cos \varphi \pm \sqrt{l_1^2 \cos^2 \varphi - l_1^2 + l_2^2}$$

- $= l_1 \cos \varphi \pm \sqrt{l_2^2 - l_1^2 \sin^2 \varphi}$

- Negatives Vorzeichen entfällt wegen $l_2 > l_1$, $x > 0$. Einführen von λ ergibt

- $x = l_2(\lambda \cos \varphi + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi})$

- Gleichmäßige Umdrehung heisst

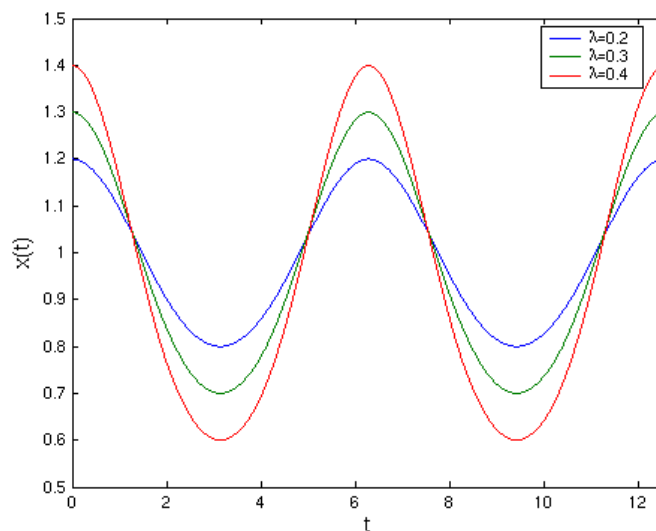
- $\phi = \omega t$

- also

- $x(t) = l_2 \left(\lambda \cos(\omega t) + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \right)$

2. Graphische Darstellung mit Matlab

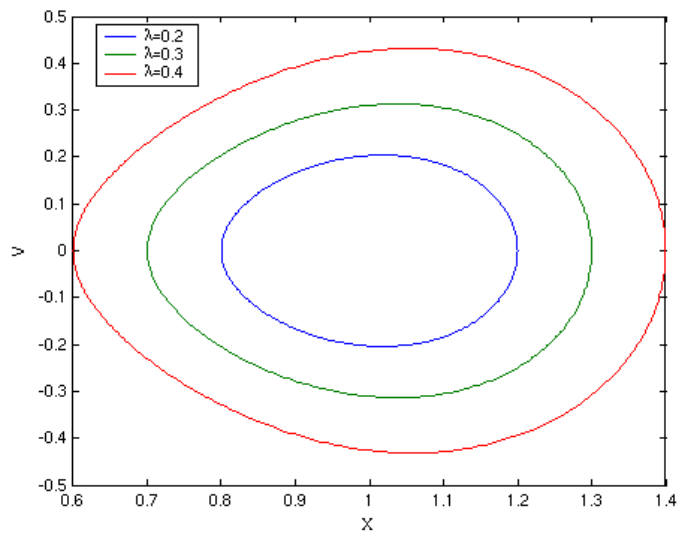
- Das Matlab-Skript ex3a.m zeigt die Ortskurven bei verschiedenen Werten von λ :



- Durch Ableiten und leichtes Zusammenfassen erhält man die Geschwindigkeit

- $v(t) = \dot{x}(t) = -\lambda l_2 \omega \sin(\omega t) \left(1 + \frac{\lambda \cos(\omega t)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)}} \right)$

- Das Matlab-Skript ex3b.m erstellt damit das Phasendiagramm:





Lösung von Aufgabe 4

- Aus der Zeichnung liest man ab

$$\circ \quad x(t) = \begin{cases} 1 & | t = 0 \dots 1 \\ -1 & | t = 1 \dots 2 \end{cases}$$

- Durch Aufspalten des Integrals erhält man also

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_0^2 x(t) e^{-jn\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 e^{-jn\omega t} dt - \int_1^2 e^{-jn\omega t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{-jn\omega} \left(e^{-jn\omega t} \Big|_0^1 - e^{-jn\omega t} \Big|_1^2 \right) \\ &= j \frac{1}{2n\omega} \left(e^{-jn\omega} - 1 - e^{-2jn\omega} + e^{-jn\omega} \right) \end{aligned}$$

○

- Aus $\omega = 2\pi/T = \pi$ folgt

$$\circ \quad c_n = j \frac{1}{2\pi n} \left(2e^{-jn\pi} - 1 - e^{-jn2\pi} \right)$$

- Mit den Beziehungen

$$\circ \quad e^{-jn\pi} = (-1)^n, \quad e^{-jn2\pi} = 1$$

- lässt sich c_n weiter vereinfachen zu

$$\begin{aligned} c_n &= j \frac{1}{2\pi n} \cdot 2 \left((-1)^n - 1 \right) \\ &= \begin{cases} -j \frac{2}{\pi n} & | n \text{ ungerade} \\ 0 & | n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

○

- Die Kosinusreihe verschwindet wegen

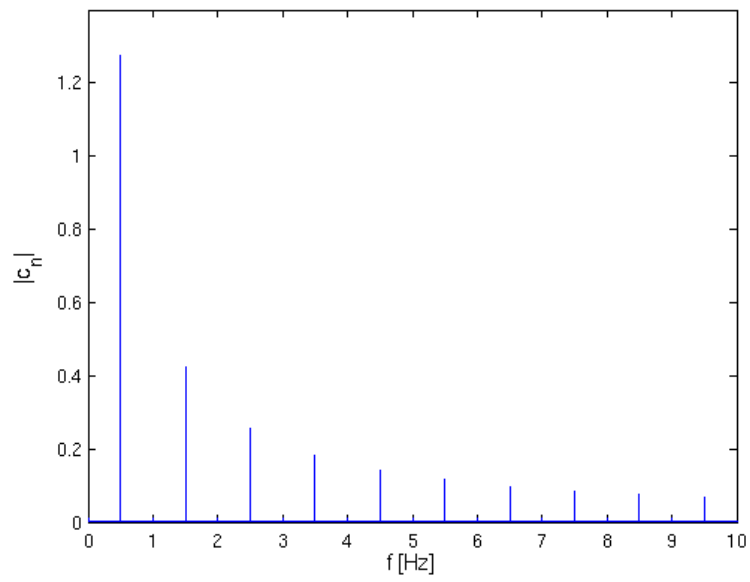
$$\circ \quad a_n = c_n + c_{-n} = 0$$

- Die Koeffizienten der Sinusreihe sind

$$\begin{aligned} b_n &= j(c_n - c_{-n}) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & | n \text{ ungerade} \\ 0 & | n \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

○

- Das Spektrum hat daher folgende Form:





Lösung von Aufgabe 5

Das Matlab-Skript ex5.m berechnet alle benötigten Größen und erstellt die geforderten Plots.
Bemerkungen dazu:

1. Bestimmung der Fourierkoeffizienten

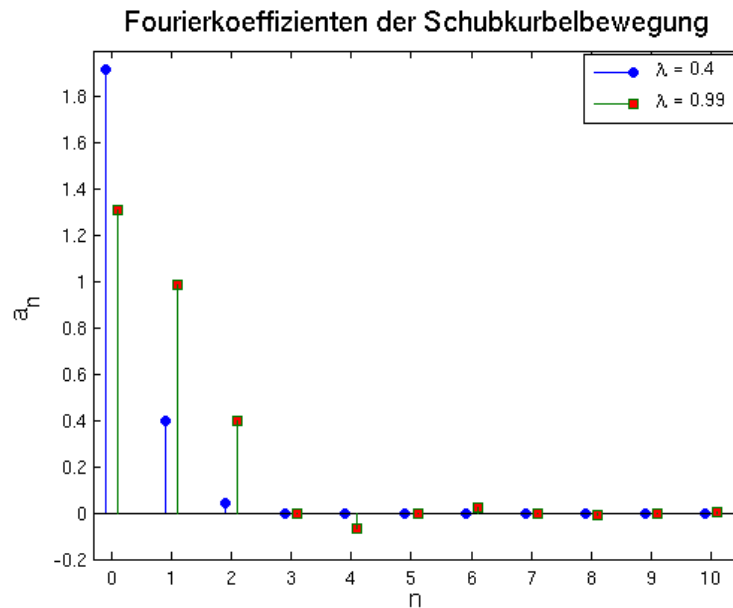
- Die Ortskurve $x(t)$ der Schubkurbelbewegung ist gerade (symmetrisch zur x-Achse), denn für
 - $x(t) = l_2 \left(\lambda \cos(\omega t) + \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2(\omega t)} \right)$
- gilt offensichtlich
 - $x(-t) = x(t)$
- Daher sind die Koeffizienten b_n der Sinusreihe alle 0.
- Die Parameter l_2 und ω spielen für die Form des Spektrums keine entscheidende Rolle:
 - l_2 skaliert (bei festem Schubstangenverhältnis λ) lediglich $x(t)$, ist also für alle Fourierkoeffizienten ein gemeinsamer Faktor;
 - ω tritt nur als Faktor von t auf, gibt also die Grundfrequenz vor, ohne die Koeffizienten zu beeinflussen.
- Im weiteren werden sie fest gewählt zu
 - $l_2 = 1$
 - $\omega = 2\pi$ (also $T = 1$)
- Zur Berechnung der Kosinusreihe werden die Integrale
 - $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega t) dt \quad n = 0, 1, 2, ..$
- mit Hilfe der Matlab-Funktion `quadl` berechnet. Dazu muss die Ortskurve $x(t)$ selbst als Matlab-Funktion definiert werden, etwa wie in `schubkurbel.m`.
- `quadl` erlaubt keine Vektoren als Funktionsparameter → Berechnung der a_n als for-Schleife über n
- Ergebnis für $\lambda = 0.4$
 -

