Physik 4

Die meisten Teile von Physik 1 - 4 (MB/Diplom) sind in Physik 1 und Physik 2 (MB/Bachelor) eingegangen. Kapitel 2 von Physik 4 ist der Bachelor-Schere zum Opfer gefallen und findet sich hier:

- Felder
- Aufgaben
- Anhang

Inhaltsverzeichnis

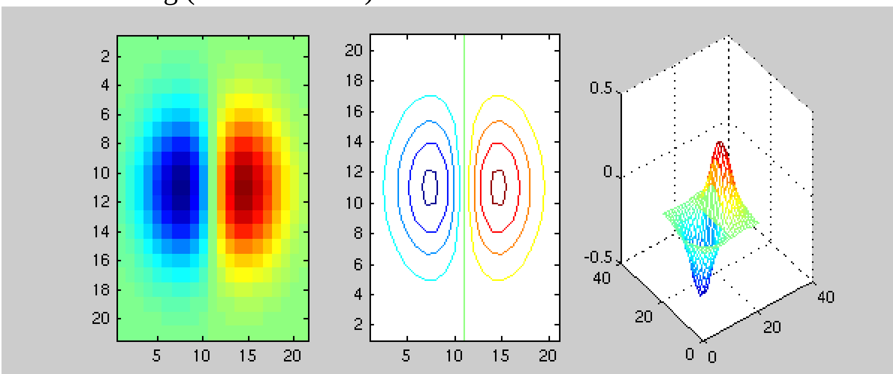
Übersicht

Felder

- Eigenschaften von Feldern
- Elektromagnetische Felder
- Gravitationsfelder

Eigenschaften von Feldern

- Feld:
  - Zuordnung von Werten einer physikalischen Größe zu jedem Punkt des Raums
  - zeitlich konstant (stationär) oder zeitabhängig
  - skalar (Skalarfeld), vektoriell (Vektorfeld) oder höherer Ordnung (Tensorfeld)
  - makroskopisch oder mikroskopisch
- Skalare Felder:
  - Beispiele
    - Temperaturverteilung in einem Körper oder Raumvolumen
    - Druckverteilung in einer Flüssigkeit
    - Dichte in einem inhomogenen Medium
  - graphische Darstellung (vor allem bei 2d-Feldern)
    - Werte durch Farbcodes
    - Höhenlinien
    - 3d-Darstellung (Wert als Höhe)



- Vektorfelder:
  - an jede Raumpunkt wird ein Vektor "angeheftet"
  - Länge der Vektoren → zugehöriges Skalarfeld
  - Beispiele
    - Geschwindigkeitsfeld in einer Strömung
    - elektrisches Feld um eine Ladungsverteilung
    - Energiestromdichte einer Schallwelle
  - graphische Darstellung
    - geschickte Auswahl von Vektorpfeilen

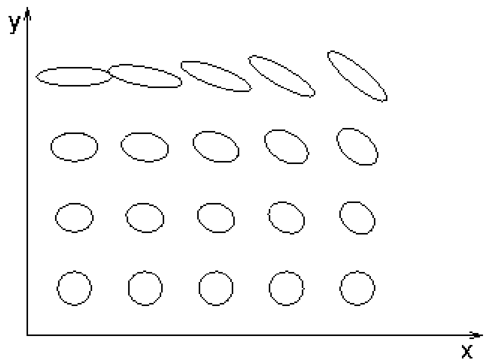
      

    - Feldlinien

- Elektrische Leitfähigkeit in einem anisotropen Festkörper:
  - elektrischer Widerstand R: bei angelegter Spannung U fließt Strom I gemäß Ohmschen Gesetz
    - I = U/R
  - Widerstand eines Festkörpers in einer Richtung abhängig von

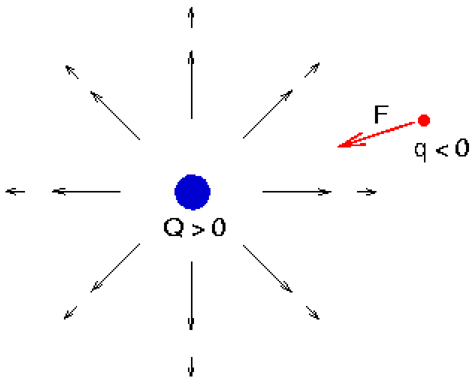
        - Querschnittsfläche A
        - Länge L
        - spezifische Leitfähigkeit κ (Stoffeigenschaft)
        - $R = \frac{1}{\kappa}\frac{L}{A}$
    - elektrische Stromdichte $\vec{j}$
        - j = Stromstärke/Querschnittsfläche = I/A
        - Richtung des Stromflusses (senkrecht zu A)
    - elektrische Feldstärke $\vec{E}$
        - Zusammenhang mit Spannung am Widerstand der Länge L (homogener Körper)
        - E = U/L
        - Richtung des Widerstands (parallel zu L)
    - Ohmsches Gesetz damit für jeden Punkt $\vec{x}$ des Festkörpers
        - $\vec{j}(\vec{x}) = \kappa(\vec{x})\vec{E}(\vec{x})$
    - anisotroper Körper (z.B. Flüssigkeitskristall)
        - κ je nach Richtung verschieden
        - beschrieben durch Matrix $\boldsymbol{\kappa}$
        - Ohmsches Gesetz damit Vektor = Matrix x Vektor
    - inhomogener anisotroper Festkörper
        - $\boldsymbol{\kappa}$ hängt von $\vec{x}$ ab
        - Beispiel für Tensorfeld
        - Veranschaulichung durch Ellipsen