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a _n	1.9174	0.4000	0.0417	0.0000	-0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

- Bei normalen Werten für λ reicht es in der Regel aus, die 1. Oberschwingung ($n = 2$) zu berücksichtigen. Wichtiger Anwendungsfall: Motorvibrationen im Kraftfahrzeug.
- Ergebnis für $\lambda = 0.99$
 -

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1.3095	0.9900	0.3964	0.0000	-0.0681	0.0000	0.0243	0.0000	-0.0111	0.0000	0.0057

- $\lambda \approx 1 \rightarrow$ höhere Oberwellen treten auf.
- Darstellung der Koeffizienten mit der speziellen Plotfunktion stem und einigen Tricks



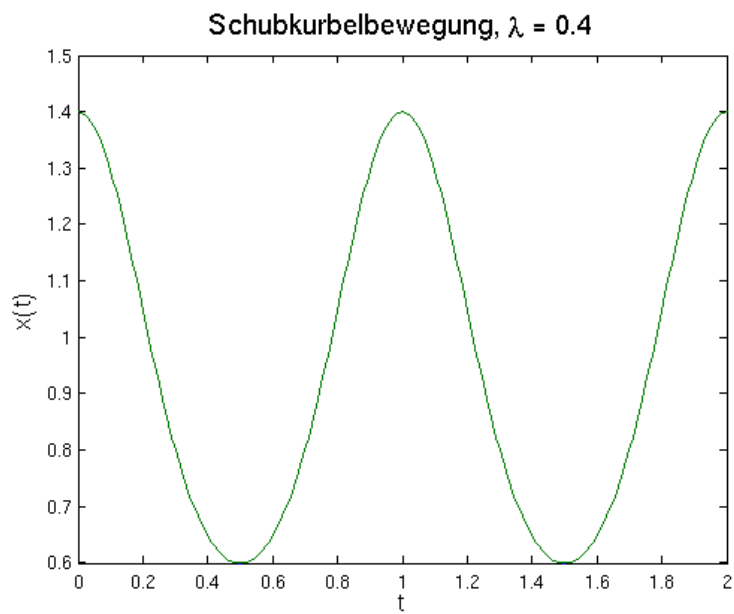
- - hold on zur Darstellung mehrerer Kurven in einem Plot
 - Verschiebung in x-Richtung um $\pm 0.1 \rightarrow$ Plots erscheinen nebeneinander
 - Legende handgestrickt mit text und explizitem Plot eines Rahmen
- Ortskurve mit Applet
 - Eingabe der Koeffizienten liefert erwartete Ortskurven
 - Achtung:
 - Offset = $a_0/2$
 - Plotten der Ortskurven mit Matlab
 - Summation der Harmonischen nicht über Schleife, sondern mit Matrix-Operationen
 -

t Vektor mit Zeitwerten

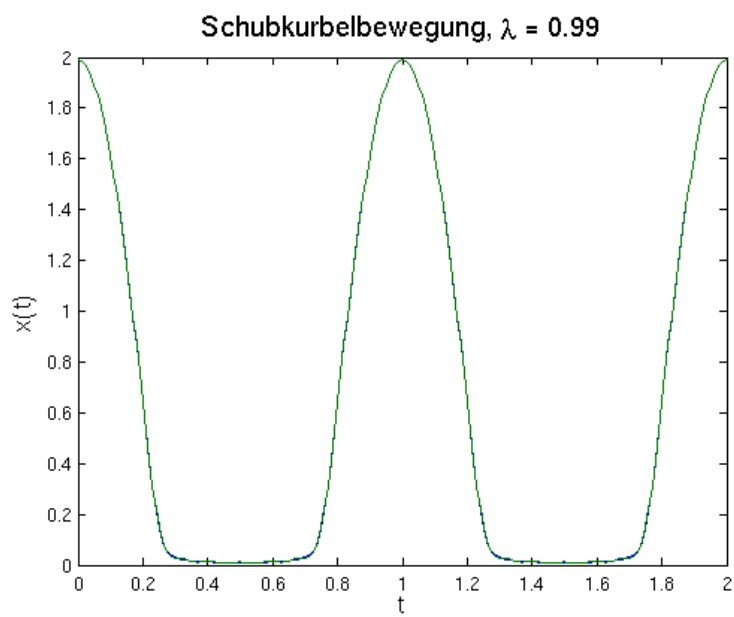
om*[0:N]’*t Matrix, jede Zeile eine Zeitreihe, jeweils anderes n pro Zeile

a’*cos(om*[0:N]’*t) Matrixmultiplikation \rightarrow Jede Zeile wird mit dem entsprechenden Wert a_n multipliziert und alles aufaddiert

- Plot liefert Übereinstimmung von originaler Ortskurve und Fourierreihe

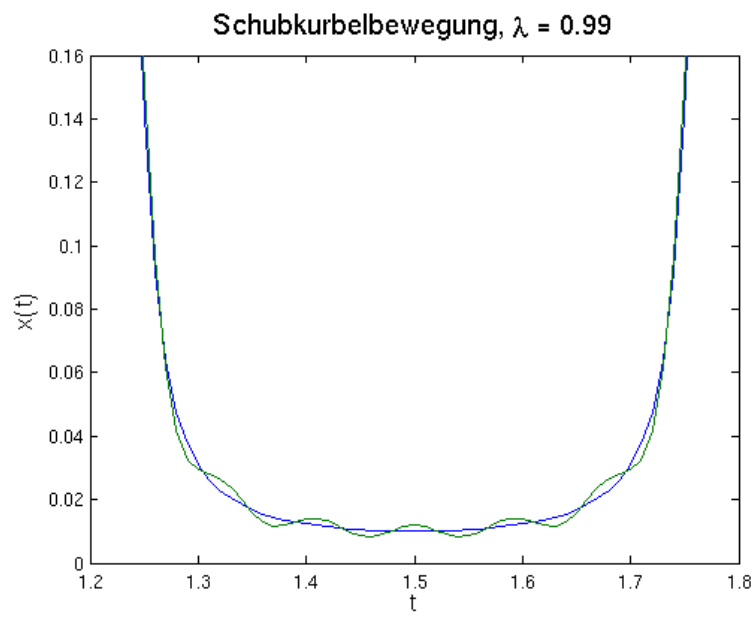


○



○

- erst Vergrößerung zeigt leichte Abweichung bei $\lambda = 0.99$



○



Lösung von Aufgabe 6

1. Bewegungsgleichung:

- Die Koordinate x sei 0 bei entspannter Feder und positiv bei Auslenkung nach oben. Dann erhält man folgende Kräfte:
 - Federkraft $F_F = -cx$
 - Gewichtskraft $F_G = -mg$
- Die Kräftebilanz liefert also die Bewegungsgleichung
 - $-cx - mg = m \ddot{x}$
- bzw.
 - $\ddot{x} + (c/m) x = -g$

2. Gleichgewichtslage:

- Im Gleichgewicht gilt
 - $-c x_g = m g$
- also
 - $x_g = -mg/c$

3. Umschreiben auf Koordinate q :

- Die Koordinate x kann leicht durch q ausgedrückt werden
 - $x = q + x_g, \quad \dot{x} = \dot{q}, \quad \ddot{x} = \ddot{q}$
- Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert
 - $\ddot{q} + \frac{c}{m}(q + x_g) = -g$
- Mit dem Wert von x_g folgt
 - $\ddot{q} + \frac{c}{m}q = 0$
- Wählt man also als Koordinate die Abweichung vom Gleichgewicht, so tauchen die statischen Kräfte in der Bewegungsgleichung nicht mehr auf.