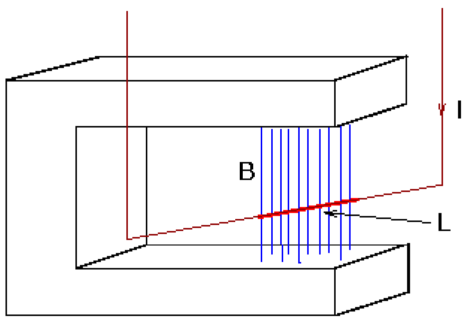
- Aufgaben:
    - Aufgabe 7

Elektromagnetische Felder

- Elektrostatisches Feld:
  - auf Probeladung q wirkt Kraft F $\longrightarrow$ elektrisches Feld E mit
    - $\vec{F} = q\vec{E}$
  - elektrische Feldstärke E, Einheit Volt/Meter
    - $[E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{N}{C} = \frac{N}{As} = \frac{V}{m}$
    - letzteres wegen
    - U I = P => V A = N m/s
  - Ursache des Feldes: andere Ladung
  - elektrisches Feld einer einzelnen (Punkt-)Ladung Q (Coulomb)
    - zeigt von der Ladung weg (Q > 0) oder zur Ladung hin (Q < 0)
    - nimmt mit Quadrat des Abstands r ab

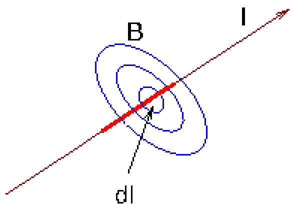


    - $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$
  - Dielektrizitätskonstante ε_0 zur Umrechnung der Einheiten
    - $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}$
  - viele Punktladungen $\longrightarrow$ Feldstärken addieren sich vektoriell
- Magnetostatisches Feld:
  - auf bewegte Ladung q mit Geschwindigkeit v wirkt Kraft F (Lorentzkraft) $\longrightarrow$ magnetisches Feld B mit
    - $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
  - magnetische Induktion B, Einheit Tesla
    - $[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{Ns}{Cm} = \frac{Vs}{m^2} =: T$
  - Kraft auf stromdurchflossenen Draht



- gesamte bewegte Ladung q bei Stromstärke I im Draht der Länge L
- $q = It = I\frac{L}{v}$
- gesamte Kraft F auf diese Ladungen daher
- $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$

○ Ursache des magnetischen Feldes: andere bewegte Ladung (≙ Strom I)



○ keine magnetischen Ladungen (Monopole) entdeckt (bisher?)

○ Magnetfeld eines kleinen stromdurchflossenen Leiters (Biot-Savart)

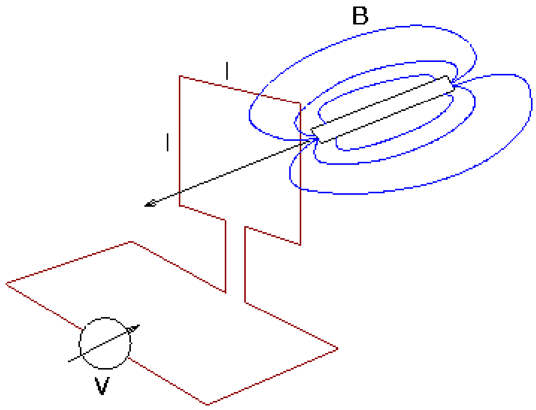
- ringförmig um den Leiter
- nimmt mit Quadrat des Abstands r ab
- $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l}}{r^2} \times \frac{\vec{r}}{r}$

○ magnetische Feldkonstante μ_0

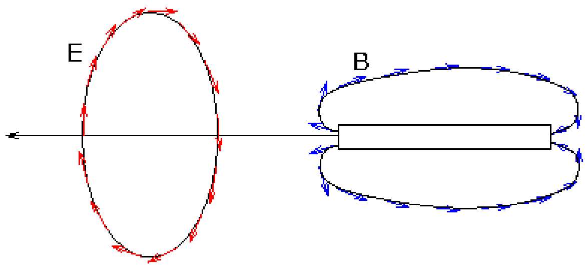
- $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$

○ langer Draht oder viele Leiter $\longrightarrow$ Feldstärken addieren sich vektoriell

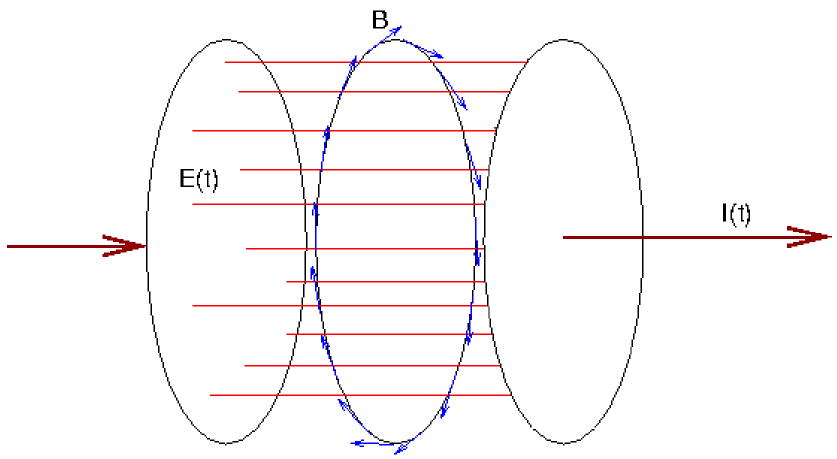
- Induktion:
  - ○ Experiment



        - Magnet wird bewegt durch quadratische Leiterschleife
        - $\rightarrow$ Magnetfeld B innerhalb der Schleife ändert sich
        - Beobachtung: Voltmeter zeigt Spannung U_{ind} an (induzierte Spannung) mit
        - $U_{ind} = -l^2 \frac{dB}{dt}$
    - magnetischer Fluss Φ_m
        - gesamtes Magnetfeld durch eine Fläche A
        - in Formeln
        - $\Phi_m = \int_A \vec{B}\, d\vec{A}$
        - bei räumlich nahezu konstantem B einfach
        - $\Phi_m = \vec{B}\vec{A}$
    - induzierte Spannung damit
        - $U_{ind} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$
    - Ursache der Spannung = elektrisches Feld längs der Leiterschleife
    - Größe der Spannung: Feldstärke "längs der Schleife"
        - $U_{ind} = \oint_L \vec{E} d\vec{l}$
- Zeitveränderliche elektrische und magnetische Felder:
    - Induktion $\rightarrow$ zeitliche Änderung eines Magnetfelds erzeugt ein elektrisches Feld



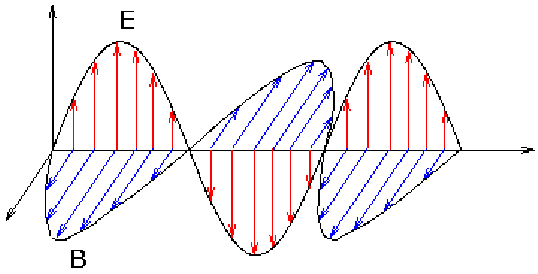
    - umgekehrt gilt: zeitliche Änderung eines elektrischen Felds erzeugt ein Magnetfeld
    - Beispiel: Aufladung eines Kondensators



    - E und B sind eng verknüpft (elektromagnetisches Feld)
    - Zusammenhang mit Ladungen und Strömen

- bewegte Ladungen erzeugen elektromagnetische Felder
- elektromagnetische Felder erzeugen Kräfte (→ Bewegung) auf Ladungen
- komplizierte Rückkopplung
- i.a. sehr schwer zu lösen

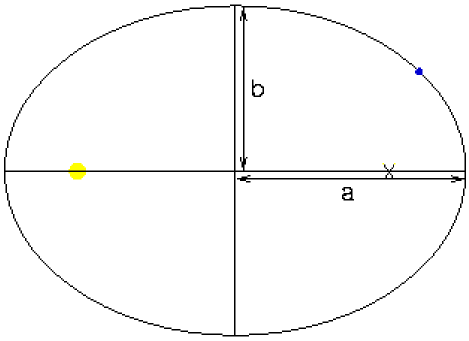
- Elektromagnetische Wellen:
  - geeignet bewegte Ladungen (z.B. Hertzscher Dipol) strahlen e.m. Felder als Wellen ab
  - Ausbreitungsgeschwindigkeit c
  - $\vec{E}$ und $\vec{B}$ stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung (Transversalwellen) und aufeinander



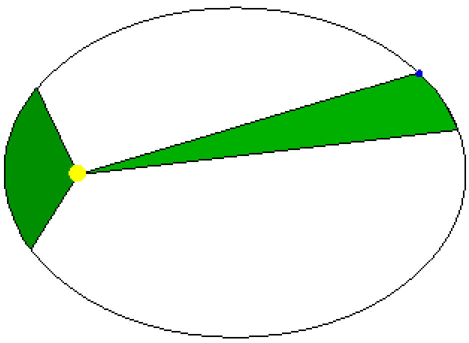
  - Zusammenhang zwischen E und B in der Welle
    - $\frac{E}{B} = c$
  - Intensität I der Welle = mittlere Energiestromdichte bei Amplituden E_0 und B_0
    - $I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0$
- Aufgaben:
  - Aufgabe 8
  - Aufgabe 9

Gravitationsfelder

- Massenanziehungskraft nach Newton:
  - bei zwei Massen m, M im Abstand r
    - $F = -\gamma \frac{mM}{r^2}$
  - Gravitationskonstante $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}\ m^3/(kg\ s^2)$
  - potentielle Energie im Gravitationsfeld
    - $V(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$
  - Sichtweise
    - Masse M erzeugt Gravitationsfeld G mit Potential
    - U = V/m
    - Masse m erfährt Kraft F = m G aufgrund des Feldes
    - Situation ist symmetrisch (auch m hat ein Feld...)
- Keplersche Gesetze:
  - von Kepler aus Beobachtung vor allem der Marsbewegung gewonnen
  - beschreiben Bewegung von Körpern (Planeten) im Gravitationsfeld
    - K1: Bahn ist Ellipse, Sonne in einem Brennpunkt