Lösung von Aufgabe 7

- Bei symmetrischer Lage der Masse heben sich die waagerechten Anteile der Federkräfte auf.
- Auslenkung Δl einer Feder

- $\Delta l = \sqrt{x^2 + l^2} - l$

- entsprechende Federkraft in vertikaler Richtung

- $$\begin{aligned} F_F &= -c\Delta l \sin \alpha \\ &= -c\Delta l \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} \end{aligned}$$

- außerdem Gewichtskraft F_G und Trägheitskraft F_T mit

- $F_G = m g$

- $F_T = -m a$

- Gesamtkraft

- $$\begin{aligned} \sum F &= F_G + 2F_F + F_T \\ &= mg - 2c\Delta l \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}} - m\ddot{x} \\ &= mg - 2cx \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right) - m\ddot{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Durch leichtes Vereinfachen erhält man also die Bewegungsgleichung

- $$\ddot{x} + 2\frac{c}{m}x \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \right) = g$$

- Berechnung der Gleichgewichtslage x_0 :

- $x(t) = x_0 \Rightarrow \dot{x} = \ddot{x} = 0$

- in Bewegungsgleichung einsetzen ergibt

- $$2\frac{c}{m}x_0 \left(1 - \frac{l}{\sqrt{x_0^2 + l^2}} \right) = g$$

- Mit Hilfe der dimensionslosen Größe

- $y_0 := \frac{x_0}{l}$

- erhält man die vereinfachte Form

- $$y_0 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y_0^2 + 1}} \right) = \frac{mg}{2cl} =: p$$

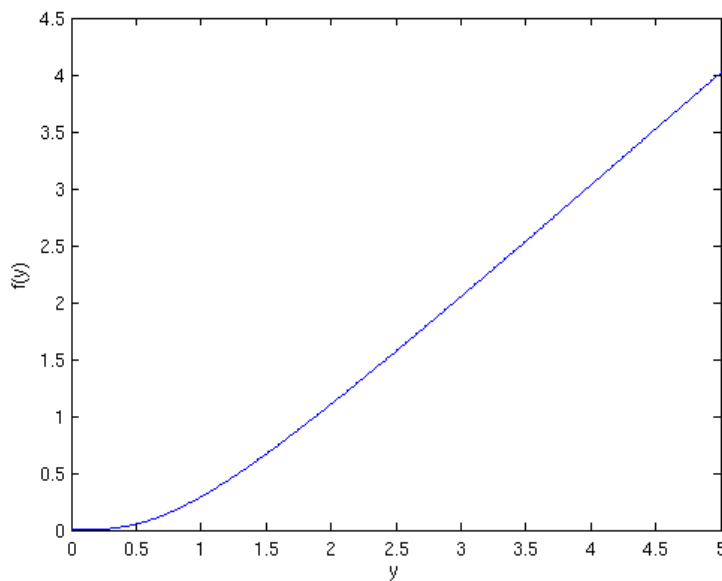
- die nur noch den einen Parameter $p > 0$ enthält.
- Der Versuch einer algebraischen Lösung führt auf ein Polynom 4. Grades (rechnen!), daher bietet

sich stattdessen eine numerische Lösung mit Matlab an.

- Um einen Überblick über die möglichen Lösungen zu bekommen, wird zunächst die Funktion

- $$f(y) = y \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \right)$$

- geplottet



-
- Man erkennt, dass es für beliebiges $p > 0$ immer genau eine Lösung gibt.
- Für die gegebenen Parameterwerte ist
 - $p = 2.289 \cdot 10^{-2}$,
- daher liefert fzero mit dem Startwert 0 sofort die Lösung
 - $y_0 = 0.3694$,
- also die Gleichgewichtslage
 - $x_0 = l y_0 = 18.47 \text{ mm}$
- Matlab-Komplettlösung in ex7.m



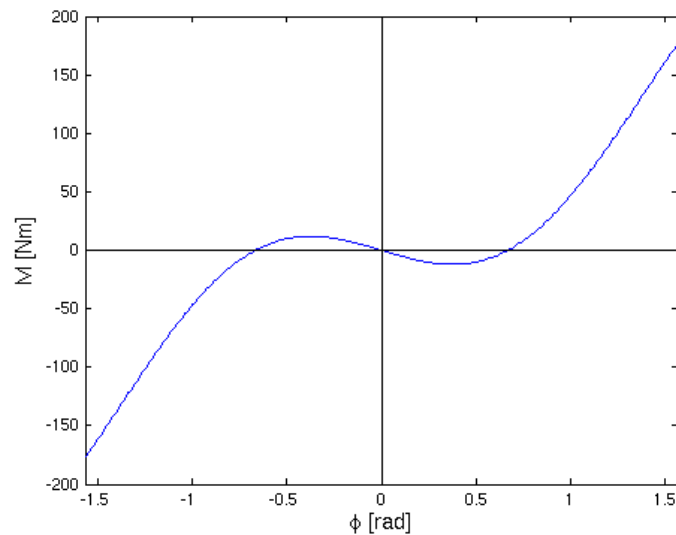
Lösung von Aufgabe 8

- Bestimmung der Bewegungsgleichung:
 - Wahl: Winkel und Momente positiv im Gegenuhrzeigersinn
 - Senkrecht nach unten wirkt auf die Masse die Gewichtskraft
 - $F_g = -mg$
 - entsprechendes Moment, bezogen auf das Lager am Boden
 - $M_g = lmg \sin \varphi$
 - Kraft durch die Feder (bei angenommener waagerechter Lage der Feder)
 - $F_c = ca \sin \varphi$
 - zugehöriges Moment
 - $M_c = -ca^2 \sin \varphi \cos \varphi$
 - Momentengleichgewicht
 - $\sum M = M_g + M_c - J\ddot{\varphi} = 0$
 - Mit
 - $J = ml^2$
 - erhält man daraus
 - $\ddot{\varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{a^2 c}{ml^2} \sin \varphi \cos \varphi = 0$
- Gleichgewichtslagen:
 - Im Gleichgewicht bleibt die Masse in Ruhe, alle Ableitungen verschwinden. Daher
 - $\sin \varphi_0 \left(\frac{a^2 c}{ml^2} \cos \varphi_0 - \frac{g}{l} \right) = 0$
 - Lösungen
 - $\varphi_0 = 0$
 - $\varphi_0 = \pi$
 - $\cos \varphi_0 = \frac{mlg}{a^2 c} = 0.7848 \Rightarrow \varphi_0 = \pm 0.6684 \hat{=} \pm 38.30^\circ$
 - Interpretation
 - senkrecht nach oben
 - senkrecht nach unten, widerspricht der Näherung waagerechter Feder
 - Gleichgewicht bei kleiner Schräglage, zwei in symmetrischer Position
- Linearisieren der Bewegungsgleichung um $\phi = 0$:
 - Koordinate ϕ ist bereits die Abweichung von der Gleichgewichtslage
 - Zum Linearisieren betrachten wir die Funktion

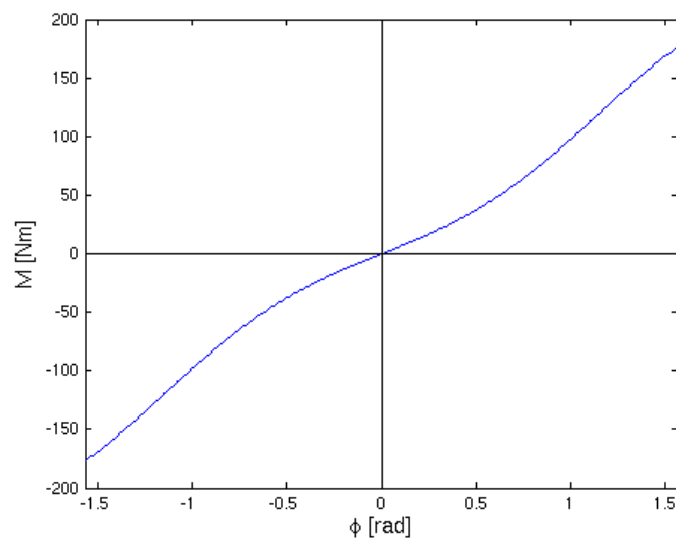
- $f(\varphi) = -\frac{g}{l} \sin \varphi + \frac{a^2 c}{ml^2} \sin \varphi \cos \varphi$
- Ihre Ableitung ist
 - $f'(\varphi) = -\frac{g}{l} \cos \varphi + \frac{a^2 c}{ml^2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$
- Damit erhält man als lineare Näherung von f(x)
 - $$\begin{aligned} f(x) &\approx f(0) + f'(0)x \\ &= \left(\frac{a^2 c}{ml^2} - \frac{g}{l} \right) x \end{aligned}$$
- Einsetzen ergibt die linearisierte Bewegungsgleichung
 - $\ddot{\varphi} + \left(\frac{a^2 c}{ml^2} - \frac{g}{l} \right) \varphi = 0$
 - Einsetzen der Zahlenwerte
 - $\ddot{x} + 1.494 \frac{1}{s^2} x = 0$
- Linearisieren der Bewegungsgleichung um $\phi = 0.6684$:
 - Gleichgewichtskoordinate x
 - $x = \varphi - \varphi_0$
 - Bewegungsgleichung in x
 - $\ddot{x} - \frac{g}{l} \sin(x + \varphi_0) + \frac{a^2 c}{ml^2} \sin(x + \varphi_0) \cos(x + \varphi_0) = 0$
 - Linearisieren der einzelnen Terme
 - Zunächst ist
 - $f_1(x) = \sin(x + \varphi_0)$
 - $f_1'(x) = \cos(x + \varphi_0)$
 - $\Rightarrow f_1(x) \approx f_1(0) + x f_1'(0) = \sin(\varphi_0) + x \cos(\varphi_0)$
 - Analog
 - $f_2(x) = \cos(x + \varphi_0)$
 - $\approx \cos(\varphi_0) - x \sin(\varphi_0)$
 - Weiter vereinfacht man in 1. Ordnung
 - $\sin(x + \varphi_0) \cos(x + \varphi_0) \approx (\sin(\varphi_0) + x \cos(\varphi_0)) (\cos(\varphi_0) - x \sin(\varphi_0))$
 - $\approx \sin(\varphi_0) \cos(\varphi_0) + x (\cos^2(\varphi_0) - \sin^2(\varphi_0))$
 - Einsetzen in die Bewegungsgleichung und Zusammenfassen der konstanten und in x linearen Terme liefert
 - $\ddot{x} + \left[\frac{a^2 c}{ml^2} \cos(\varphi_0) - \frac{g}{l} \right] \sin(\varphi_0) + x \left[-\frac{g}{l} \cos(\varphi_0) + \frac{a^2 c}{ml^2} (\cos^2(\varphi_0) - \sin^2(\varphi_0)) \right] = 0$