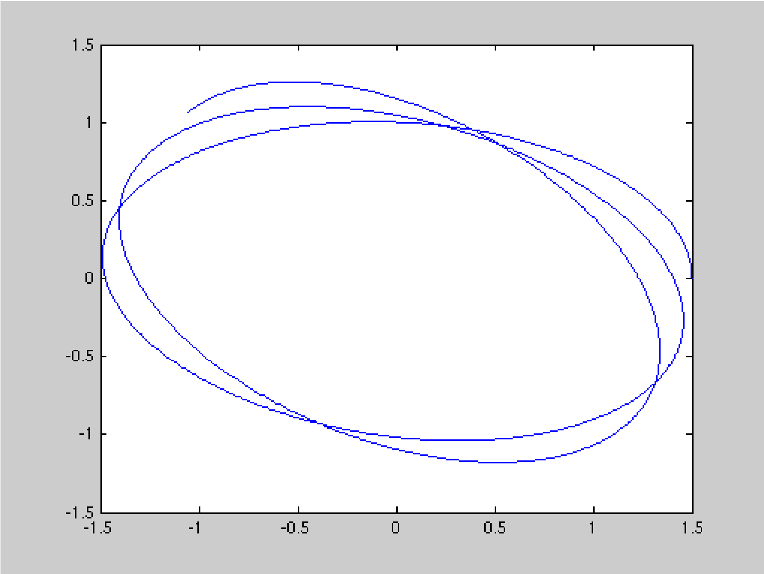


    - K2: Strahl von Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen

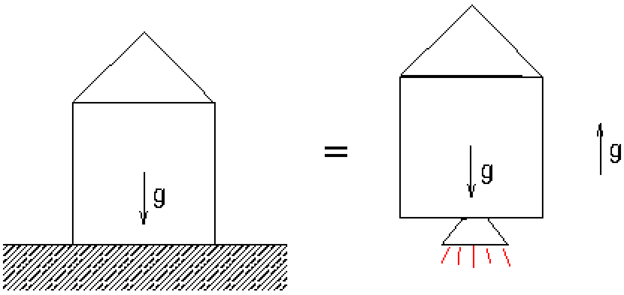


    - K3: Verhältnis von dritter Potenz der großen Halbachse zu Quadrat der Umlaufzeit für alle Planeten gleich
    - $\frac{a^3}{T^2} = \mathrm{const}$
  - von Newton aus Massenanziehungsgesetz hergeleitet
- Ableitung von K3 für Kreisbahnen:
  - auf Kreisbahn Kräftegleichgewicht zwischen Anziehungskraft und Zentrifugalkraft

- $$\frac{mv^2}{r} = \gamma\frac{mM}{r^2}$$
  $$\Rightarrow \quad v^2 = \frac{\gamma M}{r}$$
  - Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit v und Umlaufszeit T
    - $$v = \frac{2\pi r}{T}$$
  - Einsetzen liefert K3 incl. Wert der Konstanten
    - $$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$
  - gilt auch für Ellipsenbahnen mit r = a (große Halbachse)
- Probleme mit Gravitationsfeld:
  - Feld ist statisch ("unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit")
  - verletzt spezielle Relativitätstheorie
  - Gleichheit von schwerer und träger Masse ist Zufall
  - Periheldrehung des Merkur unverstanden

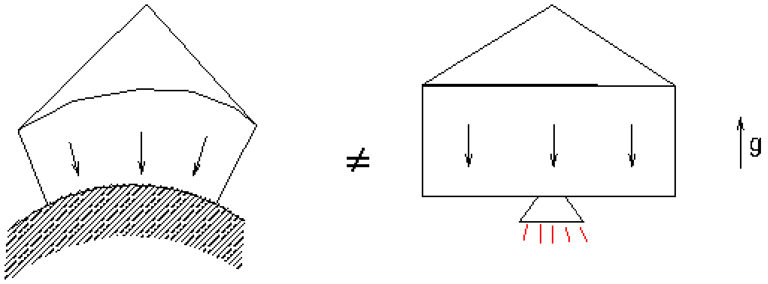


  - Nachfolger: Allgemeine Relativitätstheorie
- Äquivalenzprinzip:
  - Vorgänge in beschleunigten Bezugssystemen und in Gravitationsfeldern sind äquivalent (d.h. durch Messung nicht zu unterscheiden).

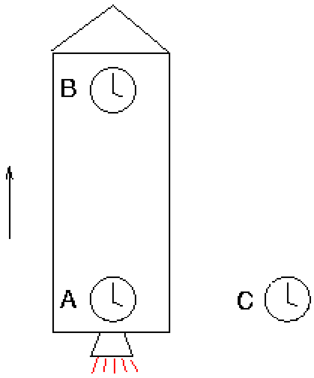


  - Äquivalenz von träger und schwerer Masse klar (besser: in die Theorie eingebaut)
  - in Gravitationsfeldern frei fallende Systeme sind Inertialsysteme

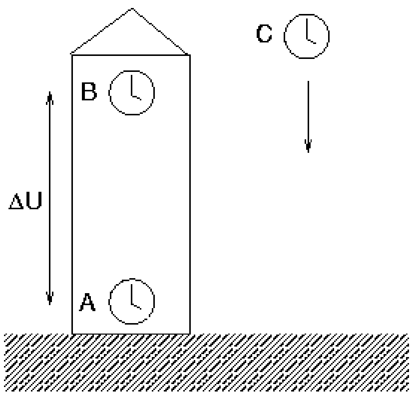
- Äquivalenzprinzip gilt nur lokal (für kleine Abstände)



- Uhren im Gravitationsfeld:
  - System 1
    - zwei Uhren A, B in einem beschleunigten Aufzug
    - fliegen an (ruhender) Uhr C vorbei
    - B kommt mit Geschwindigkeit v_B an C vorbei
    - A kommt mit größerer Geschwindigkeit v_A an C vorbei

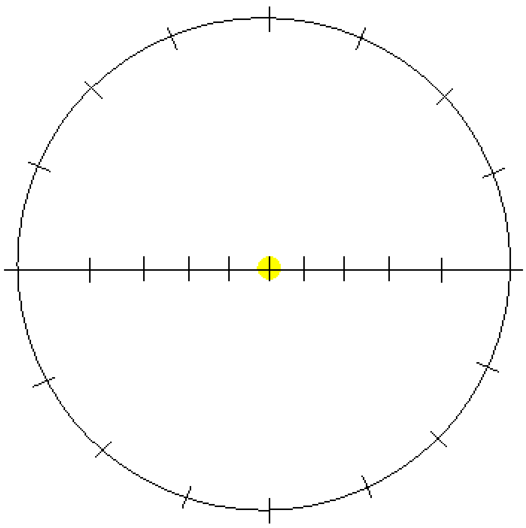


  - Zeitmessungen in T_A, T_B, T_C nach spezieller Relativitätstheorie
    - $$T_B = T_C\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}$$ $$T_A = T_C\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}$$
  - für kleine Geschwindigkeiten gilt näherungsweise durch Entwickeln
    - $$\frac{T_B}{T_A} = \frac{\sqrt{1-\frac{v_B^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{v_A^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{v_a^2 - v_b^2}{2c^2}$$
  - System 2
    - Uhren A und B ruhen in verschiedenen Höhen im Gravitationsfeld
    - Uhr C fällt frei vorbei



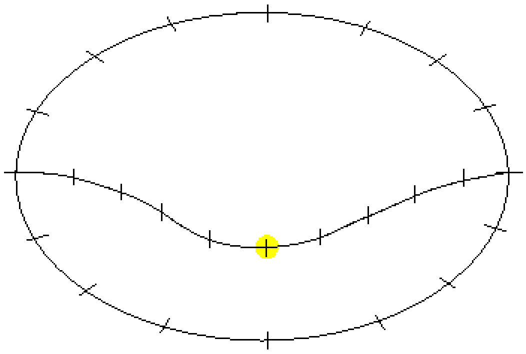
- Fallgeschwindigkeit von C bei A und B aus Energieerhaltung
  - $$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + V(x) &= \text{const.} \\ \Rightarrow \quad \frac{v_A^2 - v_B^2}{2} &= -\frac{V(x_A) - V(x_B)}{m} = -(U(x_B) - U(x_A)) = -\Delta U \end{aligned}$$
- Äquivalenz von System 1 und System 2 →
  - $$\begin{aligned} T_B &= \left(1 + \frac{v_A^2 - v_B^2}{2c^2}\right) T_A \\ &= \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) T_A \end{aligned}$$
- Zeit im stärkeren Gravitationsfeld ("unten") vergeht langsamer

- Längen im Gravitationsfeld:
  - Maßstäbe schrumpfen im Gravitationspotential ΔU gemäß
    - $$L_B = \left(1 - \frac{\Delta U}{c^2}\right) L_A$$
  - etwa bei Ausmessung der Sonnenumgebung



  - Ergebnis
    - Umfang wie immer (Gravitation klein)
    - Durchmesser größer (Maßstäbe sind geschrumpft)
    - → Umfang/Durchmesser kleiner als π

- äquivalente Interpretation
    - Maßstäbe sind (per Definition) gleich lang
    - Geometrie des Raums durch Gravitation verändert
    - Raum ist "gekrümmt" (nichteuklidisch)