- Einsetzen der Zahlenwerte
- $\ddot{x} - 2.6673 \frac{1}{s^2} x = 0$
- Analyse der Gleichung
 - der konstante Term ist weggefallen. Dies muss bei Linearisieren um eine Gleichgewichtslage auch so sein.
 - negatives Vorzeichen vor $x \rightarrow$ Gleichgewichtslage ist instabil
- Ergebnis bei halb so großem c :
 - Bestimmen der Gleichgewichtslagen wie oben liefert
 - $\cos(\varphi_0) = \frac{m l g}{a^2 c} = 1.570 > 1$
 - es existiert also keine weitere Gleichgewichtslage neben $\phi_0 = 0$ (und der unsinnigen bei π)
 - Mit dem neuen c -Wert lautet die um 0 linearisierte Gleichung
 - $\ddot{\varphi} - 1.918 \frac{1}{s^2} \varphi = 0$
 - die senkrechte Stellung ist also instabil, d.h. es existieren überhaupt keine stabilen Stellungen.
- Algebraische Analyse:
 - Bei der obigen Berechnung der Gleichgewichtslagen erhielt man
 - $\phi_0 = 0$ ist immer eine Gleichgewichtslage
 - ϕ_1 mit
 - $\cos \varphi_1 = \frac{m l g}{a^2 c} =: p$
 - liefert für $p < 1$ zwei weitere Gleichgewichtslagen
 - Linearisieren um ϕ_0 ergab als Bedingung für Stabilität
 - $\frac{a^2 c}{m l^2} - \frac{g}{l} > 0$
 - $\Rightarrow p = \frac{m l g}{a^2 c} < 1$
 - Linearisieren um ϕ_1 ergab
 - $-\frac{g}{l} \cos \varphi_1 + \frac{a^2 c}{m l^2} (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) > 0 \quad | \cdot \frac{m l^2}{a^2 c}$
 - $\Rightarrow -p \cos \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1 > 0$
 - mit
 - $\sin^2 \varphi_1 = 1 - \cos^2 \varphi_1$
 - und $p = \cos \phi_1$ also
 - $-p^2 + p^2 - 1 + p^2 > 0$
 - $\Rightarrow p > 1$
 - allerdings war $p < 1$ Voraussetzung für die Existenz von ϕ_1 !
 - zusammengefasst

- $p < 1 \rightarrow$ stabiles Gleichgewicht bei 0, instabiles bei $\pm\phi_1$
- $p > 1 \rightarrow$ instabiles Gleichgewicht bei 0
- Graphische Darstellung des (statischen) Gesamtmoments $M_g + M_c$ als Funktion des Winkels:
 - bei normalem c



-
- rücktreibendes Moment im Gleichgewicht \leftrightarrow negative Steigung
- stabiles Gleichgewicht nur bei $\phi_0 = 0$
- Verhalten bei halber Federkonstanten



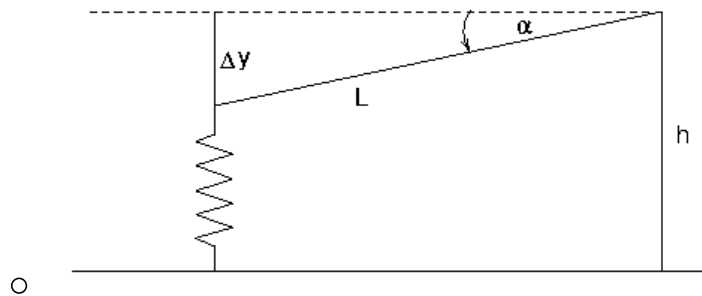
-
- einzige Gleichgewichtslage instabil



Lösung von Aufgabe 9

1. Linearer Fall:

- Geometrie ohne seitliche Verschiebung



- Momentengleichgewicht also

$$J\ddot{\alpha} = mgL \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - c\Delta y L \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\circ \quad = mgL \cos \alpha - cL^2 \sin \alpha \cos \alpha$$

- Mit dem Trägheitsmoment

$$\circ \quad J = mL^2$$

- erhält man also

$$\circ \quad \ddot{\alpha} - \frac{g}{L} \cos \alpha + \frac{c}{m} \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

- Gleichgewichtslage α_0

$$\circ \quad \frac{g}{L} \cos \alpha_0 - \frac{c}{m} \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0$$

- Da die horizontale Verschiebung der Feder nicht berücksichtigt wird, macht die Näherung nur Sinn, solange α_0 deutlich kleiner ist als $\pi/2$. Mann kann also gefahrlos den Kosinus herauskürzen und erhält

$$\circ \quad \sin \alpha_0 = \frac{gm}{Lc}$$

- Gleichgewichtskoordinate einführen

$$\circ \quad x = \alpha - \alpha_0$$

- Die Bewegungsgleichung bekommt dann die Form

$$\circ \quad \ddot{x} + f(x) = 0$$

- wobei

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x + \alpha_0) \left(-\frac{g}{L} + \frac{c}{m} \sin(x + \alpha_0) \right) \\ &= [\cos \alpha_0 \cos x - \sin \alpha_0 \sin x] \left[-\frac{g}{L} + \frac{c}{m} (\cos \alpha_0 \sin x + \sin \alpha_0 \cos x) \right] \end{aligned}$$

- Linearisieren und Einsetzen der Beziehung für α_0 liefert

$$f(x) \approx [\cos \alpha_0 - x \sin \alpha_0] \underbrace{\left[-\frac{g}{L} + \frac{c}{m} \sin \alpha_0 + x \frac{c}{m} \cos \alpha_0 \right]}_{=0}$$

$$= \frac{c}{m} \cos^2 \alpha_0 \cdot x$$

$$= \frac{c}{m} \left(1 - \left(\frac{gm}{Lc} \right)^2 \right) x$$

○

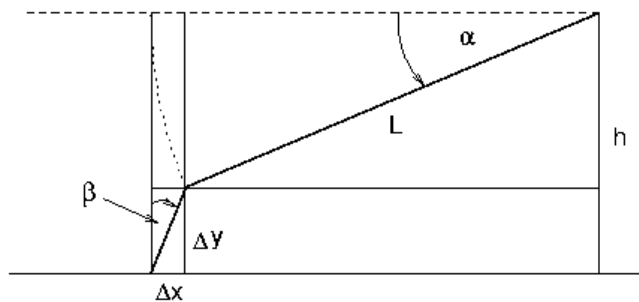
- Die linearisierte Bewegungsgleichung lautet also

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \left(1 - \left(\frac{gm}{Lc} \right)^2 \right) x = 0$$

○

2. Erweiterung der Bewegungsgleichung:

- Aus der Zeichnung



○

- liest man sofort ab

$$\Delta x = L(1 - \cos \alpha)$$

○

$$\Delta y = h - L \sin \alpha$$

Daraus erhält man Länge $l(\alpha)$ und Neigungswinkel $\beta(\alpha)$ der Feder

$$l(\alpha) = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{h^2 + 2L^2 - 2hL \sin \alpha - 2L^2 \cos \alpha}$$

○

$$\tan \beta(\alpha) = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{L(1 - \cos \alpha)}{h - L \sin \alpha}$$

Mit der Federkraft

○

$$F_f = c(h - l(\alpha))$$

ergibt sich sofort die Momentenbilanz

○

$$J\ddot{\alpha} = mgL \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) - c(h - l(\alpha))L \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta \right)$$

Mit dem Trägheitsmoment

○

$$J = mL^2$$

und den Abkürzungen

$$\lambda := \frac{h}{L}$$

$$\kappa := \frac{gm}{Lc}$$

$$\circ \quad \omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m}}$$

kann man die Hilfsfunktionen vereinfachen zu

$$l_1(\alpha) := \frac{l(\alpha)}{L} = \sqrt{\lambda^2 + 2 - 2\lambda \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$$

$$\circ \quad \tan \beta(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{\lambda - \sin \alpha}$$

Die Bewegungsgleichung lautet dann

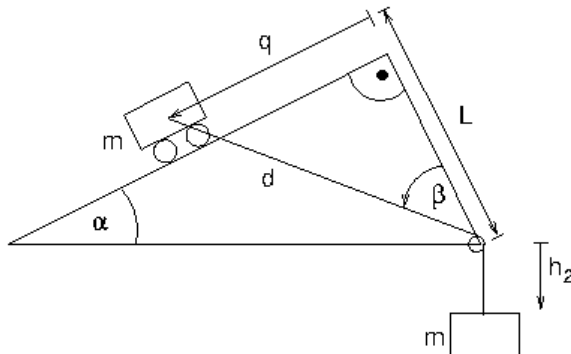
$$\circ \quad \ddot{\alpha} = \omega_0^2 [\kappa \cos \alpha - (\lambda - l_1(\alpha)) \cos (\alpha + \beta(\alpha))]$$



Lösung von Aufgabe 10

1. Bestimmung der Bewegungsgleichung:

- Als Hilfsgrößen werden noch der Winkel β und die Längen d und h_2 eingeführt.



- Bezeichnet man die feste Seillänge mit S , lassen sie sich mit Hilfe der Koordinate q ausdrücken:

$$d = \sqrt{L^2 + q^2}$$

$$h_2 = S - d = S - \sqrt{L^2 + q^2}$$

$$\sin \beta = \frac{q}{d} = \frac{q}{\sqrt{L^2 + q^2}}$$

- Die Bewegungsgleichung enthält die Hangabtriebskraft, die Komponente der Seilkraft längs der schiefen Ebene und die Trägheitskräfte beider Massen:

$$mg \sin \alpha - mg \sin \beta - m\ddot{q} + m\ddot{h}_2 \sin \beta = 0$$

- Gewichtskraft und Trägheitskraft der Masse am Seil wirken entlang des Seils. Der Anteil in q -Richtung bekommt daher jeweils einen Faktor $-\sin \beta$
- Durch stures Rechnen erhält man die Ableitungen von h_2 :

$$\dot{h}_2 = -\frac{q\dot{q}}{\sqrt{L^2 + q^2}}$$

$$\ddot{h}_2 = -\frac{q}{\sqrt{L^2 + q^2}}\ddot{q} - \frac{L^2}{(L^2 + q^2)^{3/2}}\dot{q}^2$$

- Setzt man alles ein und sortiert die Terme nach Ableitungen von q , lautet die vollständige Bewegungsgleichung für q

$$\left(1 + \frac{q^2}{L^2 + q^2}\right)\ddot{q} + \frac{L^2 q}{(L^2 + q^2)^2}\dot{q}^2 + \frac{gq}{\sqrt{L^2 + q^2}} = g \sin \alpha$$

2. Gleichgewichtslage:

- Setzt man als Lösung die statische Gleichgewichtslösung $q = q_0$ ein, folgt aus der Bewegungsgleichung

- $\frac{q_0}{\sqrt{L^2 + q_0^2}} = \sin \alpha$
- Auflösen nach q \Rightarrow
 - $q_0 = L \tan \alpha$
- Anschaulich: Kräftegleichgewicht, wenn $\beta = \alpha$

3. Linearisieren der Bewegungsgleichung:

- Einführen der Koordinate x als Abweichung von der Gleichgewichtslage
 - $x := q - L \tan \alpha$
- Die komplizierten Terme werden dann schrittweise linearisiert, wobei die Beziehung
 - $(1 + x)^k \approx 1 + k x$
- immer wieder nützlich ist, i.f. etwa für $k = -1/2$.
- Am besten fängt man an mit

$$\begin{aligned}
 L^2 + q^2 &= L^2 + (x + L \tan \alpha)^2 \\
 &\approx L^2 + L^2 \tan^2 \alpha + 2xL \tan \alpha \\
 &= L^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + 2 \frac{x}{L} \tan \alpha \right) \\
 &= \frac{L^2}{\cos^2 \alpha} \left(1 + 2 \frac{x}{L} \sin \alpha \cos \alpha \right)
 \end{aligned}$$

-
- Dies liefert als nächstes

$$\begin{aligned}
 \frac{q}{\sqrt{L^2 + q^2}} &\approx (x + L \tan \alpha) \frac{\cos \alpha}{L} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{x}{L} \sin \alpha \cos \alpha}} \\
 &\approx \left(\frac{x}{L} \cos \alpha + \sin \alpha \right) \left(1 - \frac{x}{L} \sin \alpha \cos \alpha \right) \\
 &\approx \sin \alpha + \frac{x}{L} (\cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha) \\
 &= \sin \alpha + \frac{x}{L} \cos^3 \alpha
 \end{aligned}$$

-
- Der Term mit \dot{q}^2 ist schon quadratisch in x ($\dot{q} = \dot{x}$!), er verschwindet beim Linearisieren.
- Der Term \ddot{q} ist selbst schon klein (linear in x), von der komplizierten Klammer bleibt beim Linearisieren daher nur der konstante Anteil in x:

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{q^2}{L^2 + q^2} &\approx 1 + (x + L \tan \alpha)^2 \frac{\cos^2 \alpha}{L^2} \frac{1}{1 + 2 \frac{x}{L} \sin \alpha \cos \alpha} \\
 &\approx 1 + L^2 \tan^2 \alpha \frac{\cos^2 \alpha}{L^2} \\
 &= 1 + \sin^2 \alpha
 \end{aligned}$$

-
- Ersetzt man alle Terme der Bewegungsgleichung durch ihre linearen Näherungen und teilt noch durch den Vorfaktor von \ddot{x} , erhält man schließlich die linearisierte Bewegungsgleichung

- $\ddot{x} + \frac{g}{L} \frac{\cos^3 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha} \cdot x = 0$



Lösung von Aufgabe 11

- Das Torsionsträgheitsmoment ist

- $I_P = \frac{\pi}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^4 = 7.952 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$

- Die Federkonstante der Welle beträgt daher

- $c_\varphi = \frac{GI_P}{l} = 7.069 \cdot 10^3 \text{ Nm}$

- Die Bewegungsgleichung für die Torsionsschwingung lautet

- $$\begin{aligned} J\ddot{\varphi} + c_\varphi\varphi &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{c_\varphi}{J}\varphi &= 0 \end{aligned}$$

- Vergleich mit der Standardform ergibt

- $\omega_0^2 = \frac{c_\varphi}{J}$

- also

- $J = \frac{c_\varphi}{\omega_0^2}$

- Mit

- $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 25.13 \frac{1}{\text{s}}$

- ergibt sich somit

- $J = 11.19 \text{ kg m}^2$



Lösung von Aufgabe 12

1. Schwingungsdauer:

- Für kleine Auslenkungen gilt in guter Näherung die linearisierte Bewegungsgleichung von Aufgabe 8

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{a^2 c}{m l^2} - \frac{g}{l} \right) \varphi = 0$$

- Dies ist genau die Bewegungsgleichung der ungedämpften freien Schwingung mit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{a^2 c}{m l^2} - \frac{g}{l}} = 1.222 \cdot 1/\text{s}$$

- also erhält man als Schwingungsdauer

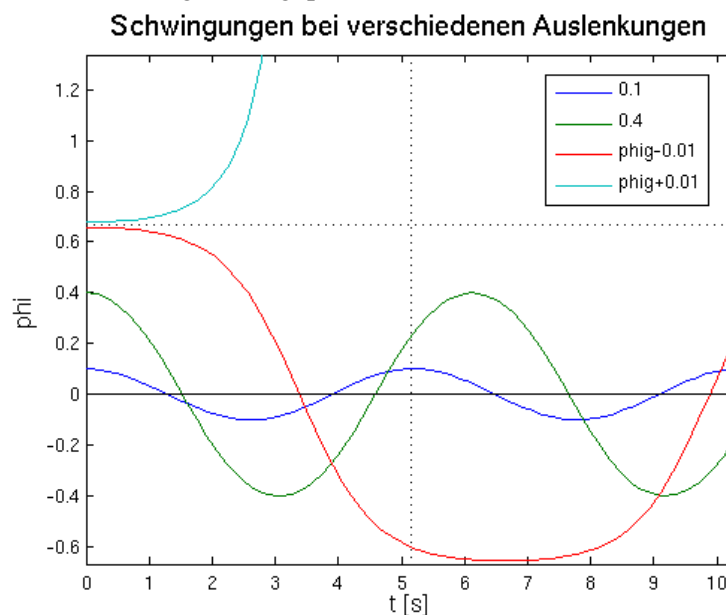
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 5.140 \text{ s}$$

2. Verhalten bei $c = 50 \text{ N/m}$:

- Der Vorfaktor ω_0^2 vor ϕ ist jetzt negativ, formal ist T also imaginär.
- Physikalische Interpretation: Die Gesamtkraft (Feder + Schwerkraft) wirkt der Auslenkung ϕ nicht entgegen, sondern verstärkt sie. Die Gleichgewichtslage des Pendels ist dann instabil.