- Schwarze Löcher:
  - sehr große Massen in sehr kleinem Volumen
  - unterhalb eines bestimmten Abstands (Schwarzschildradius) Sturz ins Zentrum unausweichlich
  - entstehen (u.a.?) bei Zusammenbruch großer Sterne (Supernovae)
  - Raum und Zeit extrem stark gekrümmt → bizarre unanschauliche Effekte
- Bestimmung des Schwarzschildradius:
  - näherungsweise, nichtrelativistisch
  - Fluchtgeschwindigkeit v_F bei Masse M und Abstand r ⇔ kinetische Energie gerade so groß, um Gravitationsenergie zu überwinden
    - $$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_F^2 &= \gamma \frac{M m}{r} \\ \Rightarrow \quad v_F &= \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} \end{aligned}$$
  - Schwarzschildradius R, wenn $v_F = c$ →
    - $$R = \frac{2\gamma M}{c^2}$$
  - erstaunlicherweise Ergebnis exakt
  - bei fast allen Objekten tatsächlicher Radius r wesentlich größer als R
  - für Sonne etwa 3 km
- Gravitationswellen:
  - bei Bewegung von Massen abgestrahlte Wellen des Gravitationsfeldes
  - abgestrahlte Leistung einer Masse m auf Kreisbahn r mit Kreisfrequenz ω
    - $$P = \frac{\gamma}{c^5} \omega^6 m^2 r^4$$
  - indirekter Nachweis
    - enge Umkreisung zweier Neutronensterne (Doppelpulsar PSR 1913-16)
    - → Energieverlust durch Abstrahlung von Gravitationswellen
    - → Abstand verringert sich
    - → Umlaufzeit nimmt ab
    - Nachweis durch Hulse/Taylor (Physik-Nobelpreis 1993)
  - direkter Nachweis sehr schwierig

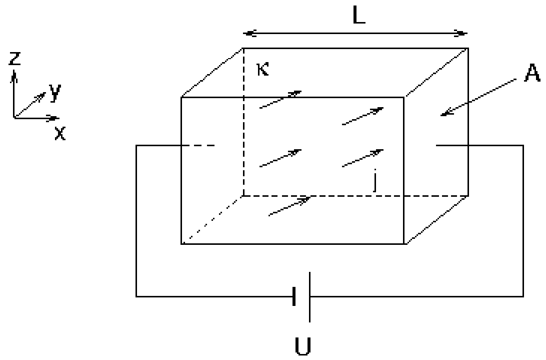
    - Gravitationswelle → Verzerrung der Raum-Zeit-Struktur
    - Abstände von Maßstäben ändern sich
    - relative Längenänderungen im Bereich 10^{-20}
    - entspricht etwa Atomdurchmesser zu Abstand Erde-Sonne
    - Messungen über Laser-Interferometrie in Vorbereitung
- Aufgaben:
  - Aufgabe 10
  - Aufgabe 11
  - Aufgabe 12

Aufgaben

- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12

Aufgabe 7

- Ein homogener, aber anisotroper Festkörper habe die konstante spezifische Leitfähigkeit
  - $$\kappa = \begin{pmatrix} 2.5385 & 0.5500 & 0.2066 \\ 0.5500 & 2.3445 & -0.2462 \\ 0.2066 & -0.2462 & 1.1170 \end{pmatrix} \cdot 10^2 \, \frac{1}{\Omega\mathrm{m}}$$
- Wie groß ist der Strom I, wenn an die Stirnflächen eine Spannung U angelegt wird?



- Werte:
  - L = 12 cm
  - A = 8 cm^2
  - U = 4.5 V
- Lösung

Aufgabe 8

- Der berühmte Erfinder Alfred E. Zweiholz will Energie aus dem Erdmagnetfeld gewinnen. Dazu baut er eine Leiterschleife, die senkrecht zu den Magnetfeldlinien rotiert. Wie groß ist die induzierte Spannung in der Schleife?
- Werte:
  - Fläche der Schleife $A = 1\ m^2$
  - Drehzahl der Schleife $n = 3600$ Upm
  - Erdmagnetfeld $B = 2.8 \cdot 10^{-5}\ T$
- Lösung

Aufgabe 9

- Ein Handy strahle Radiowellen von insgesamt 1 W ab. Wie groß ist die elektrische Feldstärke in 5 cm Entfernung, wenn man eine gleichmäßige (kugelförmige) Abstrahlung der Wellen annimmt?
- Lösung

Aufgabe 10

- Die Umlaufzeit des Jupiters um die Sonne beträgt 11.80 Jahre. Wie groß ist sein Abstand zur Sonne in Astronomischen Einheiten?
- Hinweise:
  - Eine Astronomische Einheit ist der mittlere Abstand der Erde zur Sonne.
  - Vernachlässigen Sie die (kleinen) Exzentritäten von Erd- und Jupiterbahn.
- Lösung

Aufgabe 11

- Im Zentrum der Milchstraße wird ein Schwarzes Loch mit mehreren Millionen Sonnenmassen vermutet. Wie groß wäre sein Radius bei einer Masse von 5 Millionen Sonnenmassen? Geben Sie den Wert auch in Astronomischen Einheiten an.
- Werte:
  - Masse der Sonne $m_S = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg
  - Astronomische Einheit 1 AE = $1.496 \cdot 10^{8}$ km;
- Lösung

Aufgabe 12

- Wie groß ist die Leistung der auf einer Kreisbahn abgestrahlten Gravitationswellen
  1. für die Bewegung der Erde um die Sonne,
  2. für einen Neutronenstern von 1.3 Sonnenmassen, der ein Schwarzes Loch von 5 Sonnenmassen im Abstand von 0.1 AE umkreist?
  3. Wie stark nimmt die Umlaufzeit des Neutronensterns in einem Jahr zu?
  4. Nebenbei: Wie groß ist der Radius des Schwarzen Lochs?
- Hinweis:
  - Nehmen Sie für das Gravitationsfeld näherungsweise ein Newtonsches Potential an und betrachten Sie die Gesamtenergie des Neutronensterns nichtrelativistisch.
- Werte:
  - Masse der Erde $m_E = 5.973 \cdot 10^{24}$ kg
  - Masse der Sonne $m_S = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg
  - Astronomische Einheit 1 AE = $1.496 \cdot 10^{8}$ km
- Lösung