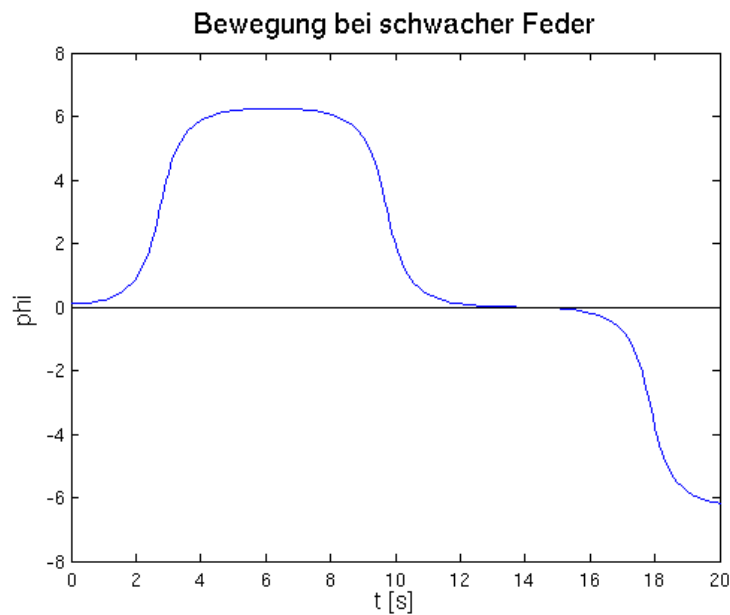
3. Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung mit Matlab:

- Die Bewegungsgleichung wird in Standardweise in ein System 1. Ordnung überführt und die rechte Seite als Matlabfunktion dgl12 definiert. Das Gleichungssystem wird mit ode45 gelöst und für die vier Anfangswerte geplottet:



- Interpretation:
 - Bei kleiner Auslenkung entspricht die Schwingung der linearen Näherung.

- Für größeres ϕ_0 ist die Schwingung noch immer näherungsweise harmonisch, aber die Schwingungsdauer ist deutlich größer.
- Startet man kurz unterhalb des instabilen Gleichgewichtspunkts, erhält man immer noch eine Schwingung um 0, aber sie ist stark anharmonisch.
- Bei einem Startwert oberhalb des instabilen Gleichgewichtspunkts kippt das Pendel um.
- Bewegung bei halber Federkonstante:



-
- Selbst bei kleiner Auslenkung kippt das Pendel um. Das seltsame Langzeitverhalten ist unphysikalisch, es beruht auf der Annahme einer stets waagerechten Feder, die nach kurzer Zeit stark verletzt ist.
- vollständiges Matlab-Skript zur Aufgabe



Lösung von Aufgabe 13

1. Parameter im linearisierten Fall:

- Auslenkung aus der Gleichgewichtslage nach Lösung 10
 - $q_0 = L \tan \alpha = 0.9326 \text{ m}$
- Vergleich der linearisierten Gleichung mit der Schwingungsgleichung liefert

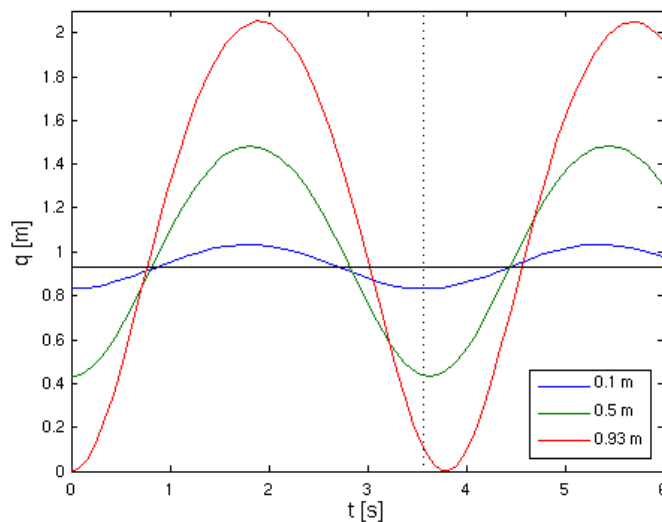
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{\cos^3 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}} = 1.760 \frac{1}{\text{s}}$$

- die Schwingungsdauer beträgt also
 - $T = 3.570 \text{ s}$

2. Lösung der nichtlinearen Bewegungsgleichung mit Matlab:

- Zur Lösung mit Matlab wird die Bewegungsgleichung wieder in Standardweise in ein System 1. Ordnung überführt und die rechten Seiten als Matlabfunktion dgl13 definiert.
- Das Gleichungssystem wird mit ode45 gelöst und für die drei Anfangswerte geplottet.

Schwingungen bei verschiedenen Auslenkungen



- Bei den beiden kleineren Auslenkungen erhält man eine sehr gute Übereinstimmung mit a., allerdings ist die 2. Kurve schon etwas unsymmetrisch. Bei der großen Auslenkung ist die Kurve deutlich anharmonisch und die Schwingungsdauer etwas größer.
- vollständiges Matlab-Skript zur Aufgabe



Lösung von Aufgabe 14

- Gegeben sind
 - $x_{i+10}/x_i = 0.7, T = 35 \text{ s}$
- Zunächst ist
 - $x_i/x_{i+10} = (x_i/x_{i+1})^{10} = q^{10}$
 - $\Rightarrow \Lambda = \ln(q) = -0.1 \ln 0.7 = 0.03567$
- Wegen $\Lambda = \delta T$ ist
 - $\delta = \Lambda/T = 1.019 \cdot 10^{-3} \text{ 1/s}$
- Die Kreisfrequenz ω beträgt
 - $\omega = 2\pi/T = 0.1795 \text{ 1/s}$
- Als Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung erhält man aus
 - $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$
- damit
 - $\omega_0 := \sqrt{\omega^2 + \delta^2} = 0.17951/\text{s}$
- Daher ist das Dämpfungsmaß
 - $D = \delta/\omega_0 = 5.68 \cdot 10^{-3}$



Lösung von Aufgabe 15

1. Bestimmung der Dämpfungsmaße

- Aus den gegebenen Werten erhält man D mit
 - $D = \delta/\omega_0 = b/(2m \omega_0) = b/(4\pi m f_0)$

b [kg/s]	D
400	0.637
600	0.955
800	1.273

- Der Dämpfer mit 600 kg/s ist der geeignetste, weil sein Dämpfungsmaß am dichtesten beim Wert $D=1$ des aperiodischen Grenzfalls liegt.

2. Abklingfaktoren:

- Nach der Wartezeit $t_W = 1/50$ s im Fall der gedämpften Schwingung
 - $A = e^{-\delta t_W} = e^{-b t_W/(2m)}$
 - $b_1 = 400 \text{ kg/s} \Rightarrow A = e^{-4} = 1.8 \cdot 10^{-2}$
 - $b_2 = 600 \text{ kg/s} \Rightarrow A = e^{-6} = 2.5 \cdot 10^{-3}$
- Im Kriechfall bei $b_3 = 800 \text{ kg/s}$ ist die langsamer abklingende e-Funktion relevant, also
 - $A = e^{-(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t_W} = e^{-3.0} = 5.0 \cdot 10^{-2}$
- Die inversen Werte sind etwas anschaulicher:

b [kg/s]	1/A
400	56
600	400
800	20

- Der mittlere Dämpfer stellt sich wieder deutlich als der geeignetste heraus.



Lösung von Aufgabe 16

1. Schwingungsdauer und Dämpfungsmaß:

- Die Bewegungsgleichung des Systems lautete

☐ $\ddot{\theta} + \frac{br^2}{J + mr^2} \dot{\theta} + \frac{(c_1 + c_2)r^2}{J + mr^2} \theta = 0$

- Vergleich mit der Standardform

☐ $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- ergibt

☐ $\omega_0 = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)r^2}{J + mr^2}} = 5.199 \frac{1}{s}$

- und

☐ $\delta = \frac{br^2}{2(J + mr^2)} = 1.351 \frac{1}{s}$

- Die Schwingungsdauer ist also

☐ $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = 1.252 s$

- und das Dämpfungsmaß

☐ $D = \frac{\delta}{\omega_0} = 0.2599$

2. Schnelle Unterdrückung der Schwingung

- Am schnellsten klingen die Schwingungen beim aperiodischen Grenzfall ab, also für

☐ $D = 1$

- Daher

$$\delta = \omega_0$$

$\Rightarrow \frac{br^2}{2(J + mr^2)} = \sqrt{\frac{(c_1 + c_2)r^2}{J + mr^2}}$

☐ $\Rightarrow b = \frac{2}{r} \sqrt{(c_1 + c_2)(J + mr^2)} = 38.47 \frac{kg}{s}$



Lösung von Aufgabe 17

1. Bewegungsgleichung:

- Der Winkel θ werde im Gegenuhrzeigersinn gemessen. Bei $\theta = 0$ sei das System (ohne Reibung) im Gleichgewicht.

- Die Drehmomentenbilanz liefert

$$\circ \quad \sum M_{ext} - J_G \ddot{\theta} = 0$$

- mit dem Gesamtträgheitsmoment

$$\circ \quad J_G = J + m r_2^2$$

- Äußere Drehmomente kommen von den beiden Federn und der Reibung, also

$$\sum M_{ext} = M_{k_1} + M_{k_2} + M_R$$

$$\circ \quad = -c_2(r_2\theta) \cdot r_2 - c_1(r_1\theta) \cdot r_1 - \mu m g r_2 \operatorname{sign}(r_2\dot{\theta})$$

- Mit

$$\circ \quad \operatorname{sign}(r_2\dot{\theta}) = \operatorname{sign}(\dot{\theta})$$

- ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\circ \quad \ddot{\theta} + \frac{c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2}{J + m r_2^2} \theta = -\frac{\mu m g r_2}{J + m r_2^2} \operatorname{sign}(\dot{\theta})$$

- Vergleich mit der Standardform liefert

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2}{J + m r_2^2}} = 2.640 \frac{1}{s}$$

$$\circ \quad x_R = \frac{\mu m g r_2}{c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2} = 0.1024$$

2. Die Schwingungsperiode T ergibt sich sofort:

- $T = 2\pi/\omega_0 = 2.38 \text{ s}$

3. Abnahme der Schwingungsamplitude

- Pro Schwingung nimmt die (Winkel-)Amplitude ab um den Wert

$$\circ \quad \Delta\theta = 4 x_R = 0.41 = 23.5^\circ$$

4. Aus der Bedingung

- $|x_0| - 2 x_R n < x_R$

folgt

- $n > 7.173$

also bleibt das System nach vier Schwingungen ($n = 8$) stehen. Der Winkel beträgt dann

- $x_{end} = |x_0| - 2 x_R n = -0.06705 = -3.842^\circ$



Lösung von Aufgabe 18

1. Bewegungsgleichung:

- Zunächst bestimmen wir das Trägheitsmoment J des Stabes bezogen auf den angegebenen Drehpunkt. Nach dem Satz von Steiner gilt:
 - $J = J_0 + m d^2$
 - d = Abstand des Drehpunkts zum Schwerpunkt
 - J_0 = Trägheitsmoment bzgl. Schwerpunkt
- Trägheitsmoment J_0 eines Stabes, Masse m , Länge L (aus Tafel oder direkt integriert):
 - $J_0 = 1/12 m L^2$
- Daher:
 - $J = 1/12 m L^2 + m (L/4)^2 = 7/48 m L^2$
- Beim Aufstellen der Momentenbilanz wird mit $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$ gerechnet. Damit
 - $$\sum M = -c \frac{3L}{4} \theta \frac{3L}{4} + F_0 \cos \Omega t \frac{L}{4} - b \frac{L}{4} \dot{\theta} \frac{L}{4} - M_0 \cos \Omega t - J \ddot{\theta} = 0$$
- Einsetzen von J und Umformen ergibt die Bewegungsgleichung
 - $$\frac{7}{48} m L^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{16} b L^2 \dot{\theta} + \frac{9}{16} c L^2 \theta = -M_0 \cos \Omega t + \frac{1}{4} L F_0 \cos \Omega t$$

2. Schwingungsparameter:

- Für direkten Vergleich mit der Standardform umformen zu
 - $$\ddot{\theta} + \frac{3}{7} \frac{b}{m} \dot{\theta} + \frac{27}{7} \frac{c}{m} \theta = \left(\frac{12}{7} \frac{F_0}{m L} - \frac{48}{7} \frac{M_0}{m L^2} \right) \cos \Omega t$$
- Durch Vergleich der Koeffizienten erhält man direkt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{27c}{7m}} = 28.88 \frac{1}{s}$$

$$D = \frac{b}{2\sqrt{21mc}} = 0.8022$$

$$\hat{f}_E = \frac{4 F_0}{9 c L} - \frac{16 M_0}{9 c L^2} = 1.029 \cdot 10^{-2}$$



Lösung von Aufgabe 19

- Mit den Werten aus Lösung 18 hat man

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 1.039$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = 0.5993$$

$$\hat{x} = \hat{f}_E V = 6.173 \cdot 10^{-3} \hat{=} 0.3537^\circ$$

$$\varphi = \arctan \frac{-2D\eta}{1 - \eta^2} = -1.618 \hat{=} -92.72^\circ$$

- Die Anregung liegt in der Nähe der Resonanzfrequenz, daher ist ϕ nahezu -90° . Wegen der hohen Dämpfung bleibt aber die Vergrößerungsfunktion V klein, damit auch die Nickamplitude \hat{x} .



Lösung von Aufgabe 20

- Eigenfrequenz des Systems:

$$\circ \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c_{\text{gesamt}}}{m}} = \sqrt{\frac{6c}{m}} = 10.954 \frac{1}{s}$$

- Frequenzverhältnis bei $n_1 = 500$ U/min:

$$\circ \quad \eta_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_0} = \frac{2\pi n_1}{\omega_0} = 4.780$$

- Amplitude:

$$\hat{x} = \hat{f}_E V(\eta) = \frac{\hat{f}_E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

$$\circ \Rightarrow \hat{f}_E = \hat{x}(\eta_1) \sqrt{(1 - \eta_1^2)^2 + 4D^2\eta_1^2} = 2.19 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

- Unwucht:

$$\hat{f}_E = \frac{m_r r}{m} \eta^2$$

$$\circ \Rightarrow m_r r = \frac{m \hat{f}_E}{\eta^2} = 1.437 \text{ kg m}$$

- Bestimmung von η_2 :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= \hat{f}_E(\eta_2) V(\eta_2) \\ &= \frac{m_r r}{m} \eta_2^2 \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta_2^2)^2 + 4D^2\eta_2^2}} \end{aligned}$$
$$\circ$$

- Hochmultiplizieren der Wurzel und Quadrieren ergibt:

$$\circ \quad (1 - \eta_2^2)^2 + 4D^2\eta_2^2 = \left(\frac{m_r r}{m \hat{x}_2} \right)^2 \eta_2^4 = 91.83 \eta_2^4$$

- Quadratische Gleichung in η_2^2 . Wegen $\eta > 0$ Wert eindeutig:

$$\circ \quad \eta_2 = 0.3081$$

- Drehzahl:

$$\circ \quad n_2 = \frac{\Omega_2}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \eta_2 = 0.5372 \frac{1}{s} = 32.23 \frac{\text{U}}{\text{min}}$$



Lösung von Aufgabe 21

- Parameter des Systems in Standardform:

- Eigenfrequenz und Dämpfung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 28.3 \frac{1}{s}$$

$$D = \frac{b}{2m\omega_0} = 0.106$$

- Rad läuft auf der Straße mit Geschwindigkeit v , also Bewegung des Rades

$$u(t) = \hat{y} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} vt\right) = \hat{u} \cos(\Omega t)$$

- mit

- $\Omega = 130.7 \cdot 1/s$

- $\hat{u} = 0.01 \text{ m}$

- Frequenzverhältnis der Anregung

- $\eta = \Omega/\omega_0 = 4.62$

- Vergrößerungsfunktion

- $V(\eta, D) = 0.04908$

- Berechnung im Inertialsystem

- Erregeramplitude

- $\hat{f}_E = \hat{u} \sqrt{1 + 4D^2 \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}} = 14.00 \text{ mm}$

- zusätzlicher Phasenunterschied ψ zwischen Bewegung des Rades und Anregungskraft für Amplitude der Beschleunigung unerheblich

- Amplitude der Absolutbewegung

- $\hat{x} = \hat{f}_E V = 6.87 \cdot 10^{-4} \text{ m}$

- Amplitude der Beschleunigung somit

- $\hat{a} = \Omega^2 \hat{x} = 11.74 \text{ m/s}^2$

- Berechnung im Relativsystem:

- Erregeramplitude

- $\hat{f}_E = \hat{u} \eta^2 = 0.2135 \text{ m}$

- Amplitude

- $\hat{x}_{\text{rel}} = \hat{f}_E V(\eta) = 1.05 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

- Phasenverschiebung

- $\varphi = -\arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} = -3.0935$