Anhang

- Literatur
- Applets

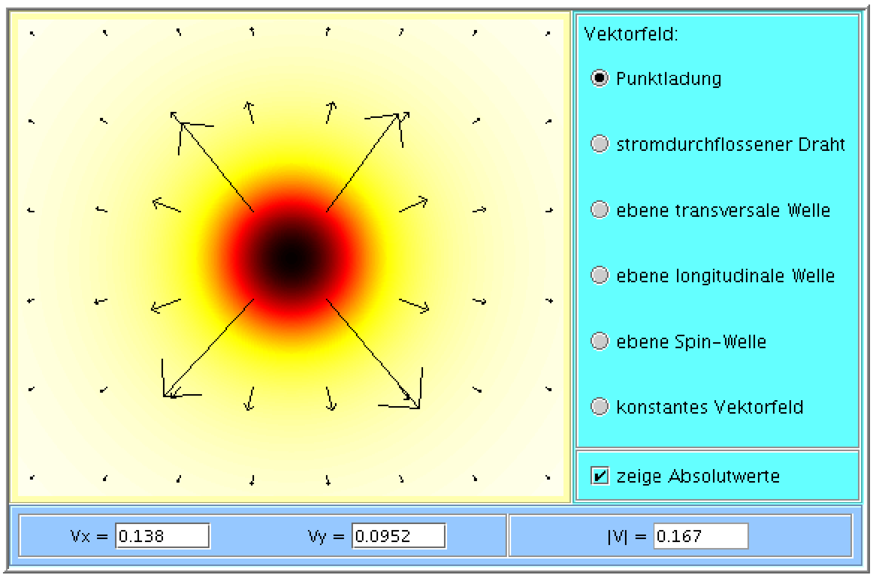
Literatur

1. Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure
   Springer, 7. Aufl. 1999 , ISBN: 3-540-66135-2
2. Stöcker (Hrsg): Taschenbuch der Physik mit Multiplattform-CD-ROM
   Verlag Harri Deutsch, 4. Aufl. 2000, ISBN 3-8171-1628-4
3. Bauer, Benenson, Westfall: cliXX Physik
   Verlag Harri Deutsch, 2. Auflage 1999, ISBN 3-8171-1593-8
4. Halliday, Resnick, Walker: Fundamentals of Physics Extended
   Wiley, 5th Edition 1997, ISBN 0-471-10559-7
5. R.Sexl, H.Sexl: Weiße Zwerge - schwarze Löcher
   rororo 1975, ISBN 3-499-27014-5

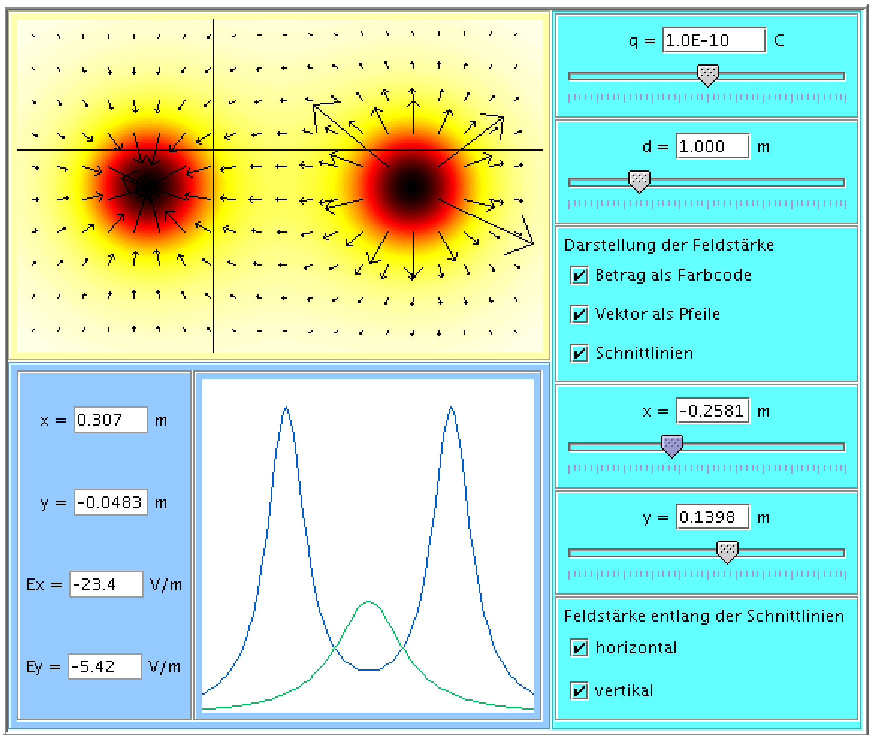
Applets

- Vektorfelder
- Feld eines elektrischen Dipols

Vektorfelder



Feld eines elektrischen Dipols



Lösung von Aufgabe 7

- Feldstärke $\vec{E}$ zeigt nur in x-Richtung, also
  - $$\vec{E} = \begin{pmatrix} 37.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$
- Stromdichte daher
  - $$\vec{j} = \begin{pmatrix} 9519 \\ 2062 \\ 775 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$
- Strom I durch die Querschnittsfläche A kommt nur vom j_x-Anteil, also
  - $I = j_x\, A = 7.615$ A

Lösung von Aufgabe 8

- Die Schleife dreht sich mit
  - $\omega = 2 \pi n = 377.0$ 1/s
- Der Winkel ϕ zwischen der Flächennormalen und dem Magnetfeld ändert sich gemäß
  - $\phi(t) = \omega t$
- Der magnetische Fluss Φ_m beträgt dann
  - $\Phi_m = \vec{B}\vec{A} = BA\cos(\omega t)$
- Die induzierte Spannung ergibt sich aus der Änderung des Flusses zu
  - $$\begin{aligned} U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} &= BA\omega \sin(\omega t) \\ &=: U_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$
- mit
  - $U_0 = 0.0106$ V

Lösung von Aufgabe 9

- Die Energie verteilt sich gleichmäßig auf die Kugeloberfläche, daher
  - $I = \frac{P}{4\pi r^2} = 31.83\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$
- Die Stärke des Magnetfelds in einer elektromagnetischen Welle war
  - $B = \frac{E}{c}$
- also ist die Intensität
  - $I = \frac{1}{2\mu_0} E_0 B_0 = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$
- Die Amplitude der elektrischen Feldstärke beträgt also
  - $E_0 = \sqrt{2\mu_0 c I} = 154.9\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$

Lösung von Aufgabe 10

- Nach dem 3. Keplerschen Gesetz gilt

$$\frac{r_J^3}{T_J^2} = \frac{r_E^3}{T_E^2}$$

  - $\Rightarrow \quad r_J = r_E \left(\frac{T_J}{T_E}\right)^{\frac{2}{3}}$
- Die Umlaufzeit der Erde beträgt bekanntlich 1 Jahr, daher folgt
  - $r_J = 11.80^{\frac{2}{3}} \cdot 1\,\mathrm{AE} = 5.183\,\mathrm{AE}$

Lösung von Aufgabe 11

- Der Radius eines Schwarzen Lochs ist sein Schwarzschildradius. Mit den angegebenen Werten erhält man
  - $R = 14.7 \cdot 10^6$ km = 0.0986 AE

Lösung von Aufgabe 12

1. abgestrahlte Leistung für Erdbahn:
   - Aus der Umlaufzeit von einem Jahr erhält man $\omega = 2\,\pi/T$ und daher als durch Gravitationswellen abgestrahlte Leistung
     - $$P = \frac{\gamma}{c^5}\omega^6 m_E^2 r_E^4 = 30.51\,\mathrm{W}$$
2. abgestrahlte Leistung für Neutronenstern:
   - Für den Neutronenstern bestimmt man zunächst die Umlaufzeit aus dem 3. Keplerschen Gesetz (seine näherungsweise Gültigkeit angenommen) zu
     - $$T = 2\pi\sqrt{\frac{r_N^3}{\gamma M_{Loch}}} = 1267.356493\,\mathrm{s}$$
   - entsprechend einer Bahngeschwindigkeit
     - $v = 2\pi\, r_N/T = 0.50\%\ c$
   - Damit bestimmt man wie in a. die abgestrahlte Leistung zu
     - $P = 2.208 \cdot 10^{28}\ \mathrm{W} \triangleq 2.454 \cdot 10^{11}\ \mathrm{kg/s}$
3. Zunahme der Umlaufzeit:
   - Die potentielle Energie des Gravitationsfelds ist (nichtrelativistisch)
     - $$V(r) = -\gamma\frac{m_N m_{Loch}}{r_N}$$
   - Mit Hilfe der Bahngeschwindigkeit nach 3. Kepler
     - $$v = \frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{\gamma m_{Loch}}{r_N}}$$
   - erhält man die kinetische Energie (ebenfalls nichtrelativistisch)
     - $$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\gamma\frac{m_N m_{Loch}}{r_N}$$
   - Die Gesamtenergie beträgt somit zunächst
     - $$E = E_{kin} + V(r) = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_N m_{Loch}}{r_N} = -2.860\cdot 10^{42}\,\mathrm{J}$$
   - Aufgrund der Gravitationsstrahlung hat das System nach einem Jahr die Energie
     - $\Delta E = P$ 1 Jahr $= 6.971 \cdot 10^{35}$ J
   - verloren, wodurch der Bahnradius abgenommen hat auf (mit ≥ 10 Stellen rechnen!)
     - $$r_{neu} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_N m_{Loch}}{E - \Delta E} = 2.9999992687\cdot 10^8\,\mathrm{m}$$
   - Mit 3. Kepler erhält man die neue Umlaufzeit
     - $T_{neu} = 1267.356030$ s
   - also eine relative Zunahme um $3.65 \cdot 10^{-7}$.
4. Größe des Schwarzen Lochs:
   - Aus der Formel für den Schwarzschildradius erhält man
     - $R_{Loch} = 14.74$ km
   - der Neutronenstern liegt also noch weit außerhalb des Schwarzen Lochs.