- also fast gegenläufig zur Bewegung

- Relativbewegung insgesamt

- $$\begin{aligned}
 x_{rel}(t) &= \hat{x}_{rel} \cos(\Omega t + \varphi) \\
 &= 1.05 \text{ cm} \cos(\Omega t - 3.0935)
 \end{aligned}$$
- - Beschleunigung des Fahrzeugs ist gegeben durch \ddot{x} im ortsfesten Koordinatensystem, also:
 - Gesamtschwingung $x(t)$

$$\begin{aligned}
 x(t) &= x_{rel}(t) + u(t) \\
 &= 1.05 \text{ cm} \cos(\Omega t - 3.0935) + 1.00 \text{ cm} \cos(\Omega t)
 \end{aligned}$$
 - Überlagerung der beiden harmonischen Schwingungen ergibt als Amplitude der Gesamtbewegung
 - $\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_{rel}^2 + 2\hat{x}_{rel}\hat{u}\cos(\varphi) + \hat{u}^2} = 6.87 \cdot 10^{-4} \text{ m}$
 - \ddot{x} und Amplitude der Beschleunigung somit wie oben



Lösung von Aufgabe 22

- Parameter eines erregten Schwingers:
 - m, c, b (Schwinger selber)
 - Ω, \hat{F}_E (Anregung)
- bei Unwuchterregung alternativ
 - $m_r r$ statt \hat{F}_E
 - Zusammenhang
 - $\hat{F}_E = m_r r \Omega^2$
- insgesamt also fünf Größen, die alles festlegen
- Analyse der gegebenen Größen
 - direkt gegeben sind
 - $m_D, D, n, \hat{F}_E, \hat{x}$
 - außerdem hat man
 - $\hat{R} = 0.04 \hat{F}_E = 6400 \text{ N}$
 - m_D zunächst nutzlos
 - benötigt wird die Gesamtmasse $m = m_D + m_F$
 - am Ende damit m_F berechnen
 - also effektiv fünf Größen gegeben \rightarrow fünf Systemparameter festgelegt
- Man erhält sofort die Kreisfrequenz der Erregung
 - $\Omega = 2\pi n = 251.3 \text{ 1/s}$
- \hat{F}_E liefert damit die Unwuchtstärke

$$\circ m_r r = \frac{\hat{F}_E}{\Omega^2} = 2.533 \text{ kg m}$$

$$D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mc}}$$

$$\hat{x} = V(\eta, D) \hat{f}_E = V(\eta, D) \frac{\hat{F}_E}{m\omega_0^2}$$

$$\circ \hat{R} = \hat{F}_E V(\eta, D) \sqrt{1 + 4D^2\eta^2}$$

- Mit Hilfe der Definitionsgleichungen

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\circ \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

- könnte man nun alles durch m, c , und b ausdrücken und die Gleichungen auflösen.

- Einfacher zum Ziel führt die Erkenntnis, dass sich aus der dritten Gleichung η unmittelbar bestimmen lässt

$$V\sqrt{1+4D^2\eta^2} = \frac{\hat{R}}{\hat{F}_E} = 0.04 =: \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1+4D^2\eta^2}{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2} = \alpha^2$$

- Hochmultiplizieren liefert eine quadratische Gleichung für η^2

$$\eta^4 + \left(4D^2 - 2 - \frac{4D^2}{\alpha^2}\right)\eta^2 + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 0$$

- mit den gegebenen Werten also

$$\eta^4 - 17.97\eta^2 - 624 = 0$$

- Auflösen ergibt wegen $\eta^2 > 0$ nur den einen Wert

$$\eta = 5.961$$

- und aus dem bekannten Ω auch

$$\omega_0 = 42.16 \text{ 1/s}$$

- In der zweiten Gleichung sind nun alle Größen außer m bekannt, daher bekommt man daraus die Gesamtmasse

$$\begin{aligned} m &= \frac{\hat{F}_E}{\omega_0^2 \hat{x}} V(\eta, D) \\ &= \frac{\hat{F}_E}{\omega_0^2 \hat{x}} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \\ &= 2605 \text{ kg} \end{aligned}$$

- Die Masse des Fundaments ist schließlich

$$m_F = m - m_D = 2305 \text{ kg}$$



Lösung von Aufgabe 23

- Eigenfrequenz des Schwingers:

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 10 \frac{1}{s}$

- Frequenzverhältnis

- $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{2\pi}{T\omega_0} = 0.314$

- Schreibt man die Erregungsfunktion als

- $f_E(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\Omega t + \psi_n)$

- erhält man

- $\psi_n = -\pi/2$

- $C_n = 0.1273 \text{ m} \cdot 1/n$ (n ungerade), 0 sonst

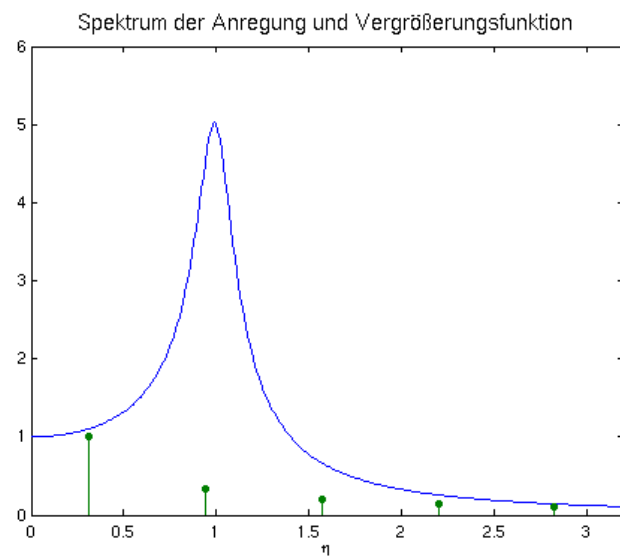
- Die Fourierkoeffizienten der Schwingung erhält man aus

- $\hat{x}_n = C_n \cdot V(n\eta, D)$

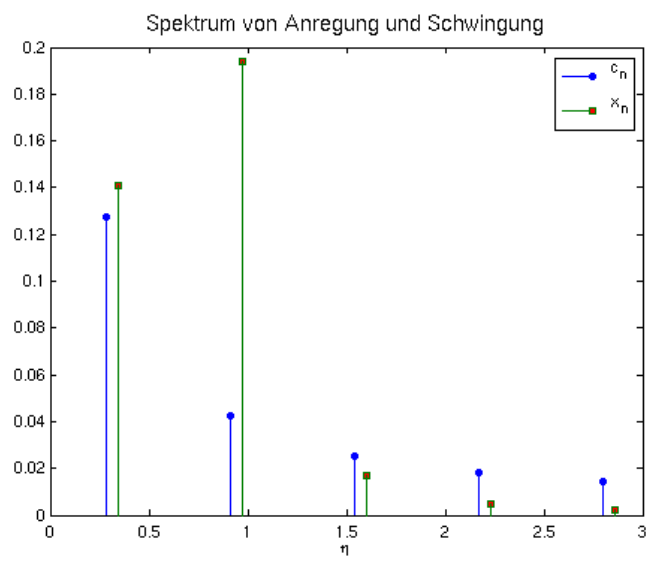
- Mit den obigen Werten ergibt sich

n	x _n
1	0.1409
3	0.1937
5	0.0170
7	0.0047
9	0.0020

- Graphische Veranschaulichung:



○



○



Lösung von Aufgabe 24

- Die Erregungsfunktion lautet

- $f_E(t) = x_S \sigma(t)$

- denn sie ist im statischen Fall (also nach Abklingen der Schwingung) gleich der statischen Verschiebung x_S .

- Die Greensfunktion ist mit den angegebenen Werten

- $g(t) = \frac{1}{s} \sqrt{2} e^{-t/s\sqrt{2}} \sin(t/s\sqrt{2}) \sigma(t)$

- Mit dem Faltungsintegral ist

$$x(t) = \int_{-\infty}^t f_E(t') g(t-t') dt'$$

- $$= x_S \sqrt{2} \int_{-\infty}^t \sigma(t') e^{-(t-t')/s\sqrt{2}} \sin((t-t')/s\sqrt{2}) dt'/s$$

- Der Integrand verschwindet für $t' < 0$. Ist $t < 0$, so ist daher das ganze Integral 0. Bei $t > 0$ muss erst ab 0 integriert werden. Zusammengefasst:

- $x(t) = x_S \sqrt{2} \sigma(t) \int_0^t e^{-(t-t')/s\sqrt{2}} \sin((t-t')/s\sqrt{2}) dt'/s$

- Die Substitution $u = (t - t')/s\sqrt{2}$ liefert

- $x(t) = 2x_S \sigma(t) \int_0^{t/s\sqrt{2}} e^{-u} \sin u du$

- Die angegebene Formel ergibt schließlich

- $x(t) = -x_S \sigma(t) \left[e^{-t/s\sqrt{2}} (\sin(t/s\sqrt{2}) + \cos(t/s\sqrt{2})) - 1 \right]$

- Im Bild:

