Physik 2

- Spezielle Relativitätstheorie
- Grundlagen der Quantentheorie
- Anwendungen der Quantentheorie
- Physik des Atomkerns
- Statistische Mechanik
- Nichtlineare Systeme und Chaos
- Aufgaben
- Anhang

Peter Junglas 16.12.2021

Inhaltsverzeichnis

Übersicht

- Spezielle Relativitätstheorie
  - Einleitung
  - Relativität der Gleichzeitigkeit
  - Zeitdilatation
  - Längen-Kontraktion
  - Vergleich zweier Koordinatensysteme
  - Impuls und Energie
- Grundlagen der Quantentheorie
  - Einleitung
  - Photo-Effekt
  - Compton-Effekt
  - Welle-Teilchen-Dualismus
  - Materiewellen
  - Unschärferelation
- Anwendungen der Quantentheorie
  - Spektrum des Wasserstoffatoms
  - Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms
  - Elektronen im Magnetfeld
  - Aufbau der Elektronenhülle
  - Emission und Absorption von Photonen
  - Laser
- Physik des Atomkerns
  - Kernaufbau
  - Radioaktiver Zerfall
  - Strahlungsarten
  - Kernzerfälle
  - Anwendungen der Kernphysik
- Statistische Mechanik
  - Zustandsgleichung des idealen Gases
  - Temperatur und Energie
  - Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung
  - Entropie und Wahrscheinlichkeit
- Nichtlineare Systeme und Chaos
  - Nichtlineare Systeme
  - Chaotische Systeme
    - Duffing-Oszillator mit äußerer Anregung
    - Phasenraum
    - Poincare-Schnitt
  - Ursachen für Chaos
    - Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
    - Fixpunkte und Attraktoren
    - Seltsame Attraktoren und Fraktale
- Aufgaben
  - Aufgabe 1
    - Lösung von Aufgabe 1
  - Aufgabe 2
    - Lösung von Aufgabe 2
  - Aufgabe 3
    - Lösung von Aufgabe 3
  - Aufgabe 4
    - Lösung von Aufgabe 4
  - Aufgabe 5
    - Lösung von Aufgabe 5
  - Aufgabe 6
    - Lösung von Aufgabe 6

- Aufgabe 7
  - Lösung von Aufgabe 7
- Aufgabe 8
  - Lösung von Aufgabe 8
- Aufgabe 9
  - Lösung von Aufgabe 9
- Aufgabe10
  - Lösung von Aufgabe 10
- Aufgabe 11
  - Lösung von Aufgabe 11
- Aufgabe 12
  - Lösung von Aufgabe 12
- Aufgabe 13
  - Lösung von Aufgabe13
- Aufgabe 14
  - Lösung von Aufgabe 14
- Aufgabe 15
  - Lösung von Aufgabe 15
- Aufgabe 16
  - Lösung von Aufgabe 16
- Aufgabe 17
  - Lösung von Aufgabe 17
- Aufgabe 18
  - Lösung von Aufgabe 18
- Aufgabe 19
  - Lösung von Aufgabe 19
- Aufgabe 20
  - Lösung von Aufgabe 20
- Aufgabe 21
  - Lösung von Aufgabe 21
- Aufgabe 22
  - Lösung von Aufgabe 22
- Aufgabe 23
  - Lösung von Aufgabe 23
- Aufgabe 24
  - Lösung von Aufgabe 24
- Aufgabe 25
  - Lösung von Aufgabe 25
- Aufgabe 26
  - Lösung von Aufgabe 26
- Aufgabe 27
  - Lösung von Aufgabe 27
- Aufgabe 28
  - Lösung von Aufgabe 28
- Aufgabe 29
  - Lösung von Aufgabe 29
- Aufgabe 30
  - Lösung von Aufgabe 30

- Appendix
  - Applets
  - Literatur
  - Nachweise

Spezielle Relativitätstheorie

- Einleitung
- Relativität der Gleichzeitigkeit
- Zeitdilatation
- Längen-Kontraktion
- Vergleich zweier Koordinatensysteme
- Impuls und Energie

Einleitung

- Das rätselhafte Myon:

  instabiles Elementarteilchen

  Halbwertszeit: 2 µs

  ensteht in etwa 10 km Höhe durch Reaktion kosmischer Strahlung mit der Athmosphäre

  hat Anfangsgeschwindigkeit nahe (z.B. 99.9%) bei der Lichtgeschwindigkeit $c \approx 300000$ km/s

  kann an der Erdoberfläche gemessen werden!

- Grundannahmen der speziellen Relativitätstheorie:

  Gesetze der Physik in allen Bezugssystemen gleich, die sich mit konstanter Geschwindigkeit zueinander bewegen (**Inertialsysteme**)

  Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen gleich

- experimentelle Tests:

  Grundexperiment: Michelson-Morley-Interferometer (nutzt Bewegung der Erde)

  Geschwindigkeit von Licht, das von sehr schnellen Teilchen ausgeht

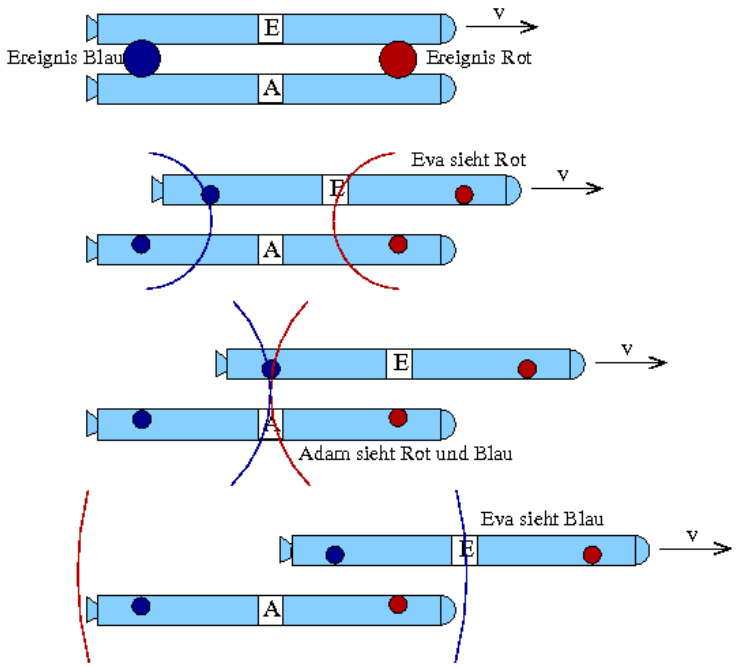
  Folgerungen wie Längenkontraktion oder Zeitdilation vielfach genau überprüft

  Bahnbewegung von GPS-Satelliten

Relativität der Gleichzeitigkeit

- Gedankenexperiment:

  Zwei lange Raketen bewegen sich mit Relativgeschwindigkeit v aneinander vorbei, in der Mitte sitzt jeweils ein Astronaut (Adam und Eva).



  Zwei große Meteoriten schlagen ein und treffen jeweils beide Raumschiffe. Der eine löst einen roten Lichtblitz aus, der andere einen blauen.

  Beobachtungen:
  - zunächst trifft bei Eva ein roter Blitz ein
  - dann kommen bei Adam gleichzeitig ein roter und ein blauer Blitz an
  - schliesslich triff bei Eva ein blauer Blitz ein

  Beide Raumschiffe tragen an beiden Enden Beschädigungen davon. Beide Astronauten messen nach und stellen fest, dass sie jeweils gleichweit von der Mitte entfernt sind.

- Adams Darstellung:

  beide Blitze kamen gleichzeitig an

  beide haben den gleichen Weg zurückgelegt

  also sind beide Meteoriten gleichzeitig eingeschlagen

- Evas Darstellung:

  erst kam der rote Blitz, dann der blaue

  beide haben den gleichen Weg zurückgelegt

  also ist Meteorit "rot" vor Meteorit "blau" eingeschlagen

- Schlussfolgerung:

  Physik hängt nicht vom Bewegungszustand ab ⇒ beide haben recht

  Gleichzeitigkeit von Ereignissen ist relativ, d.h. abhängig vom Bewegungszustand des Betrachters

- herkömmliche Betrachtungsweise:

  Eva fliegt dem roten Blitz entgegen

  also ist seine Geschwindigkeit für sie größer

  also kommt er früher an, obwohl er gleichzeitig mit dem blauen abgeflogen ist

- Wo ist der Haken?

  Geschwindigkeit beider Blitze auch für Eva gleich der Lichtgeschwindigkeit!

  unanschaulich, aber wahr und vielfach bewiesen (s.o.)

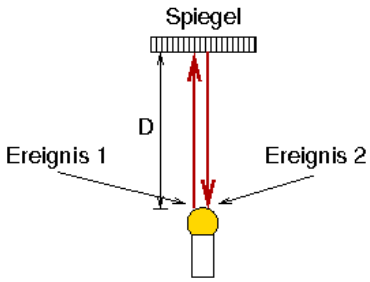
  Unterschiede zur "normalen" Physik im Bereich $(v/c)^2$, also nur bei hohen Geschwindigkeiten oder sehr genauen Messungen zu sehen

Zeitdilatation

- Gedankenexperiment:

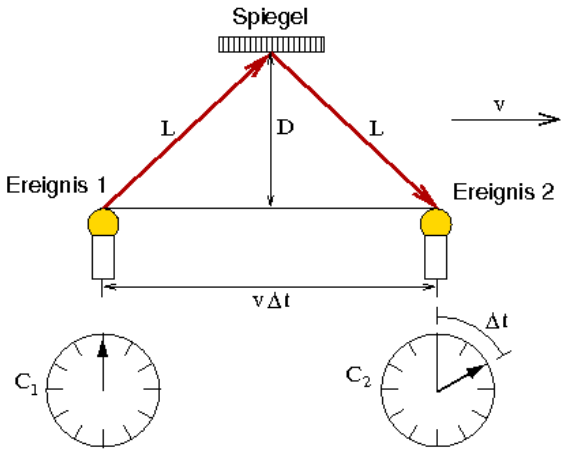
  Adam und Eva fliegen wieder wie eben aneinander vorbei

  Eva macht ein Experiment:



  Sie lässt mit einer Taschenlampe einen Lichtblitz los (Ereignis 1). Dieser fliegt bis zu einem Spiegel im Abstand D, wird reflektiert und kommt wieder bei der Lampe an (Ereignis 2).

  Adam verfolgt das Experiment in seinem Raumschiff. Er hat zwei Uhren C_1 und C_2 aufgebaut, die so stehen, dass Evas Lampe bei Ereignis 1 bzw. Ereignis 2 genau an Uhr 1 bzw. 2 vorbeikommt. Beide Uhren laufen gleich, d.h. beide Sekundenzeiger gehen (für Adam) gleichzeitig durch 0. Für ihn sieht das so aus:



- Evas Messung:

  Eva misst die Zeit Δt_{Eva} zwischen beiden Ereignissen:

  $\Delta t_{Eva} = 2\ D/c$

- Adams Messung:

  Adam misst die Zeit auf C_2, aber er kommt zu einem anderen Ergebnis: Das Licht hat den Diagonalweg der Länge L zurückgelegt:

  $$L = \sqrt{D^2 + (\frac{1}{2} v \Delta t_{Adam})^2}$$

  Da sich das Licht auch für ihn mit c bewegt, misst er die Zeitspanne

  $\Delta t_{Adam} = 2\ L\ /c$

  Auflösen nach $\Delta\ t_{Adam}$ ergibt

  $$\Delta t_{Adam} = 2\sqrt{\frac{D^2}{c^2 - v^2}}$$

  Ersetzen von $D = (c/2)\ \Delta t_{Eva}$ liefert

$$\Delta t_{Adam} = \frac{\Delta t_{Eva}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} =: \gamma \Delta t_{Eva}$$

Wegen v < c gilt immer

$\Delta t_{Adam} \geq \Delta t_{Eva}$

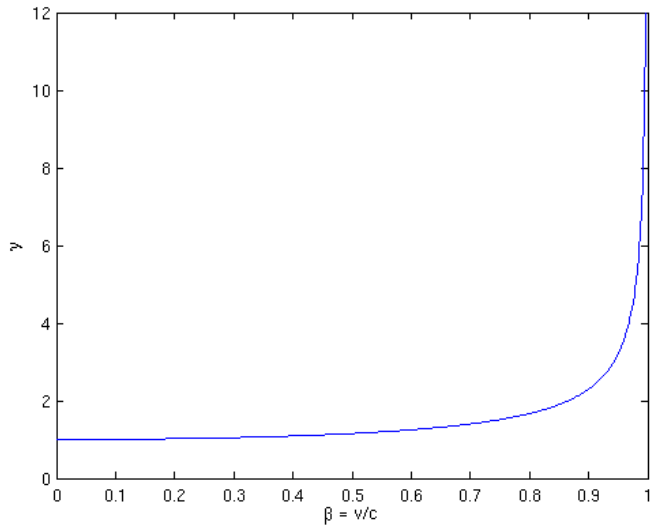
- Schlussfolgerung:

  Die Zeit zwischen zwei Ereignissen ist relativ, d.h. sie hängt ab vom Bewegungszustand des Betrachters.

  Die Zeit in einem System, in dem beide Ereignisse am gleichen Ort stattfinden (wie für Eva), heisst **Eigenzeit**. Sie ist immer kleiner als eine Messung in einem bewegten System.

  Zeit in einem bewegten System geht um den Faktor γ langsamer als die Zeit im Eigensystem (**Zeitdilatation**)

  Effekt wird stärker für v → c:



- Was sagt Eva dazu:

  "Unsinn, meine Zeit ist ganz normal - aber deine beiden Uhren gehen nicht gleich! C_2 geht gegenüber C_1 vor, deshalb zeigt sie zuviel an."

  Adam und Eva haben beide recht - Gleichzeitigkeit ist eben relativ.

- Aufgaben:

  Aufgabe 1

Längen-Kontraktion

- Gedankenexperiment:

  Adam und Eva fliegen wieder wie eben aneinander vorbei

  Adam und Eva messen die Länge von Adams Raumschiff.

  Adam tut dies mit einem Bandmass, kommt auf die Länge L_0 (**Eigenlänge**)

  Außerdem misst er die Zeit Δt_{Adam}, die Eva zum Vorbeifliegen an seinem Raumschiff braucht:

  $v = L_0/\Delta t_{Adam}$

  Eva hält eine Stoppuhr in der Hand und misst die Zeit Δt_{Eva}, die sie zum Vorbeifliegen braucht.

- Evas Messung:

  Sie berechnet die Länge zu

  $L_{Eva} = v\,\Delta t_{Eva}$

  Da t_{Eva} eine Eigenzeit ist (am gleichen Ort gemessen), gilt

  $\Delta t_{Adam} = \gamma\,\Delta t_{Eva}$

  Daher erhält sie:

$$\begin{aligned} L_{Eva} &= \frac{v\Delta t_{Adam}}{\gamma} \\ &= \frac{vL_0}{v\gamma} \\ &= L_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} \end{aligned}$$

- Schlussfolgerung:

  Die Länge eines Gegenstands ist relativ, d.h. sie hängt ab vom Bewegungszustand des Betrachters.

  Ein bewegter Gegenstand ist um den Faktor $\sqrt{1-(v/c)^2}$ verkürzt (**Längenkontraktion**).

- Aufgaben:

  Aufgabe 2

Vergleich zweier Koordinatensysteme

- Lorentz-Transformation:
  - System S' bewege sich gegenüber System S mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung

    beide messen ihre Zeit so, dass bei t = 0 und t'= 0 die Koordinaten-Nullpunkte übereinanderliegen.

    in S Ereignis am Ort (x, y, z) und zur Zeit t

    in S' gleiches Ereignis am Ort (x', y', z') und zur Zeit t'
  - Umrechnungsformel (**Lorentz-Transformation**):

    $x = \gamma (x' + vt')$

    $y = y'$

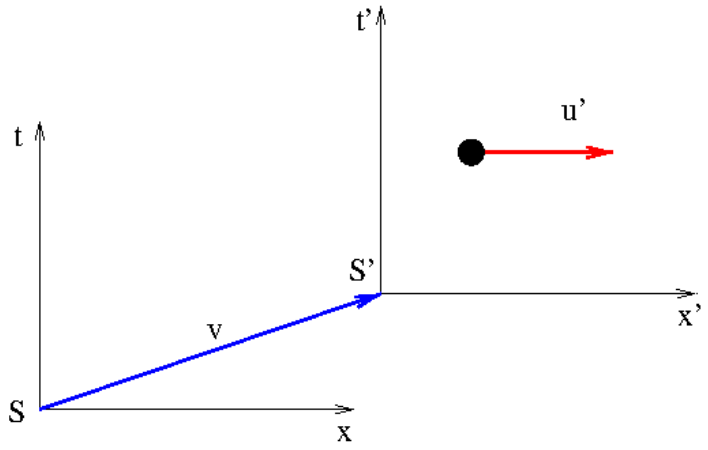
    $z = z'$

    $t = \gamma (t' + vx'/c^2)$

    dabei ist wieder

    $\gamma = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$
  - Auflösen nach x und t (umgekehrte Umrechnung) ⇒ gleiche Formeln mit v → -v
- Addition von Geschwindigkeiten :

  im System S' bewege sich ein Punkt mit der Geschwindigkeit u'



  für kleine Zeiten dt' gilt

  $u' = dx' / dt'$

  Umrechnung auf das System S:

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{dt} \\ &= \frac{\gamma\left(dx' + vdt'\right)}{\gamma\left(dt' + v\frac{dx'}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

  durch dt' kürzen und u' einführen:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

- Konsequenzen:

  Für kleine Geschwindigkeiten kann $u'v/c^2$ vernachlässigt werden, dann ergibt sich als Summe u' + v

  Ist eine Geschwindigkeit c, so auch die Summe

  u' < c und v < c ⇒ Summe < c.

- Aufgaben:

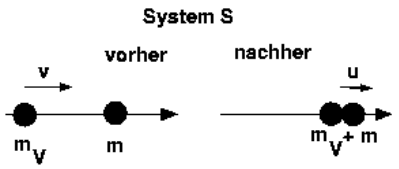
  Aufgabe 3

Impuls und Energie

- nicht-elastischer Stoß:

  zwei Kugeln der Masse m stoßen inelastisch zusammen mit der Relativ-Geschwindigkeit v

  im Ruhesystem S der einen Kugel:

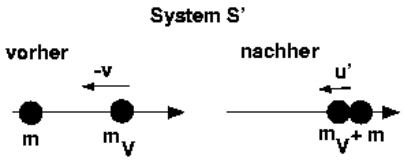


  bezeichnen die Masse der bewegten Kugel mit m_V

  Aus Impulserhaltung vor und nach dem Stoß folgt:

  $m_V\, v = (m_V + m)\, u \qquad (1)$

  im System S', das sich mit v gegenüber S bewegt:



  Aus Symmetriegründen gilt u' = -u

  Im System S erscheint u als die relativistische Summe von v und u' = -u, daher mit der Additionsformel:

  $u = (-u + v) / (1 - uv/c^2)$

  nach u auflösen und in (1) einsetzen →

  $m_V = m / \sqrt{1-(v/c)^2}$

- Schlussfolgerung:

  Ein Körper der Ruhemasse m_0, der sich relativ zum System S mit einer Geschwindigkeit v bewegt, hat in S die Masse

  $m = \gamma\, m_0$

- Impuls und Kraft:

  Wie früher definieren wir den Impuls:

  $p = m\, v = m_0\, \gamma\, v$

  Newton's Gesetz F = m a = m dv/dt gilt nur für feste Masse. Allgemeiner gilt (auch nicht-relativistisch):

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{dp}{dt} \\
&= m_0 \frac{d}{dt}(\gamma v) \\
&= m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\right) \\
&= m_0 \gamma^3 a
\end{aligned}
$$

- Energie:

  Um einen Körper zu beschleunigen, muss gegen die Trägheitskraft Arbeit geleistet werden, die dann als kinetische Energie im Körper gespeichert ist.

relativistische Rechnung:

$$\begin{aligned} dE_{kin} &= F dx = m_0 \frac{dv}{dt} \gamma^3 dx \\ &= m_0 v \gamma^3 dv \\ \Rightarrow \quad E_{kin} &= \int_0^v \frac{m_0 v'}{\left(\sqrt{1-(v'/c)^2}\right)^3} dv' \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0 c^2 \end{aligned}$$

Mit der **Ruheenergie**

$E_0 = m_0 c^2$

erhält man die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_{kin} \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \\ &= mc^2 \end{aligned}$$

Insbesondere gilt: man braucht unendlich viel Energie, um einen Körper auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen.

- Äquivalenz von Masse und Energie:

  Erhöhung der (kinetischen) Energie kann als Erhöhung der (relativistischen) Masse interpretiert werden

  Umgekehrt enthält eine Masse die entsprechende Energie $m c^2$

  Masse kann in Energie umgewandelt werden (partiell z.B. bei Kernfusion, total bei Materie-Antimaterie-Vernichtung).

- Aufgaben:

  Aufgabe 4

  Aufgabe 5

Grundlagen der Quantentheorie

- Einleitung
- Photo-Effekt
- Compton-Effekt
- Welle-Teilchen-Dualismus
- Materiewellen
- Unschärferelation

Einleitung

- Quantenmechanik:
  - grundlegende Theorie der Materie und ihrer Wechselwirkungen
  - vor allem bei kleinen Raumdimensionen (atomar und kleiner) relevant
  - hochgradig merkwürdig und unanschaulich
  - mathematisch sehr anspruchvoll
  - Basis der modernen Physik und all ihrer Anwendungen
- beantwortet Fragen wie:
  - Wie entstehen die chemischen Eigenschaften der Elemente?
  - Wie funktionieren Transistoren?
  - Warum leitet Kupfer elektrischen Strom, Glas aber nicht?
  - Warum leuchten die Sterne?
- hat viele wichtige Anwendungen, z.B.:
  - Laser
  - Halbleiter
  - Tunnelmikroskop
  - Maßschneidern von Molekülen (z.B. neuer Werkstoffe oder Medikamente)

Photo-Effekt

- Vakuum-Fotozelle:

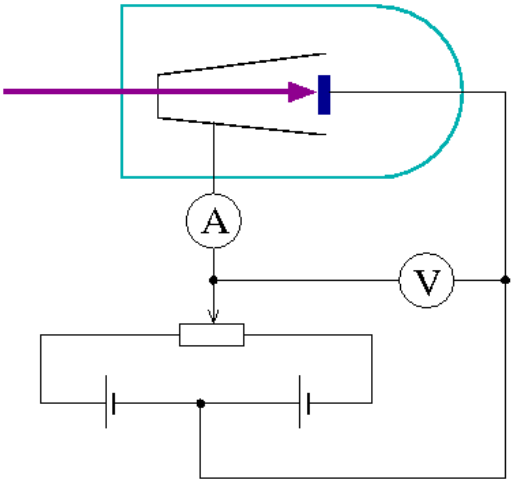
  Metall-Oberfläche (Kathode) im Vakuum wird mit (kurzwelligem) Licht bestrahlt

  Licht löst Elektronen heraus, fliegen zur Anode

  Zwischen Kathode und Anode wird eine veränderbare Spannung angelegt

  Strom der an der Anode ankommenden Elektronen wird gemessen

  im Bild:



- Experiment 1:

  negative Spannung an Anode zum Bremsen der Elektronen

  Spannung U_{stop} messen, bei der der Strom ganz aufhört.

  ergibt kinetische Energie der schnellsten Elektronen:

  $E_{kin} = e\ U_{stop}$

  U_{stop} messen bei Veränderung der Lichtstärke

  Beobachtung: U_{stop} (und damit E_{kin}) hängen nicht von der Licht-Intensität ab

- klassisches Bild:

  Licht = elektromagnetische Welle

  seine Schwingungen führen zu Oszillationen der (in den Atomen gebundenen) Elektronen

  Energieübertrag groß genug → Elektronen lösen sich

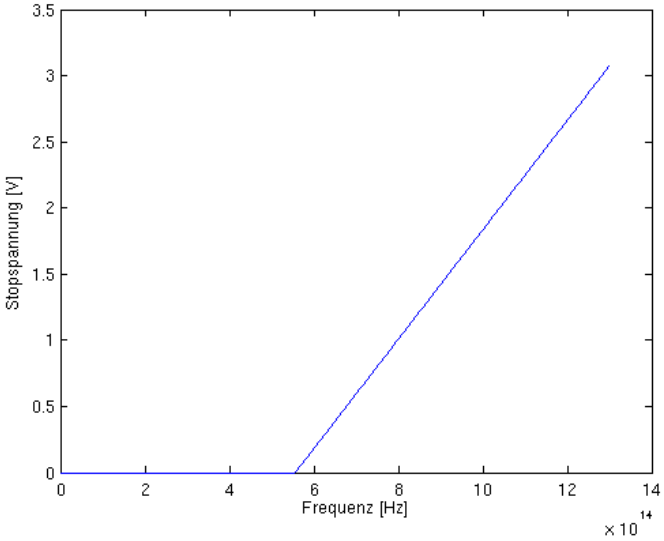
  Energietransfer hängt ab von der Frequenz (Resonanzeffekte) und von der Amplitude der Welle

  Ergebnis von Experiment 1 klassisch nicht zu verstehen

- Experiment 2:

  wie Experiment 1, aber Frequenz des einfallenden Lichts wird geändert

  Ergebnis:



unterhalb einer bestimmten Frequenz werden keine Elektronen herausgelöst, egal, wie stark das eingestrahlte Licht ist.

klassisch nicht zu verstehen: auch wenn Lichtfrequenz weit weg von einer Resonanz, müsste durch hohe Amplitude eine Herauslösung erreicht werden.

- Deutung im Photonenbild:
  - Grundannahme: Licht besteht aus kleinen Klümpchen von Energie (**Photonen**) mit Energie E_{photon} proportional zur Frequenz f:

    $E_{photon} = h\,f$

    mit

    $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js (**Plancksches Wirkungsquant**)
  - mit Beziehung zwischen Frequenz und Wellenlänge $f\,\lambda = c$:

    $E_{Photon} = h\,c / \lambda$
  - ein Elektron immer durch ein einzelnes Photon herausgelöst

    dazu bestimmte Energie W_A (**Austrittsarbeit**) nötig

    kinetische Energie eines Elektrons dann:

    $E_{kin} = h\,f - W_A$
- Erklärung von Experiment 1:

  Erhöhung der Lichtintensität
  → Erhöhung der Anzahl der Photonen
  → mehr Elektronen werden herausgeschlagen

  Energie eines einzelnen Photons und damit kinetische Energie der Elektronen ändert sich nicht
- Erklärung von Experiment 2:

  Frequenz des Lichts zu niedrig
  → Energie der Photonen reicht nicht,
  → Elektronen bleiben gebunden

  Erhöhung der Intensität nützt nichts: nicht mehr Photonen, sondern energiereichere sind nötig.
- Aufgaben:

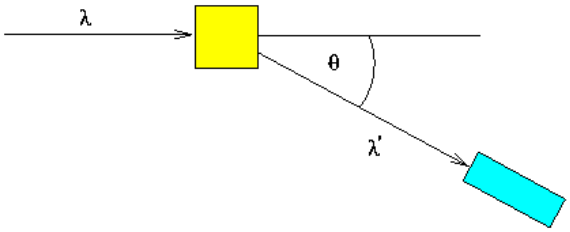
  Aufgabe 6

  Aufgabe 7

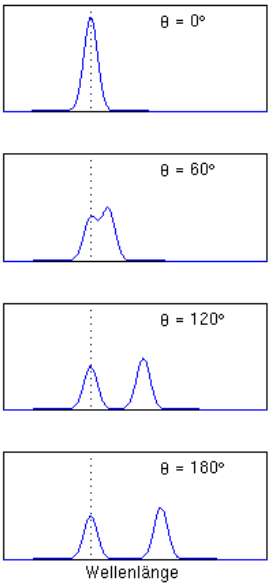
Compton-Effekt

- Experiment von Compton:

  Röntgenstrahlung der Wellenlänge λ wird auf einen Graphitblock geschickt und dort gestreut. Die in verschiedene Richtung ausgesandte Strahlung wird gemessen:



  Ergebnis: Man beobachtet in verschiedenen Richtungen einen Anteil gestreuter Strahlung mit geänderter Wellenlänge:



- klassisch nicht interpretierbar:

  einfallende Welle regt die Elektronen zu Schwingungen an

  senden dadurch Streustrahlung ab

  alle Schwingungen haben die gleiche Frequenz

  keine Wellenlängenänderung möglich

- Impuls eines Photons:

  Photon hat keine Ruhemasse (v = c), aber Masse aufgrund der Masse-Energie-Äquivalenz:

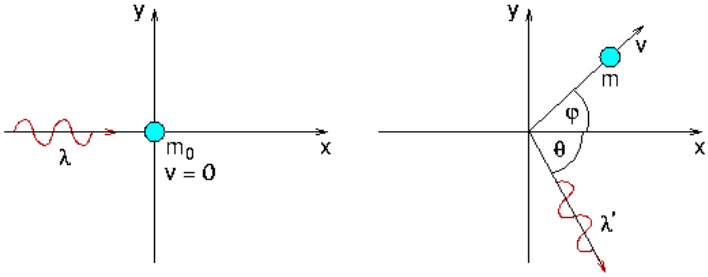
  $m_{ph} = E / c^2 = h f / c^2$

  Damit Impuls als Masse * Geschwindigkeit:

  $p_{Ph} = h f / c = h / \lambda$

- Deutung der Compton-Streuung als Stoß Photon-Elektron:
  - Elektron näherungsweise freies ruhendes Teilchen (im Graphit nur sehr schwach gebunden)

  einfallendes Photon "stößt" gegen das Elektron:



- Energiebilanz vorher - nachher:

  $h f + m_0 c^2 = h f' + m c^2$

  $m = \gamma m_0$: relativistische Masse des bewegten Elektrons

- Impulsbilanz in x-Richtung:

  $$\frac{hf}{c} = \frac{hf'}{c}\cos\theta + mv\cos\varphi$$

  Impulsbilanz in y-Richtung:

  $$0 = -\frac{hf'}{c}\sin\theta + mv\sin\varphi$$

- Daraus Verschiebung der Wellenlänge mit dem Streuwinkel:

  $$\Delta\lambda := \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

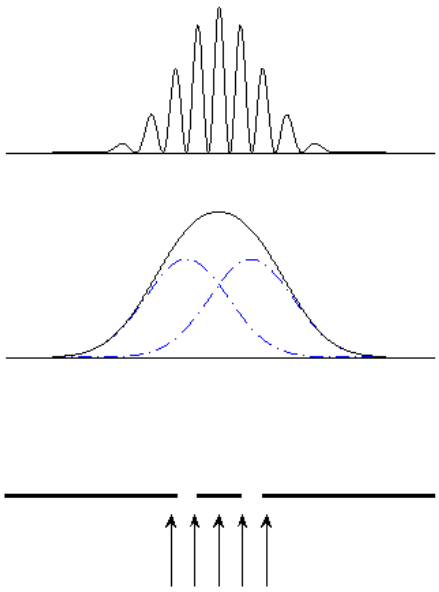
- Aufgaben:

  Aufgabe 8

Welle-Teilchen-Dualismus

- Licht als Welle:

  Doppelspaltexperiment zeigt Interferenzmuster



  ein Spalt abgedeckt → Bild ist mit Teilchenvorstellung verträglich ("Schrotschuss-Muster")

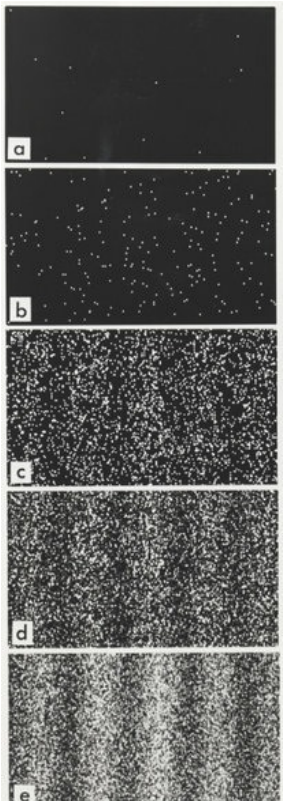
  beide Spalte offen: Teilchen ergäben Überlagerung, aber keine Interferenz

- Doppelspalt-Experiment mit Einzelphotonen:

  gleicher Versuchsaufbau, aber ganz schwache Lichtquelle, emittiert etwa ein Photon alle Sekunden

  Messung am Schirm: Viele sehr empfindliche Detektoren, zeigen jeweils das Auftreffen eines einzelnen Photons

  Ergebnis: Photonen kommen scheinbar zufällig an den verschiedenen Detektoren an, Häufigkeitsverteilung im Laufe der Zeit:



ein Spalt abgedeckt → "Schrotschuss-Muster", keine Interferenz

klassisch nicht verstehbar: Woher weiß das Photon, ob der andere Spalt auf oder zu ist?

- Interpretation als Wahrscheinlichkeitswelle:

  Licht ist weder (klassische) Welle noch (klassischer) Teilchenstrom

  Licht quantenmechanisch beschrieben durch eine **Wellenfunktion** $\Psi(x,t)$ = Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Photon anzutreffen

  bei der Ausbreitung: Wellencharakter, Interferenz

  bei der Wechselwirkung (mit einzelnen Elektronen oder im Detektor): einzelnes Photon mit bestimmter Wahrscheinlichkeit

  statistische Interpretation: Ort, an dem ein einzelnes Photon ankommt, ist nicht vorhersagbar, nur Wahrscheinlichkeit

  bei sehr vielen Photonen: im Mittel ist alles wie bei einer klassischen Welle

Materiewellen

- Grundidee:

  auch Elektronen (und alle anderen Teilchen) haben Teilchen- und Wellencharakter

  analog zum Photon gilt

  $p = h / \lambda$

  daraus Wellenlänge der Materiewelle (**deBroglie-Wellenlänge**)

  $\lambda = h / p = h / (m_0 \gamma v)$

- Experimenteller Nachweis:

  Elektronenstreuung an Kristallen: liefert Beugungsmuster wie bei Röntgenstrahlung

  Doppelspalt-Experimente, sogar mit Einzelelektronen: alles wie beim Photon

  Elektronen-Mikroskop:
  - Linseneffekte durch Magnetfelder
  - Auflösung viel besser als beim Lichtmikroskop wegen kleiner Wellenlänge

- Wellenfunktion Ψ:

  Maß für die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron anzutreffen

  statistische Interpretation

  wird durch Schrödingergleichung beschrieben; für Teilchen der Masse m im Potential V:

  $$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right)\Psi(\mathbf{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\mathbf{r},t)$$

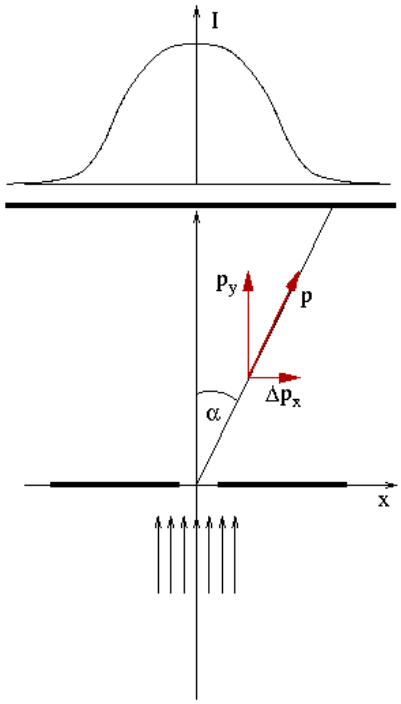
  mit $\hbar := h/(2\pi)$

- Aufgaben:

  Aufgabe 9

Unschärferelation

- Heisenbergsche Unschärferelation:
  - betrachten Beugung von Elektronenstrahl am Spalt der Breite b:



  - Verbreiterung des Bildes durch Beugung gegeben durch

    $\sin \alpha = \lambda/b = \lambda/\Delta x$

    mit Ortsungenauigkeit Δx in der Spaltebene
  - Beugungswinkel bewirkt zusätzliche Impulskomponente Δp_x mit

    $\sin \alpha = \Delta p_x / p = \Delta p_x / (h / \lambda)$

    Gleichsetzen liefert

    $\Delta x \, \Delta p_x = h$
  - Berücksichtigung höherer Beugungsmuster

    $\Delta x \, \Delta p_x \geq h$

    genaue Rechnung liefert

    $\Delta x \, \Delta p_x \geq h/(4\pi) = \hbar/2$

- Unschärfe aus der Wellenfunktion:

  statistische Interpretation liefert Mittelwerte und Schwankungen

  Unschärferelation, über Schwankungen von p und x ausgedrückt, gilt für beliebige Wellenfunktionen

- Beispiel Elektronen im H-Atom:

  "Radius" des H-Atoms ≙ Ortsunschärfe $\Delta x \approx 0.05$ nm

  damit Impulsunschärfe:

  $\Delta p \approx h/(4\pi \, \Delta x) \approx 1.06 \cdot 10^{-24}$ kg m/s

  damit Geschwindigkeitsunschärfe (nichtrelativistisch gerechnet):

  $\Delta v = \Delta p / m \approx 1.16 \cdot 10^{6}$ m/s ≙ 0.39% c

- Konsequenzen der Orts-Impuls-Unschärfe

Elektronen haben keine Bahnkurven

keine kleinen Kanonenkugeln, eher "verschmierte Ladungswolken" (Orbitalmodell der Chemie) passend zur Wahrscheinlichkeitsverteilung

trotzdem: bei Messungen ist ein Elektron eine "unteilbare" Einheit

- allgemeine Unschärferelation:

  Quantenmechanik zeigt, welche Größen sich gleichzeitig genau messen lassen

  bestimmt Unschärferelationen für beliebige Paare von Messgrößen

- Aufgaben:

  Aufgabe 10

Anwendungen der Quantentheorie

- Spektrum des Wasserstoffatoms
- Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms
- Elektronen im Magnetfeld
- Aufbau der Elektronenhülle
- Emission und Absorption von Photonen
- Laser

Spektrum des Wasserstoffatoms

- Spektroskopie:

  Untersuchung der Frequenzverteilung von Lichtquellen

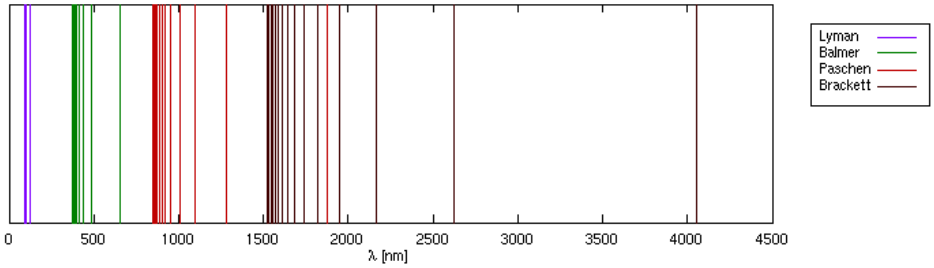
  Emissionsspektrum: Licht, das von einer angeregten Quelle ausgeht

  Absorptionsspektrum: Licht, das beim Durchgang durch eine Probe verändert wurde

  liefert Aufschluss über die Zusammensetzung des Strahlers bzw. der Probe:
  - analytische Chemie
  - Zusammensetzung der Sterne
  - Atom- und Molekülphysik

- Emissionsspektrum des Wasserstoffatoms:

  Beobachtung: Spektrum besteht aus vielen Linien, d.h. Licht fester Frequenz:



  empirische Beziehung für die Frequenzen:

$$f \sim \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2}$$

  für ganze Zahlen n < n'

- klassisch unverständlich:

  jede beliebige Bahn bzw. Energie möglich

  Elektronen auf Kreisbahnen strahlen ab → stürzen in den Kern

- Grundidee des Bohrschen Atommodells (unhistorisch!):

  Elektron als Materiewelle mit der deBroglie-Wellenlänge $\lambda = h/p$

  Materiewelle ist stehende Welle → nur bestimmte Energien erlaubt

  Bahnumfang ist ein Vielfaches der Wellenlänge:

  $2 \pi r = n \lambda = n h / p = n h / (m v)$ für n = 1, 2, 3, ...

  ergibt mögliche Energien ("Niveaus")

  $E = - (e^4 m)/(8 \varepsilon_0^2 h^2) \, 1/n^2 = -13.6 \text{ eV } 1/n^2 =: E_0 \, 1/n^2$

  für höhere Kernladungen Z erhält man entsprechend

  $E = Z^2 E_0 \, 1/n^2$

  wesentliche Elemente fehlen im Modell (vor allem Unschärferelation)

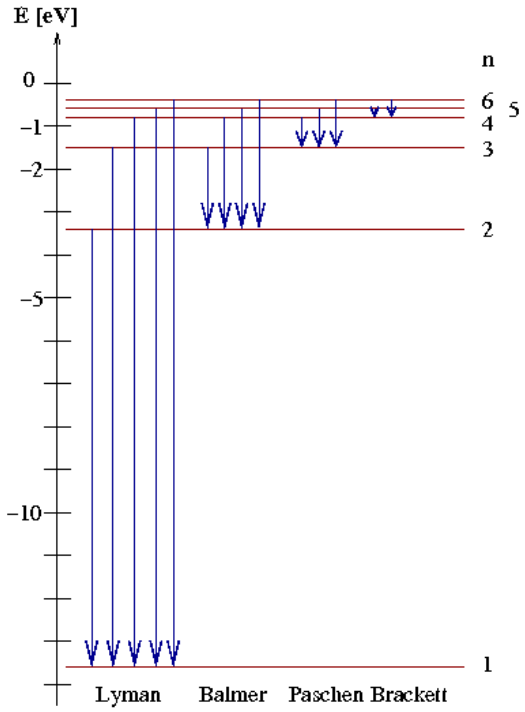
- Interpretation des Wasserstoff-Spektrums:
  - Elektronen können von höheren in niedrigere Energieniveaus übergehen

    strahlen Differenzenergie als Photon ab
  - damit mögliche Linien im Spektrum bei:

    $E = h f = -13.6 \text{ eV} (1/n'^2 - 1/n^2)$

in Übereinstimmung mit dem Experiment

- im Bild:



- Aufgaben:

  Aufgabe 11

  Aufgabe 12

Wellenfunktionen des Wasserstoffatoms

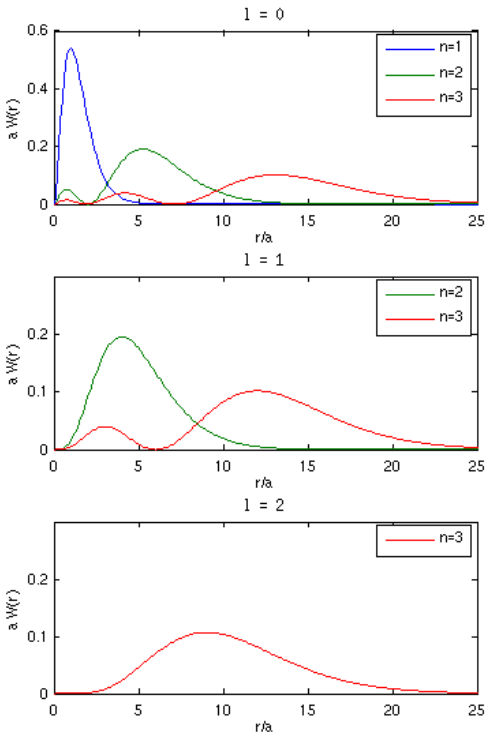
- Lösung der Schrödingergleichung:

  ergibt gleiche Energieniveaus wie Bohrmodell

  liefert genaue Wellenfunktionen für alle Zustände

  erweitert Bohrmodell durch Bahn-Drehimpuls

  Beispiel: Wahrscheinlichkeit, das Elektron im Abstand r vom Kern zu finden, für Grundzustand und zwei angeregte Zustände:



  mit dem Bohrschen Radius a = 0.529 · 10^{-10} m

- Bahn-Drehimpuls im Wasserstoff-Atom:

  klassisch:
  - beschreibt verschieden gestauchte Ellipsen
  - Vektor $\vec{L}$ = (L_x, L_y, L_z)
  - senkrecht zur Bahn

  quantenmechanisch:
  - Komponenten lassen sich nicht gleichzeitig messen
  - nur Länge des Vektors und eine Komponente
  - zur Beschreibung am besten: $\vec{L}^2$ und L_z (willkürlich)

  ähnlich wie bei der Energie nur bestimmte Werte des Drehimpulses möglich:
  - $\vec{L}^2 = \hbar^2\, l\,(l+1)$
  - mit l = 0, 1, .. n-1 für Energieniveau n

  Für festen Wert l des Gesamtdrehimpulses nur bestimmte Werte für Komponente L_z:
  - $L_z = \hbar\, m$
  - mit m = -l, -l+1, .., 0, 1, .. l

- Zustände des H-Atoms charakterisiert durch:

  Hauptquantenzahl n

Hauptquantenzahl n

- Werte: n = 1, 2, 3, ...
- legt die Energie des Niveaus fest
- $E = E_0 \cdot 1/n^2$
- Grundzustandsenergie E_0 = -13.6 eV

Bahndrehimpuls-Quantenzahl l

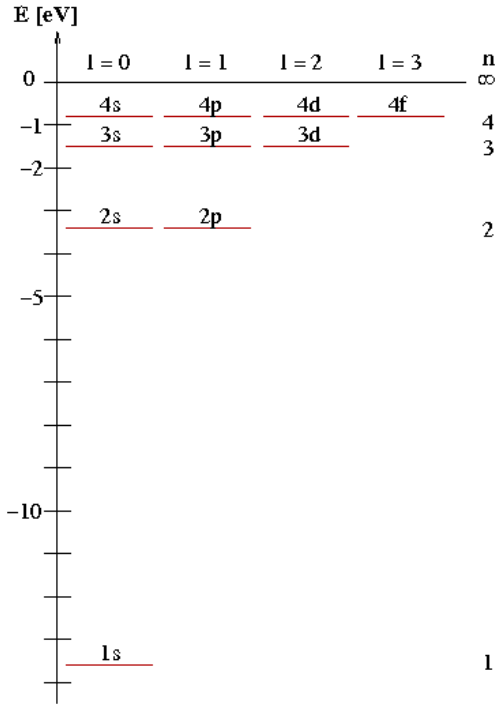
- Werte für gegebenes n: l = 0, 1, .. n-1
- n mögliche Werte für Hauptquantenzahl n
- historische Bezeichnung: s, p, d, f, .. für l = 0, 1, 2, 3, ..

magnetische Quantenzahl m

- Werte für gegebenes l: -l, -l+1, .., 0, .. l
- 2l+1 mögliche Werte für gegebenes l

insgesamt n^2 Zustände gleicher Energie E_n (**Entartung**)

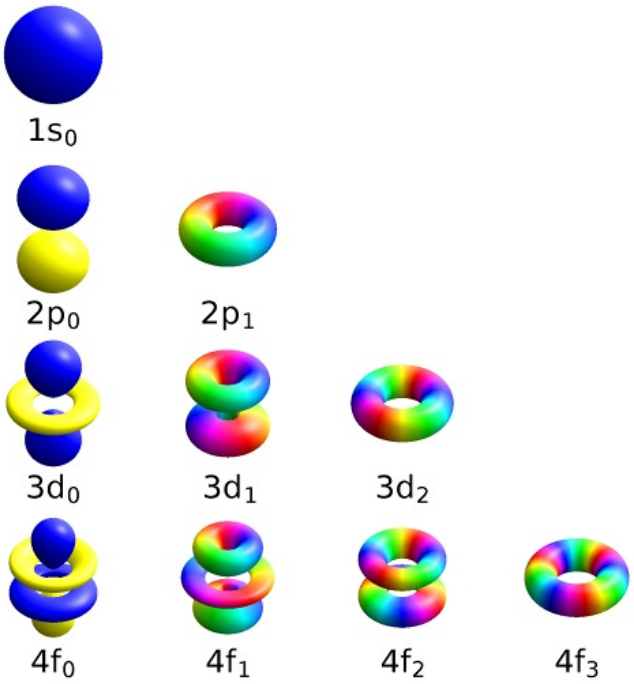
Beispiele:



- Wellenfunktionen für l ≠ 0:

  von Winkeln abhängig (nicht kugelförmig)

  einige Beispiele:


$1s_0$
$2p_0$
$2p_1$
$3d_0$
$3d_1$
$3d_2$
$4f_0$
$4f_1$
$4f_2$
$4f_3$

Elektronen im Magnetfeld

- H-Atom im Magnetfeld:

  Wechselwirkung des Drehmoments des Elektrons mit dem Magnetfeld

  entartete Niveaus haben nun leicht unterschiedliche Energien (Zeeman-Effekt)

  Spektrum liefert damit experimentellen Nachweis der Drehimpuls-Quantenzahlen

  zusätzlich weitere Aufspaltung in zwei "unerwartete" Zustände (Spin-Niveaus)

- Elektronen-Spin:

  entspricht der "Eigenrotation" (**Spin**) des Elektrons

  zugehöriger Drehimpuls $\vec{S}$ hat die Werte

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= \hbar^2 s(s+1), & s &= \frac{1}{2} \\ S_z &= \hbar m_s, & m_s &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

  keine "Drehung einer Kugel" (sonst nur ganzzahlige Werte für s möglich)

  damit Verdopplung der Niveaus des Wasserstoff-Atoms, werden beschrieben durch n, l, m, m_s

  auch andere Teilchen haben Spin, sogar Gruppen von Teilchen wie ein großer Atomkern

- Anwendung Kernspin-Tomographie:

  Patient liegt in einem starken Magnetfeld

  → unterschiedliche Energie der Kernspin-Niveaus

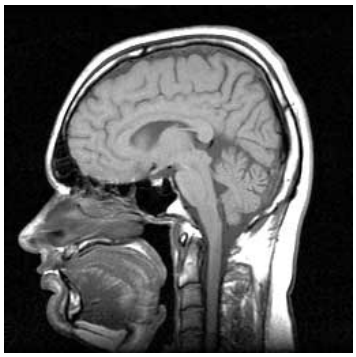
  Energie-Unterschiede liegen im Radiobereich

  eingestrahlte Radiowellen klappen bei geeigneter Frequenz Kernspins um → Radiowellen werden absorbiert

  Resonanzfrequenzen hängen von der Kern-Umgebung ab → Aussagen über chemische Zusammensetzung

  hohe Ortsauflösung durch ortsabhängiges äußeres Magnetfeld

  Beispielbild:



- Aufgaben:

  Aufgabe 13

  Aufgabe 14

Aufbau der Elektronenhülle

- Mehrelektronenatom:

  zusätzlich: Abstoßung der Elektronen untereinander

  komplizierte Gleichungen

  langwierige Näherungsrechnungen oder schwierige Computersimulationen

- Grobe Näherung:

  Elektronen bewegen sich im Potential des Kerns

  Abstoßung untereinander wird vernachlässigt

  damit Niveaus des H-Atoms (bei anderem Z)

  erklärt viele Eigenschaften des Periodensystems der Elemente

- Pauli-Prinzip:

  zwei Elektronen dürfen nicht identische Quantenzahlen haben

  fundamentales physikalisches Prinzip

  Erklärung erst mit tiefliegenden mathematischen Methoden

- Bedeutung für das Atom:

  Elektronen verteilen sich auf verschiedene Niveaus

  füllen Niveaus "von unten" auf, d.h. beginnen bei niedriger Energie

  Faustregel: bei gleicher Energie erst die Niveaus mit niedrigerem l (Bahndrehimpuls)

- Beispiel Neon:

  10 Elektronen

  Hauptquantenzahl n = 1:
  - $l = 0$, $m = 0$, $m_s = \pm 1/2$
  - 2 verschiedene Zustände
  - Platz für 2 Elektronen
  - Schreibweise: $1s^2$ (2 Elektronen in 1s-Niveaus)

  Hauptquantenzahl n = 2:
  - $l = 0 \rightarrow$ 2 Zustände 2s
  - beide besetzt: $2s^2$
  - $l = 1 \rightarrow$ 6 Zustände 2p (drei Werte m, jeweils 2 Werte m_s)
  - alle 6 besetzt: $2p^6$

  Termschema (Besetzungszahlen der Niveaus) insgesamt:
  - $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$

  alle Schalen komplett besetzt

  chemisch inaktiv (Edelgas)

- Beispiel Natrium:

  11 Elektronen

  Termschema: $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s$

  einzelnes Elektron auf äußerster Schale

  wird leicht bei Reaktionen abgegeben (Alkalimetall)

- Periodensystem der Elemente:

  tabellenartige Zusammenstellung der chemischen Elemente

Gruppe →	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	
	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	VIII B	VIII B	VIII B	I B	II B	III A	IV A	V A	VI A	VII A	VIII A	
↓ Periode																			Schale ↓
1	1 H																	2 He	K
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	L
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	M
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr	N
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe	O
6	55 Cs	56 Ba	*	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn	P
7	87 Fr	88 Ra	**	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Ds	111 Rg	112 Uub	113 Uut	114 Uuq	115 Uup	116 Uuh	117 Uus	118 Uuo	Q
			↓																
* Lanthanoide			57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu		
** Actinoide			89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr		

  in Spalten Elemente mit ähnlichen chemischen Eigenschaften

  rein empirisch gefunden

  Erklärung: Elemente einer Spalte → gleiche Elektronenkonfiguration der äußeren Schale

  Auswirkung der Elektronenabstoßung:
  - bei schwereren Elementen Systematik durchbrochen
  - Energieniveaus anders als beim H-Atom

- Aufgaben:

  Aufgabe 15

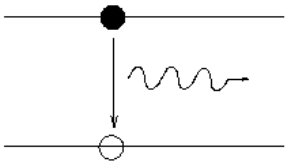
Emission und Absorption von Photonen

- Angeregter Zustand:

  Elektron in höherem Energieniveau als im Termschema vorgegeben

  sollte stabil sein (zumindest im H-Atom)

  geht unter Aussendung eines Photons in Grundzustand über (**spontane Emission**)



  Energie des Photons durch Energiedifferenz der Niveaus gegeben

  $\Delta E = E_{ph} = h\,f$

  typische Zeit bis zur Emission

  $t \approx 10^{-8}$ s

  Erklärung der spontanen Emission in Quantenfeldtheorie

  Ursache der (hellen) Spektrallinien

- Metastabile Zustände:

  Photonen haben Eigen-Drehimpuls s = 1

  daher bei Emission eines Atoms normalerweise $\Delta l = \pm 1$

  Übergang von 2s → 1s so nicht möglich ($\Delta l = 0$!)

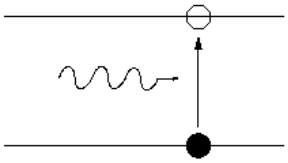
  2s → 1s geschieht über Aussendung von Photonen mit zusätzlichem Bahndrehimpuls (**Multipolstrahlung**)

  unwahrscheinlich, d.h. lange Lebensdauer

  $t \approx 10^{-3}$ s

- Absorption:

  Elektron nimmt Photon passender Frequenz auf und geht in angeregten Zustand



  Umkehrung der Emission

  Frequenz des Photons muss passen

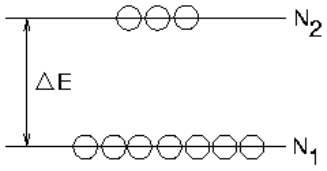
  Ursache der dunklen Linien im Sonnenspektrum (Frauenhofersche Linien)

- Besetzungszahl:

  betrachten zwei Energieniveaus E_1, E_2, Energiedifferenz $\Delta E = E_2 - E_1$

  bei Temperatur T Stöße zwischen Teilchen → einige sind angeregt

  N_1 bzw. N_2 Zahl der Teilchen im Niveau E_1 bzw. E_2



im thermischen Gleichgewicht gilt (Boltzmann-Verteilung):

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$$

mit $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K.

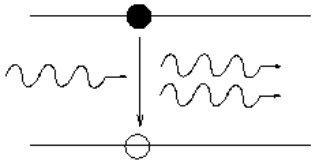
Laser

- Induzierte Emission:

  Elektron im angeregten Zustand $E_2 > E_1$

  von Photon der Frequenz $hf = E_2 - E_1$ getroffen

  geht unter Abstrahlung eines gleichen Photons in Grundzustand über

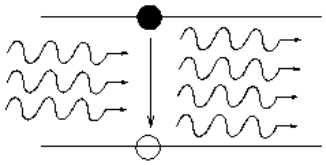


  Photonen haben gleiche Frequenz und gleiche Phase

  Laserlicht: Licht aus solch gleichartigen Photonen

- Wiederholte induzierte Emission:

  Prozess kann beliebig oft iteriert werden



  Problem: Zahl der angeregten Teilchen klein (Boltzmann-Verteilung)

  auch bei hohen Temperaturen: $N_1 > N_2$

  Wahrscheinlichkeit p gleich für induzierte Emission und Absorption

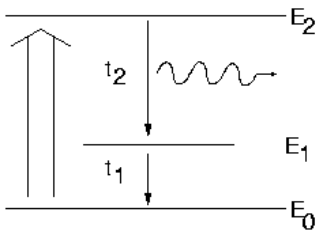
  Einstrahlung von Photonen der Energie ΔE →
  - $p\ N_1$ Photonen absorbiert
  - $p\ N_2$ Photonen erzeugt durch induzierte Emission
  - Nettoeffekt: mehr Teilchen absorbiert als erzeugt
  - kein Laserlicht erzeugt

- Besetzungsinversion:

  System mit $N_2 > N_1$

  im thermodynamischen Gleichgewicht nicht möglich

  Grundidee: drei Zustände, der obere metastabil ($t_2 >> t_1$)

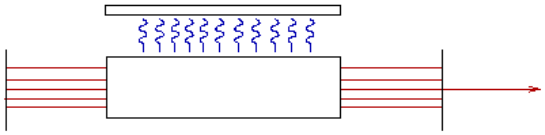


  Energiezufuhr bevölkert E_2 ("Pumpen")

  Zustand E_1 zerfällt schnell → Inversion

- Grundaufbau eines Lasers:

  Schema



aktives Material mit den nötigen Energieveaus

Lampe pumpt Energie ins System → Inversion

Spiegel führen Laserlicht mehrfach durchs Material

halbdurchlässiger Spiegel lässt Laserlicht genügender Stärke austreten

- Eigenschaften von Laserlicht:

  monochromatisch, typische Breite der Frequenzverteilung:

Lichtquelle	**Δf/f**
Sonnenlicht	kontinuierlich
Glühbirne	kontinuierlich
Halogenlampe	10^{-6}
Laser	10^{-10}
Laser, frequenzstabilisiert	10^{-15}

  phasen-kohärent, typische Kohärenzlängen:

Lichtquelle	**Kohärenzlänge**
Sonnenlicht	2 µm
Spektrallampe	20 cm
HeNe-Laser	2 km

  geringe Divergenz (vgl. Aufgabe 17)

  sehr hoch fokussierbar

  - Energiedichten bis zu 10^{17} W/cm^2 (auf sehr kleiner Fläche)
  - Energiedichte einer Schweißbrennerflamme: 10^3 W/cm^2

- Lasertypen:

  Festkörperlaser
  - aktives Material z.B. Rubin
  - Pumpen durch starke Lichtblitze
  - starker, aber kurzzeitiger Strahl

  Gaslaser
  - aktives Material z.B. He-Ne-Gemisch
  - Pumpen durch Gasstöße bei der Gasentladung
  - andauernde Strahlen
  - teilweise sehr hohe Energien (CO_2-Laser)

  Halbleiter-Laser
  - aktives Material: Grenzschicht verschieden dotierter Halbleiter (pn-Übergang)
  - Pumpen durch elektrischen Strom
  - verschiedene Wellenlängen durch Material und Bauart

- Laseranwendungen:

  Materialprüfung
  - Schwingungs- oder Verformungsanalysen mit Interferenzmustern

  Messtechnik

- Entfernungsmessung
- Laser-Radar
- Leitstrahlen im Vermessungswesen
- Spektroskopie

Materialbearbeitung

- Schneiden von 100 Schichten Stoff auf einmal
- Schweißen von Karosserieteilen
- Bohren

Nachrichtentechnik

- optische Datenübertragung
- Abtastung von CDs und DVDs

Medizin

- Netzhaut-Operationen
- Zerstören von Krebszellen
- Laser-Skalpell
- Zerstörung kariöser Zahnteile

- Aufgaben:

  Aufgabe 16

  Aufgabe 17

Physik des Atomkerns

- Kernaufbau
- Radioaktiver Zerfall
- Strahlungsarten
- Kernzerfälle
- Anwendungen der Kernphysik

Kernaufbau

- Kernbestandteile:

  Proton
  - positiv geladen
  - Masse $m_p \approx 1836\ m_e$
  - hat Spin 1/2 und magnetisches Moment

  - Neutron
    - elektrisch neutral
    - Masse $m_n \approx m_p$
    - hat Spin 1/2 und magnetisches Moment
    - zerfällt in Proton, Elektron und (Anti-)Neutrino
    - Halbwertszeit 15 min

  gemeinsame Bezeichnung: **Nukleonen**

- Nuklide:

  natürliche oder künstliche Kerne

  zusammengesetzt aus Z Protonen und N Neutronen

  Massenzahl

  $A = Z + N$

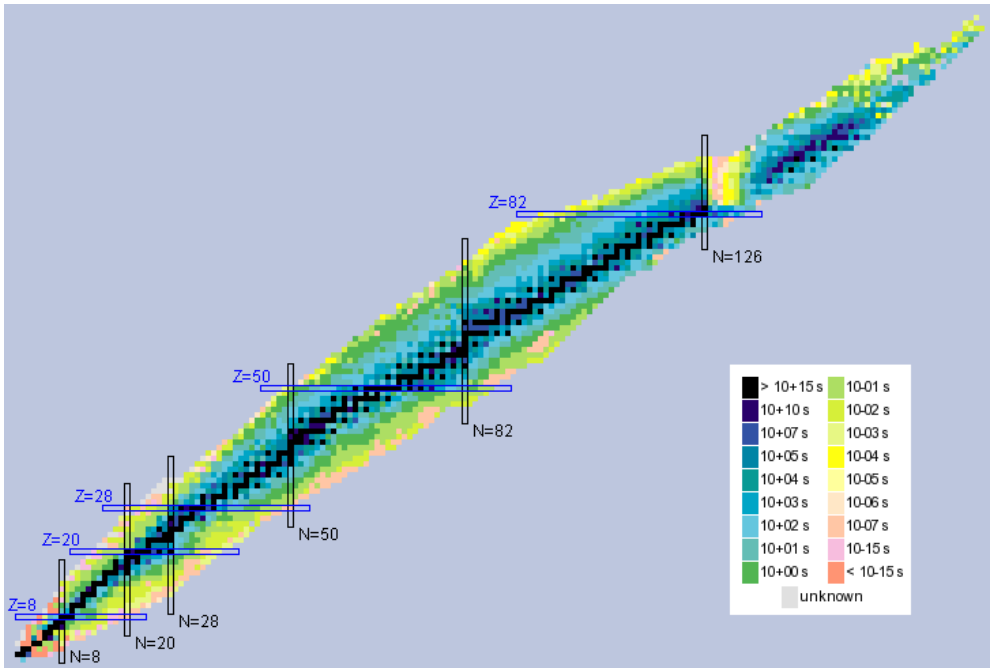
  Bezeichnungsweise

  ^{A}X, X Elementsymbol

  z.B. ^{1}H, ^{12}C, ^{197}Au

  Kerne mit gleichem Z (**Isotope**)
  - als neutrales Atom gleiche Zahl von Elektronen
  - gleiche chemische Eigenschaften
  - gleiches chemisches Element
  - verschiedene Massen , z.B. ^{1}H, $^{2}H = {}^{2}D$ (Deuterium)

  viele Kerne instabil



- Masse der Kerne:

näherungsweise Massenzahl

genauer: bezogen auf atomare Masseneinheit m_u

m_u = (Masse von ^{12}C)/12 = $1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

- Kerngröße:

  Radius näherungsweise

  $R = R_0 A^{1/3}$ mit $R_0 = 1.2 \cdot 10^{-15}$ m

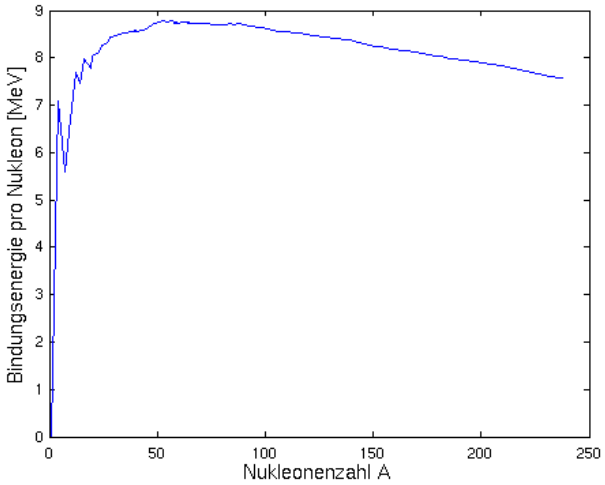
  einige Kerne elliptisch

  keine feste Oberfläche

- Bindungsenergie:

  Bindungsenergie =
  Kernmasse - Summe der Nukleonenmassen (gemäß $E = mc^2$)

  Energie pro Nukleon



  Energiegewinnung durch Verschmelzen leichter Kerne

  Energiegewinnung durch Spalten schwerer Kerne

  stabilster Kern: ^{56}Fe

- Kernkräfte:

  bewirken Bindung der Nukleonen

  sehr stark, überwinden elektrische Abstoßung der Protonen

  sehr kurze Reichweite (~ 1 fm)

  komplizierte Restkräfte der Quark-Wechselwirkung

- Aufgaben:

  Aufgabe 18

Radioaktiver Zerfall

- Zerfallsgesetz:

  unvorhersehbar, wann welcher Kern zerfällt

  Zerfallskonstante λ: Wahrscheinlichkeit für einen Zerfall

  Zahl der Zerfälle A pro Zeit (**Aktivität**) proportional zur Anzahl der Teilchen

  $A = \lambda N$

  Zerfall verringert Anzahl der vorhandenen Teilchen

  $A = - dN/dt = \lambda N$

  Integration →

  $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

  $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$

  Simulation

- Halbwertszeit $T_{1/2}$:

  Zeit, nach der die Hälfte der Teilchen zerfallen sind

  Aus $N(T_{1/2}) = N_0/2$ folgt

  $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$

- Einheit der Aktivität:

  1 Becquerel = 1 Zerfall/s

  Abkürzung 1 Bq

  alte Einheit Curie

  $1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq} = \text{Aktivität}(1\text{g } ^{226}\text{Ra})$

- Aufgaben:

  Aufgabe 19

Strahlungsarten

- Alpha-Strahlung:

  besteht aus Alpha-Teilchen = Heliumkernen ^{4}He

  Beispiele

  $^{238}U \rightarrow {}^{234}Th + {}^{4}He, \quad T_{1/2} = 4.5 \cdot 10^{9}$ a

  $^{234}U \rightarrow {}^{230}Th + {}^{4}He, \quad T_{1/2} = 9.1$ min

- Beta-Strahlung:

  besteht aus schnellen Elektronen

  Beispiele

  $^{60}Co \rightarrow {}^{60}Ni + e^{-} + v \quad T_{1/2} = 5.2$ a

  $n \rightarrow p + e^{-} + v \quad T_{1/2} = 15$ min

  Neutrino v
  - ungeladenes Teilchen
  - nahezu masselos
  - reagiert nur sehr schwach mit Materie

- Gamma-Strahlung:

  besteht aus hochenergetischen Photonen (Bereich ≥ MeV)

  Ergebniskern bei einem Zerfall oft in angeregtem Zustand

  geht in Grundzustand unter Abstrahlung von γ

  häufig sehr kurze Halbwertszeiten (10^{-16}s .. 10^{-13}s)

- Weitere Produkte aus Kernzerfällen:

  Positronen (Antiteilchen vom Elektron)

  Protonen oder Neutronen

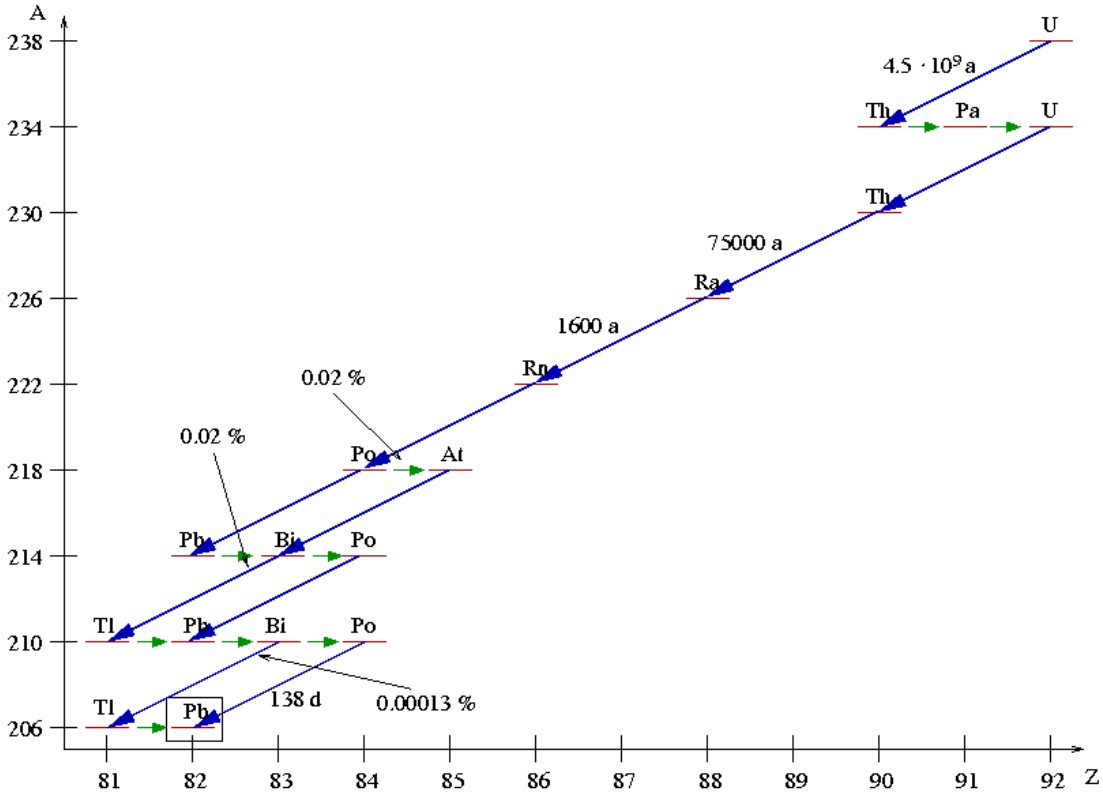
  kleine Kerne

Kernzerfälle

- Zerfallskette:
  - Produkt eines Zerfalls oft selbst radioaktiv

    Simulation

    Produkt wird aufgebaut, zerfällt dann selbst wieder
  - Beispiel längerer Kette von Zerfällen: Uran-Radium-Reihe

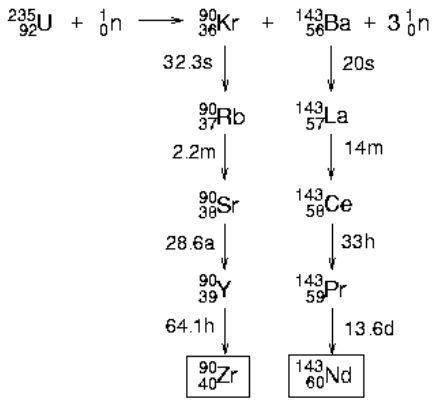


    Simulation

- Kernspaltung:

  großer Kern zerbricht bei Absorption eines Neutrons

  Beispiel ^{235}U



viele weitere Möglichkeiten von Bruchstücken

Neutron muss langsam sein (thermisches Neutron)

frei werdende Energie ≈ 200 MeV

- Kernfusion:

  kleine Kerne verschmelzen zu größerem

  Abstoßung der Kerne verhindert Prozess → sehr hohe Temperaturen erforderlich

  Beispielprozess im Innern der Sonne (**Deuterium-Zyklus**)

  $p + p \rightarrow {}^{2}D + e^{+} + v$
  ${}^{2}D + p \rightarrow {}^{3}He + \gamma$
  ${}^{3}He + {}^{3}He \rightarrow {}^{4}He + 2p$

  Gesamtreaktion
  - $4\,p \rightarrow {}^{4}He + 2e^{+} + 2\,v$

  frei werdende Energie: 24.7 MeV

Anwendungen der Kernphysik

- Altersbestimmung mit ^{14}C-Methode:

  Kohlenstoff Isotop ^{14}C, $T_{1/2} = 5730$ a

  entsteht in der oberen Athmosphäre durch kosmische Strahlung

  Anteil in Umgebung und lebendem Gewebe $\approx 10^{-13}$

  Körper stirbt →
  - kein neues ^{14}C
  - Konzentration nimmt ab

  Aktivität von ^{14}C einer Probe →
  - Alter seit dem Tod

- Prinzip des Kernreaktors:
  - Spaltung von ^{235}U mit 1 Neutron erzeugt 2 - 3 Neutronen

    erzeugte Neutronen →
    - weitere Spaltung
    - Kettenreaktion
  - Probleme:
    1. Neutronen fliegen aus dem Reaktor
    2. erzeugte Neutronen zu schnell
    3. mittelschnelle Neutronen werden von ^{238}U eingefangen
  - Lösung von 1:
    - Zahl der erzeugten Neutronen

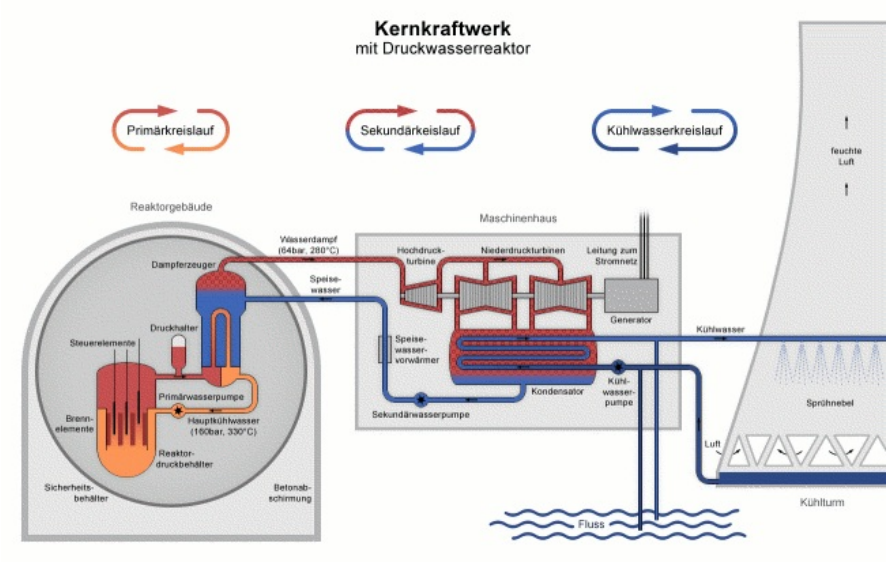
      $N_{neu} \sim$ Volumen $\sim r^3$
    - Zahl der entkommenden Neutronen

      $N_{verlust} \sim$ Oberfläche $\sim r^2$
    - großes Volumen →

      $N_{verlust}/N_{neu} \sim 1/r$ klein
  - Lösung von 2:
    - Bremsen der Neutronen durch Stöße mit leichten Kernen
    - geeignete Materialien (Moderatoren): Wasser (wegen H) oder Kohlenstoff
  - Lösung von 3:
    - Konzentrationen von Moderator und Brennstoff räumlich getrennt

- Bauweise eines Druckwasser-Reaktors:

  Schema



Brennstäbe mit angereichertem Uran

$N(^{235}U)/N(^{238}U) \approx 5\%$ (Natururan: $\approx 0.7\%$)

Moderator Wasser

gleichzeitig Kühlmittel: p = 158 bar, T = 317 °C

2. Kreislauf treibt Generatoren an

- Weitere Anwendungen:

  Krebstherapie

  medizinische Diagnostik

  Konservierung von Lebensmitteln

  Messung von Dichten und Dicken

  u.v.a.

- Aufgaben:

  Aufgabe 20

  Aufgabe 21

Statistische Mechanik

- Zustandsgleichung des idealen Gases
- Temperatur und Energie
- Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung
- Entropie und Wahrscheinlichkeit

Zustandsgleichung des idealen Gases

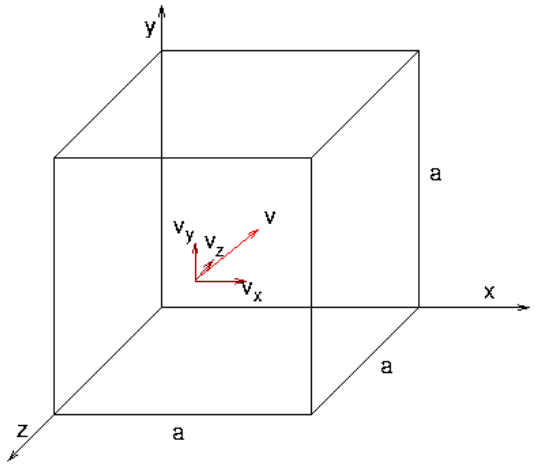
- Grundidee:

  Druck des idealen Gases wird zurückgeführt auf Stöße der vielen Gasteilchen mit der Gefäßwand

  Gasteilchen sind punktförmig und wechselwirken nicht miteinander

- "Druck" eines Teilchens:

  betrachten einzelnes Teilchen der Masse m in einem Würfel der Kantenlänge a, Geschwindigkeit v = (v_x, v_y, v_z)



  Stoß mit der rechten Wand (x-Richtung), Teilchen wird reflektiert. Neue Geschwindigkeit v = (-v_x, v_y, v_z). Impulsübertrag an die Wand:

  $\Delta p_x = 2\ m\ v_x$

  Zeit Δt bis zum Wiederkommen: zweimal durch den Würfel hindurch, also:

  $\Delta t = 2\ a\ /\ v_x$

  mittlerer Kraftübertrag des Teilchens also:

$$\begin{aligned} \overline{F} &= \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \\ &= m v_x^2 / a \end{aligned}$$

  mittlerer "Druck":

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \overline{F}/A = m v_x^2 / a^3 \\ &= m v_x^2 / V \end{aligned}$$

- Druck vieler Teilchen:

  Gesamtdruck:

$$p = \frac{m}{V} \sum_i v_{xi}^2$$

  Einzelgeschwindigkeiten nicht messbar, nur Mittelwerte über viele Teilchen, z.B. mittleres Geschwindgkeitsquadrat:

$$\overline{v_x^2} := \frac{1}{N} \sum_i v_{xi}^2$$

  damit:

$$p = \frac{m}{V} N \overline{v_x^2}$$

  Für jedes Teilchen gilt:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \Rightarrow \quad \overline{v^2} &= \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \end{aligned}$$

Im Mittel sind die Geschwindigkeiten über alle Raumrichtungen gleichmäßig verteilt, also:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2}$$

Ergebnis (**Grundgleichung der kinetischen Gastheorie**):

$$pV = \frac{1}{3}Nm\overline{v^2}$$

- kinetische Energie:

  Für ein Teilchen gegeben durch

  $E_{kin} = 1/2\ m\ v^2$

  Mittelwert:

  $$\overline{E_{kin}} = \frac{1}{2}m\overline{v^2}$$

  Gasgleichung damit:

  $$pV = N\frac{2}{3}\overline{E_{kin}}$$

Temperatur und Energie

- Temperatur T:

  Grundgröße der Thermodynamik

  Einheit im Alltag: °C (Grad Celsius)

  SI-Einheit: K (**Kelvin**)

  Umrechnung:

  $T/K = t/°C + 273.15$

  Einheit K auf das Verhalten von (idealen) Gasen bezogen

  $V \sim T$ (bei konstantem Druck)

  genauer gilt die Gasgleichung

  $p\,V = N\,k_B\,T$

  mit Boltzmann-Konstante

  $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K

- Temperatur und Statistik:

  makroskopischer Begriff ("irgend ein Mittelwert")

  kommt in der mikroskopischen Beschreibung nicht vor

  Zusammenhang zwischen Statistik und Temperatur aus makroskopischer Messung

  Vergleich der Gasgleichungen ergibt

  $\overline{E_{kin}} = 3/2\,k_B\,T$

  Mikroskopische Deutung der Temperatur:

  Die Temperatur ist ein Maß für die mittlere kinetische Energie der Moleküle.

- Gleichverteilungssatz:

  bisher für Teilchen mit 3 Freiheitsgraden (Translations-Energie)

  kinetische Energie pro Freiheitsgrad:

  $\overline{E_{kin_f}} = 1/2\,k_B\,T$

  für mehratomige Moleküle weitere Freiheitsgrade (z.B. Schwingung, Rotation, Elektronen-Anregung)

  mittlere Energie pro Freiheitsgrad bleibt gleich, also gesamte "innere" Energie U bei f Freiheitsgraden und N Teilchen:

  $U = N\,f/2\,k_B\,T$

- Aufgaben:

  Aufgabe 22

  Aufgabe 23

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

- Schwankungen:

  bisher nur Mittelwerte betrachtet

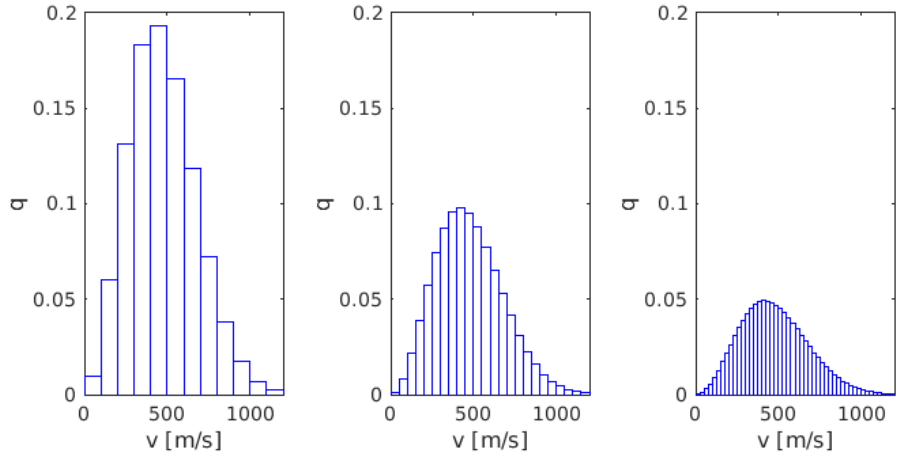
  Teilcheneigenschaften streuen um die Mittelwerte

  Frage: Wieviele Teilchen haben welche Geschwindigkeit (bei gegebener Temperatur)?

- Verteilung der Geschwindigkeit:

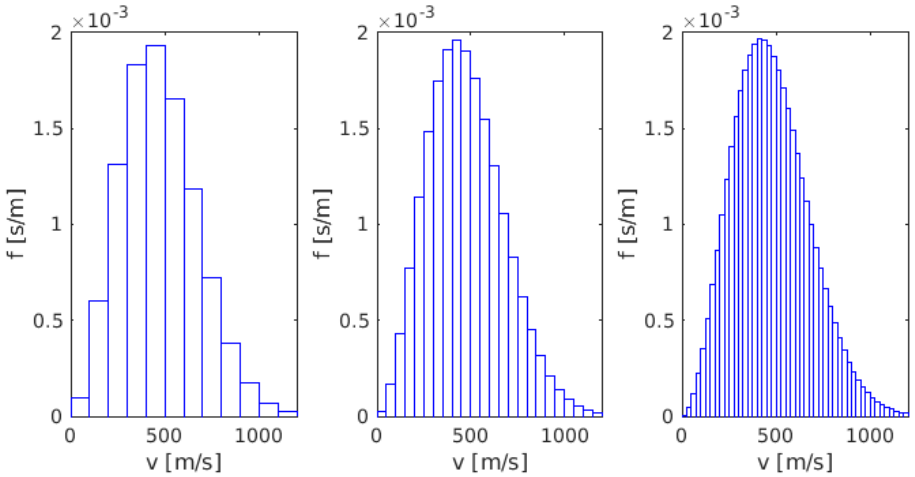
  Anteil q der Teilchen mit gegebener Geschwindigkeit v ist immer 0
  - denn: v ist reelle Zahl mit unendlich vielen Stellen

  stattdessen Geschwindigkeitsintervalle
  - Breite Δv wählen und Anteile bestimmen
  - genauer werden: Δv kleiner machen
  - für Δv = (100, 50, 25) m/s und 300 K



  - Problem: Kurve geht gegen 0

  Trick
  - Anteil im Intervall durch Breite des Intervalls teilen: f := q/Δv



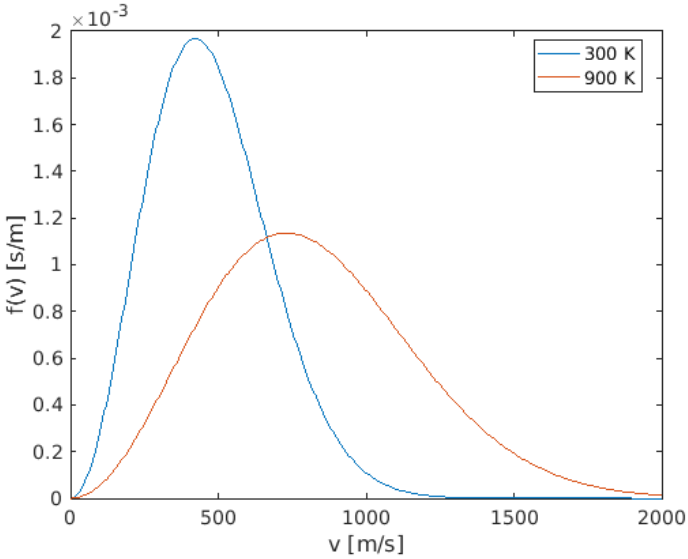
  - Kurve geht gegen Grenzverteilung f(v) mit Einheit "Anteil/Geschwingkeitsbreite", also s/m

- Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung

  im thermischen Gleichgewicht, bei fester Temperatur T

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/(2k_B T)}$$

  im Bild



Gesamtfläche unter der Kurve ist 1 (≙ 100% der Teilchen)

$$\int_0^\infty f(v)dv = 1$$

Fläche unter der Kurve von v_1 bis v_2 gibt Anteil der Teilchen in diesem Geschwindigkeitsbereich.

- Praktische Berechnung des Integrals:

  Anteil $N(v_1)$ der Teilchen mit Geschwindigkeit $\leq v_1$

  $$N(v_1) = \int_0^{v_1} f(v)\,dv$$

  kann mit der Fehlerfunktion erf(x) ausgedrückt werden

  $$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

  zunächst Hilfsgröße x bestimmen

  $$x = \sqrt{\frac{mv_1^2}{2k_BT}}$$

  damit

  $$N(v_1) = \mathrm{erf}(x) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} x e^{-x^2}$$

  Werte der Fehlerfunktion z.B. mit Matlab oder aus Tabellen

  Anteil q der Teilchen zwischen v_1 und v_2 dann $q = N(v_2) - N(v_1)$

- Mittlere Geschwindigkeiten:

  Mittelwert des Betrags der Geschwindigkeit

  $$\begin{aligned} \overline{v} &= \int_0^\infty v f(v)\,dv \\ &= \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}} \end{aligned}$$

  mittleres Geschwindigkeitsquadrat

$$\begin{aligned}\overline{v^2} &= \int_0^\infty v^2 f(v)\,dv \\ &= \frac{3k_BT}{m}\end{aligned}$$

Wurzel daraus heisst auch v_{rms} ("root mean square")

$$v_{rms} := \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$$

- Aufgaben:

  Aufgabe 24

Entropie und Wahrscheinlichkeit

- Makro- und Mikrozustand:

  Unterscheidung bei Untersuchung großer Systeme (viele Teilchen)
  - alle physikalisch unterscheidbaren Größen werden berücksichtigt (**Mikrozustand**)
  - nur makroskopisch interessierende Größen (z.B. Druck, Temperatur, Volumen) werden berücksichtigt (**Makrozustand**)

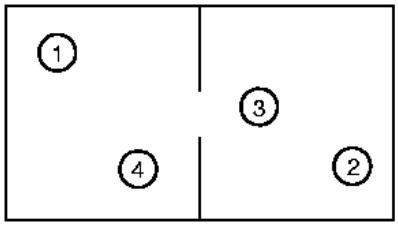
  Beispiel Gas
  - Mikrozustand = Ort und Geschwindigkeit aller Teilchen gegeben
  - Makrozustand = "homogenes" Gas mit gegebenem Druck und Temperatur

  viele Mikrozustände gehören zum gleichen Makrozustand

  wichtige Größe: Anzahl W der Mikrozustände zu einem Makrozustand

- Einfaches Beispiel:

  Verteilung von 4 Gasmolekülen auf zwei verbundene Volumina



  Mikrozustand = genaue Aufteilung der Teilchen auf die beiden Seiten

  Beschreibung eines Mikrozustands
  - Teilchen durchnummerieren
  - für jedes Teilchen Ziffer 0 für links, 1 für rechts
  - alle Ziffern hintereinanderschreiben

  z.B. 0110 = Teilchen 1,4 links; Teilchen 2,3 rechts

  Makrozustand: Anzahl n der Teilchen im linken Teilvolumen (4 - n im rechten)

  Anzahl W für jeden Makrozustand durch Auflisten

Makrozustand n	Mikrozustände	W
0	1111	1
1	1110,1101,1011,0111	4
2	1100,1010,0110,1001,0101,0011	6
3	1000,0100,0010,0001	4
4	0000	1

- Beispiel: N Teilchen im geteilten Volumen

  gesucht: Zahl W(n) der Mikrozustände zum Makrozustand

  Idee:
  - Ordne alle N Teilchen in einer beliebigen Reihenfolge an
  - die ersten n Teilchen kommen nach links, die anderen nach rechts

  Anzahl P(n) der möglichen Reihenfolgen (**Permutationen**)

  $$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n =: n!$$

  Vertauschungen der n ersten Teilchen liefern den gleichen Mikrozustand

  Vertauschungen der N - n letzten Teilchen liefern den gleichen Mikrozustand

  Gesamtzahl der Möglichkeiten damit

$$W(n) = \binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

Formel klappt auch bei n = 0 und n = N mit der Definition 0! = 1

- Wahrscheinlichkeit eines Makrozustands:

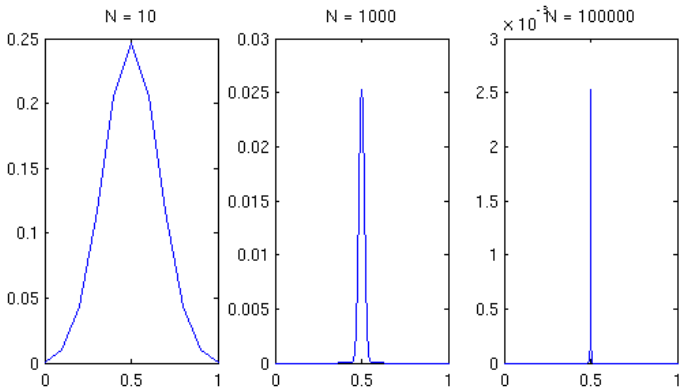
  Grundannahme: Alle Mikrozustände (bei gleicher Teilchenzahl und gleicher Gesamtenergie) gleich wahrscheinlich

  Gesamtanzahl der Mikrozustände
  - 2 Möglichkeiten (links oder rechts) für jedes Teilchen
  - bei mehreren Teilchen alle Kombinationen
  - insgesamt 2^N Möglichkeiten

  Wahrscheinlichkeit p(n) gegeben als

$$\begin{aligned} p(n) &= \frac{\text{Zahl der Mikrozustände für n}}{\text{Gesamtzahl der Mikrozustände}} \\ &= \frac{W(n)}{2^N} \end{aligned}$$

  p(n) graphisch, aufgetragen über n/N



  für großes N ist p(n) ungefähr eine Gaußsche Glockenkurve mit Mittelwert N/2 und Breite $\sqrt{N}$

  in x-Richtung skaliert auf [0,1] → relative Breite $1/\sqrt{N}$

- Entropie S:

  Maß für die Anzahl der Zustände eines Makrozustands

  definiert als

$$S = k_B \ln W$$

  für große Werte von N und n näherungsweise mit der Stirlingschen Formel

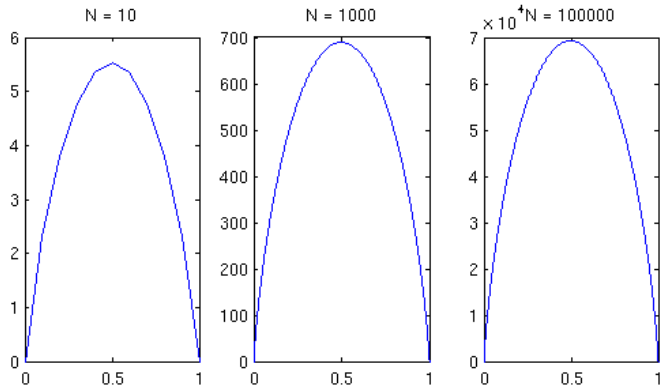
$$\ln x! \approx x \ln x - x + 1$$

  damit Näherungsformel für S im Beispiel

$$S(n) = k_B(N \ln N - n \ln n - (N-n)\ln(N-n))$$

  Entropie am "Gleichgewicht" n = N/2 maximal

  S(n) graphisch, in Einheiten von k_B



- Richtung von Prozessen:

  Stöße zwischen Teilchen verteilen diese im Mittel "zufällig"

  ungleich verteilte Zustände sind sehr unwahrscheinlich

  bei anfänglich ungleicher Verteilung stellt sich sehr schnell nahezu Gleichverteilung ein (**Gleichgewichtszustand**)

  Entropie nimmt (mit überwältigend großer Wahrscheinlichkeit) zu (**2. Hauptsatz der Thermodynamik**)

- Aufgaben:

  Aufgabe 25

  Aufgabe 26

Nichtlineare Systeme und Chaos

- Nichtlineare Systeme
- Chaotische Systeme
- Ursachen für Chaos

Nichtlineare Systeme

- Eigenschaften:

  Bewegungsgleichung enthält nichtlineare Terme

  Überlagerung zweier Lösungen i.a. keine Lösung (Superpositionsprinzip verletzt)

  bei Schwingungen: Frequenz hängt i.a. von Amplitude ab

  häufig qualitative Änderung des Verhaltens bei Parameteränderungen

  in der Regel nur numerisch lösbar

- Beispiele:

  Schwingungen mit nichtlinearer Rückstellkraft (Fadenpendel, realistische Feder)

  Schwingungen mit nichtlinearer Dämpfung (Newtonsche Reibung)

  Gravitation

  turbulente Strömung

- Typen von Nichtlinearität:

  harmlose
  - qualitativ leicht beschreibbar
  - "verbeulte" lineare Systeme
  - z.B. Fadenpendel

  chaotische
  - Bewegungen völlig irregulär
  - Vorhersage für längere Zeiten nicht möglich
  - z.B. turbulente Strömung

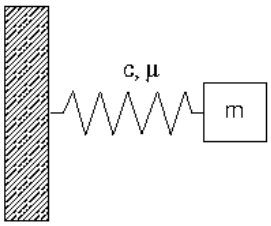
  singuläre
  - Terme gehen ggf. gegen unendlich
  - können unendliche Geschwindigkeit bekommen
  - meist unphysikalische Näherungen
  - z.B. Gravitation

- Duffing-Oszillator:

  gegeben durch Bewegungsgleichung

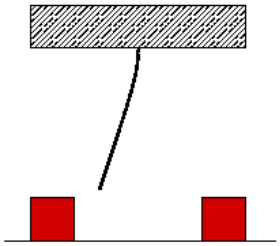
  $$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{1}{6}\mu\omega_0^2 x^3 = 0$$

  beschreibt Federschwingungen mit Abweichung vom Hookeschen Gesetz (für $\omega_0^2 > 0$)

  zusätzlich mit Dämpfung und Anregung wie beim Pendel

  auch möglich mit $\omega_0^2 < 0$
  - Modell für Stab zwischen zwei Magneten



- zwei stabile Gleichgewichtslagen (nahe linkem oder rechtem Magneten)
- Mittellage instabil

- Amplitudenabhängigkeit der Frequenz:

  näherungsweise beim Duffing-Oszillator berechnen

  harmonische Schwingung als Ansatz

  $$x(t) = A\cos(\omega t)$$

  Einsetzen in Bewegungsgleichung →

  $$-A\omega^2\cos(\omega t) + A\omega_0^2\cos(\omega t) - \frac{1}{6}\mu\omega_0^2 A^3\cos^3(\omega t) = 0$$

  Formel für Potenz des Cosinus

  $$\cos^3(\alpha) = \frac{1}{4}\cos(3\alpha) + \frac{3}{4}\cos(\alpha)$$

  ergibt

  $$(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{1}{8}\mu\omega_0^2 A^2)A\cos(\omega t) - \frac{1}{24}\mu\omega_0^2 A^3\cos(3\omega t) = 0$$

  Problem
  - Gleichung für beliebige Zeiten nicht erfüllbar (außer mit A = 0)
  - Lösung ist *nicht* harmonisch!
  - Näherung: A klein → Term mit cos(3ωt) vernachlässigen

  damit

  $$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{8}\mu A^2\right)$$

- Aufgaben:

  Aufgabe 27

  Aufgabe 28

Chaotische Systeme

- Duffing-Oszillator mit äußerer Anregung
- Phasenraum
- Poincare-Schnitt

Duffing-Oszillator mit äußerer Anregung

- Beispielsystem:

  Duffing-Oszillator mit Reibung und Anregung

  beschrieben durch

  $$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x + \mu x^3 = A\cos(\Omega t)$$

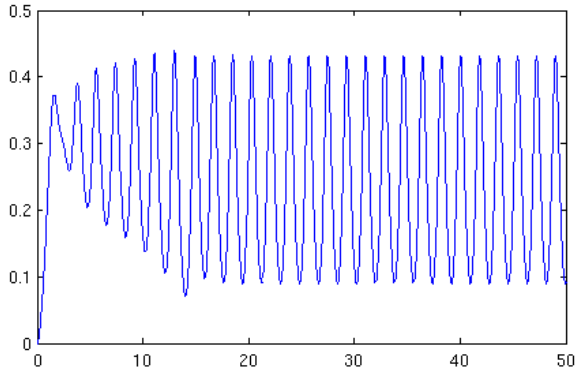
  sehr unterschiedliches Verhalten je nach Stärke der äußeren Anregung

  Beispielwerte im folgenden

  - λ = 1.0 1/s
  - ω^2 = -10 1/s^2
  - μ = 100 1/(m^2 s^2)
  - Ω = 3.5 1/s
  - wechselnde Anregungs-Amplituden A

- Kleine Anregung:

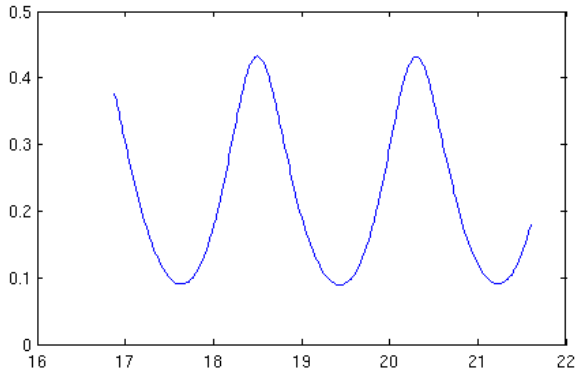
  A = 0.70



  zunächst Einschwingen

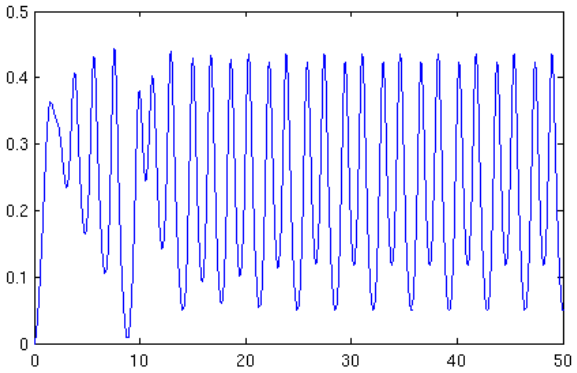
  folgt Anregung mit fester Amplitude und Phase

  deutlich anharmonisch (Minima breiter als Maxima)



- Mittlere Anregung:

  A = 0.80



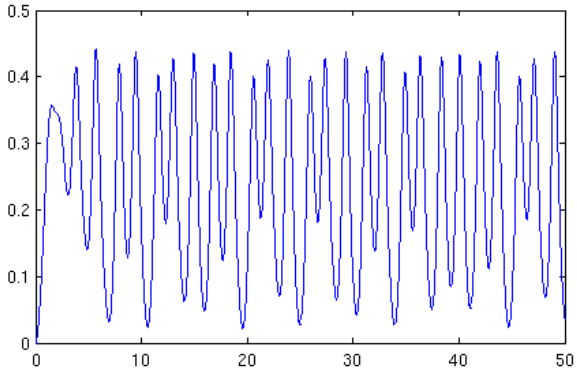
stärkeres Überschwingen in der Einschwingphase

bei jeder zweiten Schwingung kleinere Amplitude

Gesamtbewegung periodisch mit doppelter Schwingungsdauer

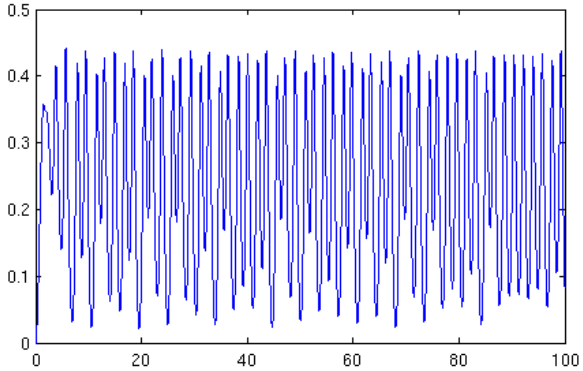
- Starke Anregung:

  A = 0.85



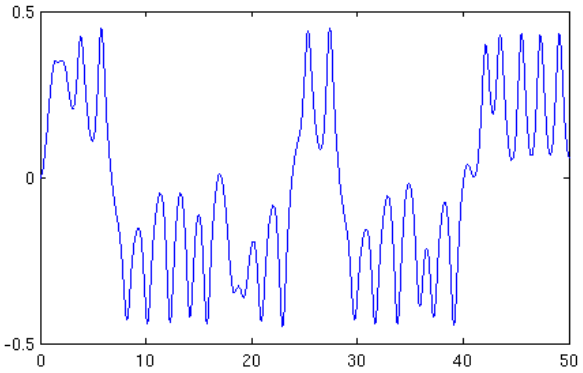
Amplitude schwankt stark

auch nach längerer Zeit keine Regelmäßigkeit zu erkennen



- Sehr starke Anregung:

  A = 0.90



System wechselt zwischen beiden Gleichgewichtslagen hinundher

Zahl der Schwingungen in jeder Lage ungleichmäßig

Phasenraum

- Phasenraumdiagramm:

  Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ über Ort x(t)

  wichtige Veranschaulichungsmethode

  ergänzt Ortsraumdiagramm (Ort x(t) über Zeit t)

  allgemeiner auch andere Koordinaten und ihre zeitlichen Änderungen

  bei Fadenpendel z.B. Winkelgeschwindigkeit über Winkel

  zeitliche Bewegung
  - ≙ Bewegung auf Phasenraumkurve
  - im Diagramm nicht zu erkennen

- Fadenpendel:

  Simulation

  keine Reibung (b/m = 0)

  kleine Auslenkung
  - Ellipse (harmonische Bewegung)

  große Auslenkung
  - "verbeulte" Ellipse (läuft spitz zu)

  Auslenkung und Anfangsgeschwindigkeit
  - endlose Wellenlinie = Überschläge
  - am besten modulo 2π betrachten

- Fadenpendel mit Reibung:

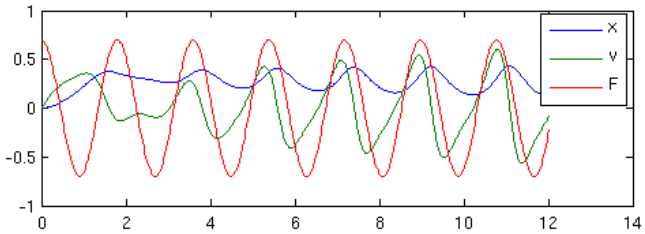
  kleine Reibung → zur Mitte (φ = 0, dφ/dt = 0) zulaufende Spirale

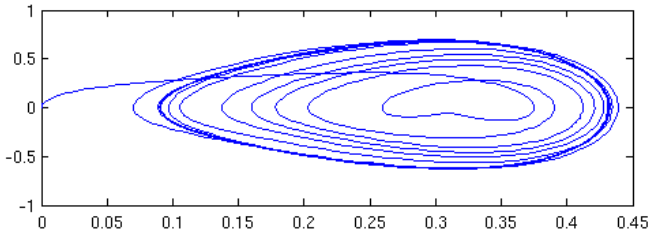
  große Reibung → direkter Bogen zur Mitte

- Standardbeispiel Duffing-Oszillator:

  Parameter wie oben

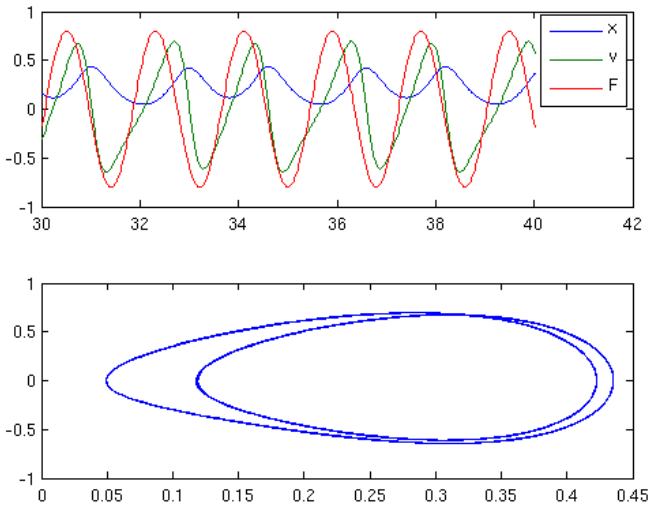
  A = 0.70





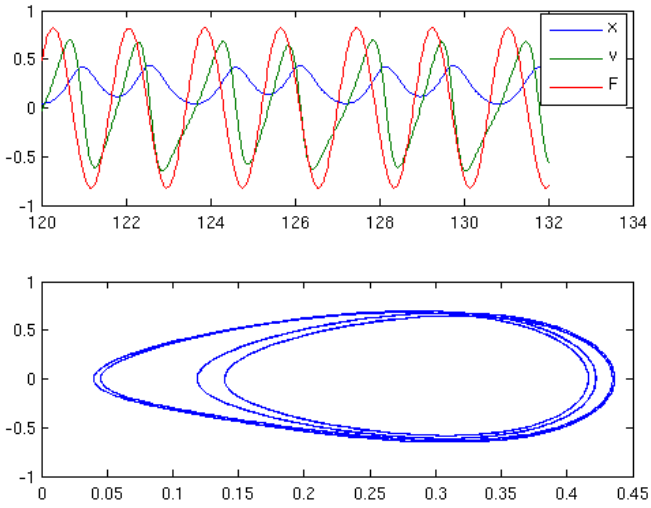
- anfängliches "Umherirren" = Einschwingphase
- läuft schließlich gegen verbeulte Ellipse
- Grenzkurve (**Attraktor**)

A = 0.80



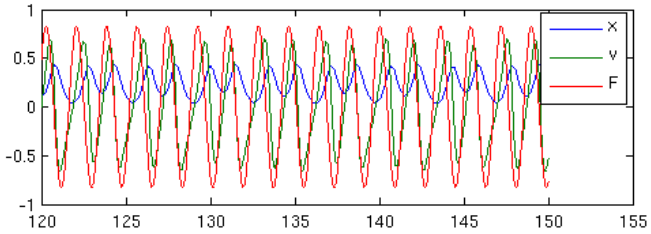
- Einschwingphase hier (wie i.f.) übersprungen
- Grenzkurve: 2 sich überschneidende verbeulte Ellipsen
- ≙ zwei abwechselnde Schwingungsformen/Amplituden

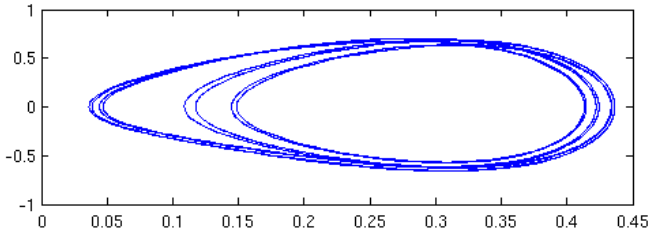
A = 0.82



- Ellipsen aufgespalten zu insgesamt 4 Grenzkurven
- Schwingung mit 4-facher Periode

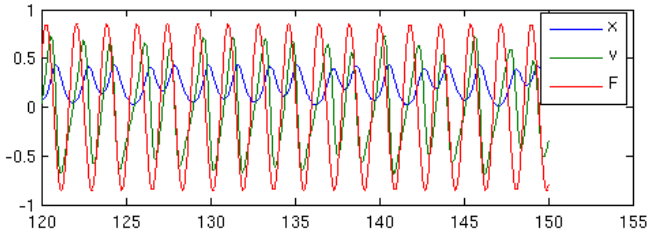
A = 0.827

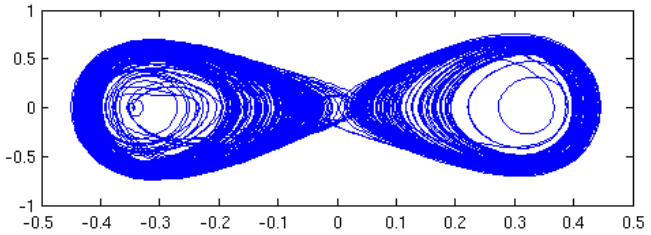




- weitere Feinaufspaltung
- Schwingung mit 8-facher Periode

A = 0.85





- Wechsel zwischen beiden Gleichgewichtslagen
- keine Periodizität mehr
- keine Kurve, sondern teilweise gefüllte Fläche (**Strange Attraktor**)

Poincare-Schnitt

- Verfahren des Poincare-Schnitts:

  Reduktion einer Bewegung auf weniger (hier zwei) Parameter

  qualitatives Verhalten deutlicher

  bei periodischer Anregung
  - nur Punkte mit fester Phase α der äußeren Anregung
  - z.B. α = 0: nur im Maximum

  Simulation beim Fadenpendel

- Poincare-Schnitt beim Duffing-Oszillator:

  Einschwingverhalten stört → erste Punkte weglassen

  Bild bei einfacher periodischer Bewegung (A = 0.70): nur ein Punkt

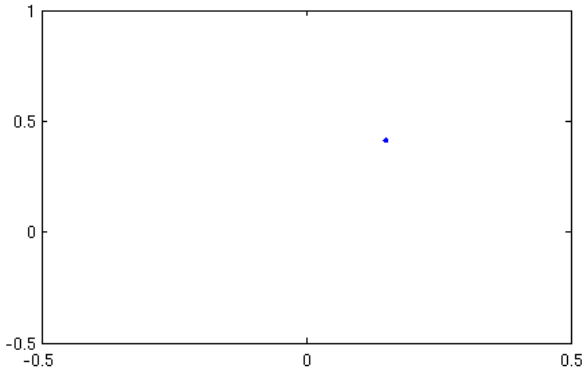
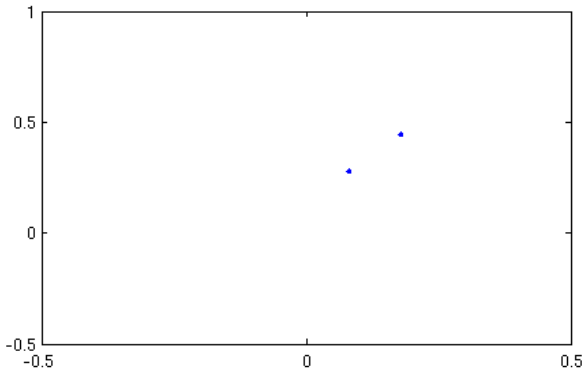
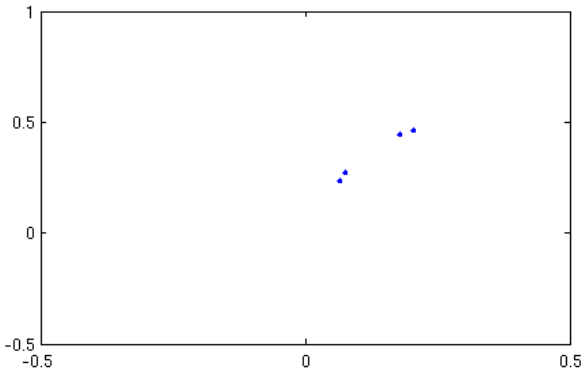


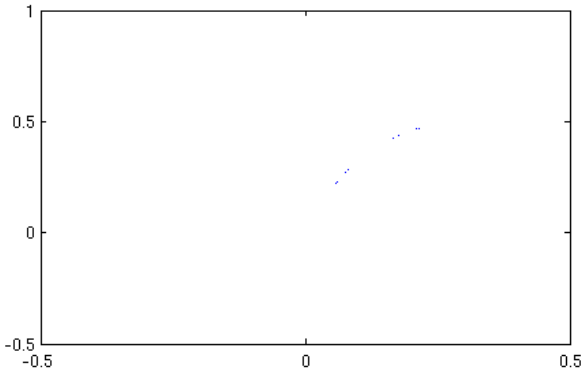
  Bild bei doppelter Periode (A = 0.80): 2 Punkte



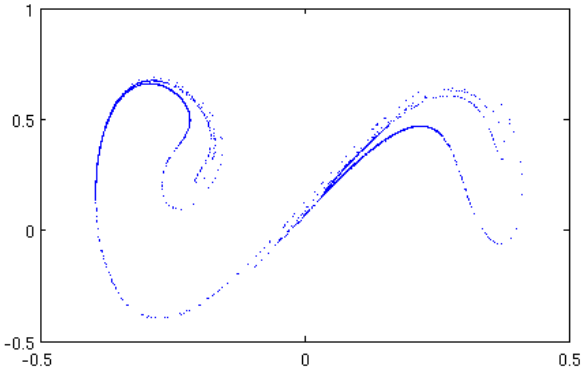
  analog bei Periode 4 (A = 0.82)



und Periode 8 (A = 0.827)



chaotische Bewegung (A = 0.85): Kurve mit linienhaften Anteilen



- Aufgaben:

  Aufgabe 29

Ursachen für Chaos

- Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
- Fixpunkte und Attraktoren
- Seltsame Attraktoren und Fraktale

Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

- Lösungen mit ähnlichen Anfangsbedingungen beim Pendel:

  Vergleich zweier Kurven mit verschiedener Anfangsauslenkung φ_0

  selbst bei sehr kleinen Unterschieden sehr schnell völlig verschiedene Kurven

  exponentielles Verhalten
  - Unterschied mehrmals um Faktor 10 verkleinern
  - → Zeit bis zum Auseinanderlaufen wächst jeweils nur um festen Wert

- Lyapunov-Exponent:

  bei kleiner Änderung $d\varphi_0$ der Anfangsbedingungen ist

  $$|\varphi(t;\varphi_0 + d\varphi_0) - \varphi(t;\varphi_0)| \approx d\varphi_0\, e^{\lambda t}$$

  Lyapunov-Exponent λ beschreibt Divergieren beieinanderliegender Lösungskurven

  verschiedene Werte λ_i je nach Richtung im Phasenraum (z.B. φ_0, $\dot{\varphi}_0$)

  der Lyapunov-Exponent = Maximum der λ_i

  $\lambda_i < 0$ → Konvergenz der Lösungen (anziehender Fixpunkt)

- Vorhersage-Horizont T_H:

  relativer Fehler ε in Anfangsbedingungen

  ε immer > 0 (Messgenauigkeit, thermisches Rauschen, ...)

  nach Zeitraum T_H liegt der relative Fehler bei 1
  - → Werte so groß wie Fehler
  - → danach keinerlei Aussage über System möglich

  T_H gegeben durch

  $$T_H = -\frac{\ln(\epsilon)}{\lambda}$$

- Explosion ≠ Chaos:

  betrachte Gleichung für exponentielles Wachstum

  $$\dot{x} = \alpha x$$

  Lösung bei Anfangswert x_0

  $$x(t;x_0) = x_0 e^{\alpha t}$$

  nahegelegene Lösungen divergieren mit Lyapunov-Exponent α, aber kein Chaos

  Unterschied: bei chaotischem System bleiben die Bahnen im Phasenraum in endlichem Volumen

- Aufgaben:

  Aufgabe 30

Fixpunkte und Attraktoren

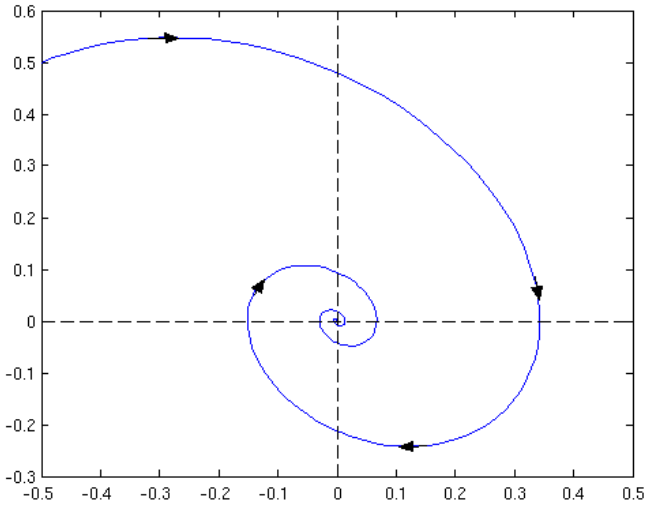
- Pendel ohne Antrieb:

  betrachten Fadenpendel mit Reibung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda\frac{d\varphi}{dt} + \sin(\varphi) = 0$$

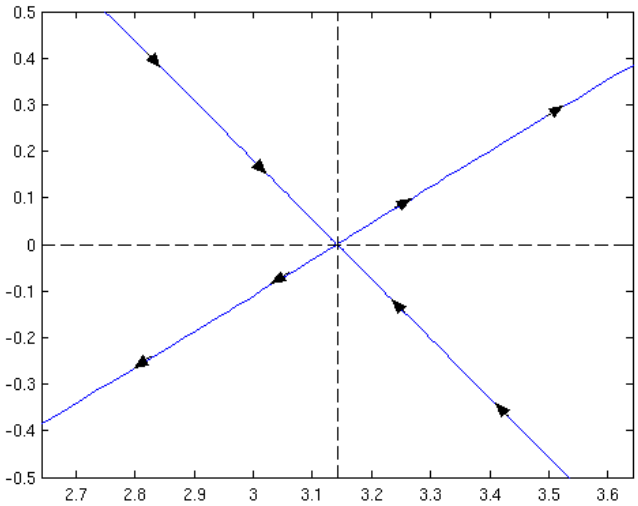
  Fixpunkte (Ruhelagen) bei $\dot{\varphi} = 0$ und $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pm\pi$

  Verhalten bei $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = 0$ (für $\lambda < 2$)



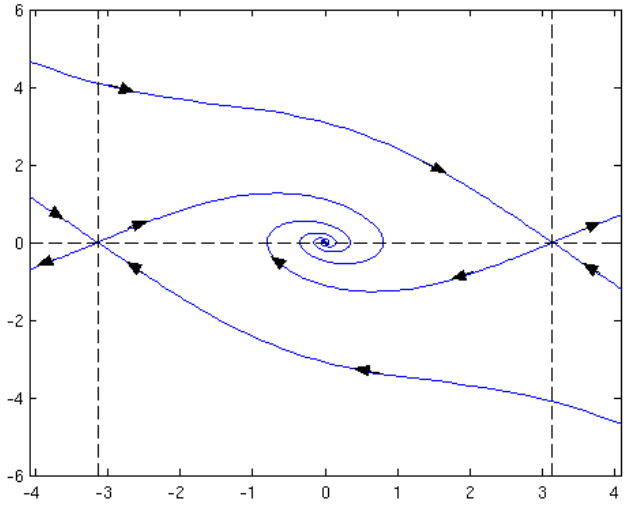
  - stabiler anziehender Fixpunkt

  Verhalten bei $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi = \pi$



  - Anziehung in einer Richtung
  - Abstoßung in der anderen Richtung

  Gesamtbild des Phasenraums

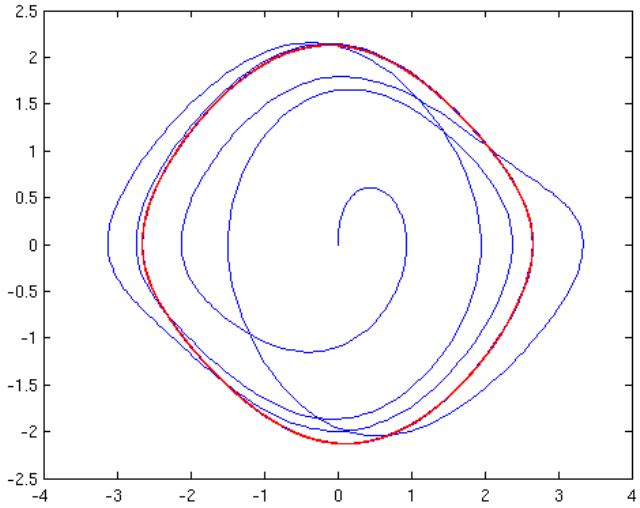


- Pendel mit Antrieb:

  gegeben durch Gleichung

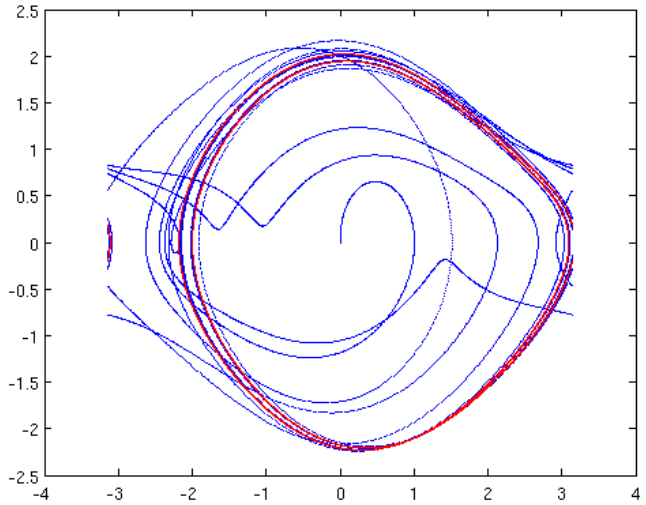
  $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda\frac{d\varphi}{dt} + \sin(\varphi) = A\cos(\omega_{ext}t)$$

  kleine Anregung (A = 1.0)



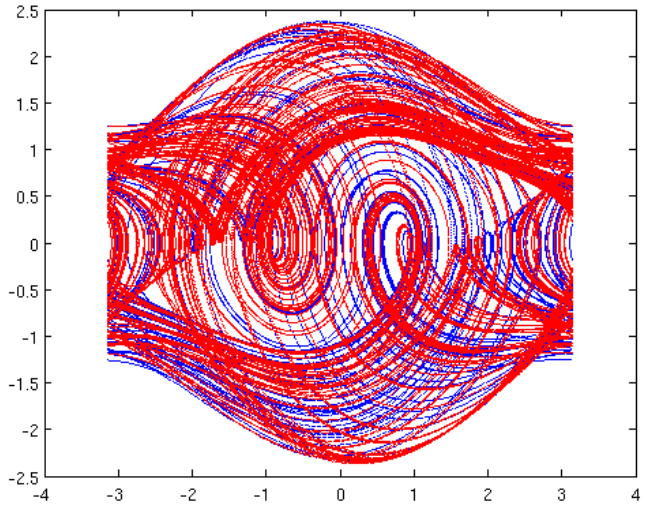
  - Attraktor rot markiert
  - vorhersagbar: alle Anfangspunkte landen da

  mittlere Anregung (A = 1.07)



- doppelter Grenzzyklus
- immer noch vorhersagbar: Bewegung landet auf Attraktor

starke Anregung (A = 1.22)



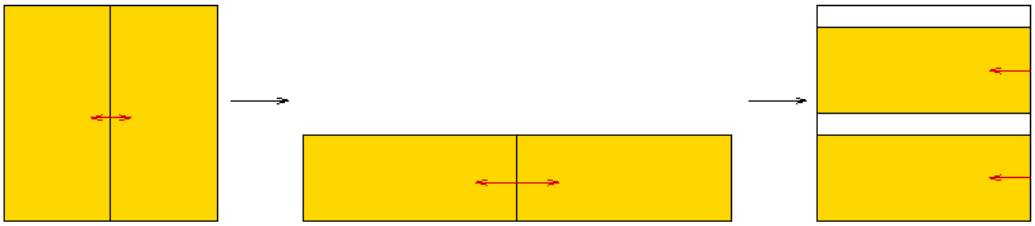
- merkwürdiger Attraktor
- Anregung mischt anziehende und abstoßende Teile durcheinander
- Konsequenz für Vorhersagbarkeit?

Seltsame Attraktoren und Fraktale

- Bäcker-Abbildung:

  einfacher Prototyp der Streck-, Quetsch- und Faltabbildung

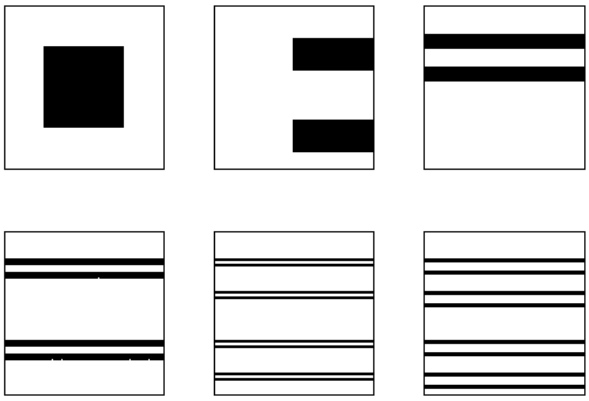
  bildet das Einheitsquadrat in sich ab
  - Höhe auf 0.4 stauchen, Länge um 2 strecken
  - rechte Hälfte abschneiden
  - umgeklappt in die obere Hälfte des Quadrats packen



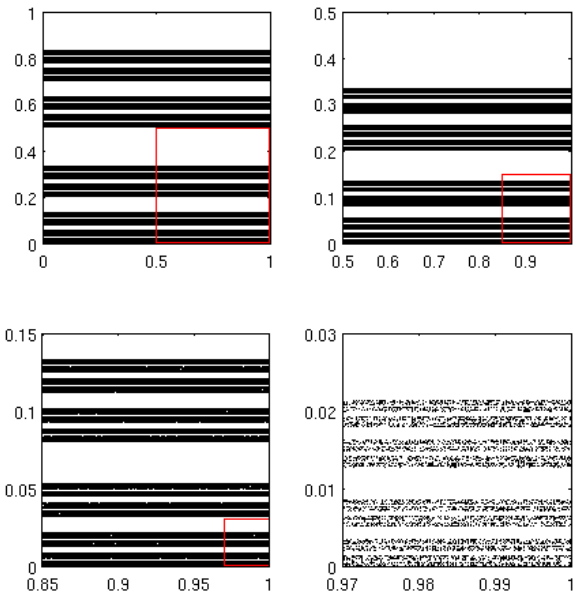
als Formel

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (2x, \alpha y) & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (2-2x, \frac{1}{2} + \alpha y) & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Abbildung mischt Anfangswerte durcheinander



nach vielen Iterationen
  - Muster von vielen dünnen Streifen
  - wiederholt sich bei kleineren Maßstäben



Lyapunov-Exponenten

- $\lambda_1 > 0$ (Explosion in x-Richtung)
- $\lambda_2 < 0$ (Stauchen in y-Richtung)
- $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ (insgesamt Stauchung)

- **Fraktal**:

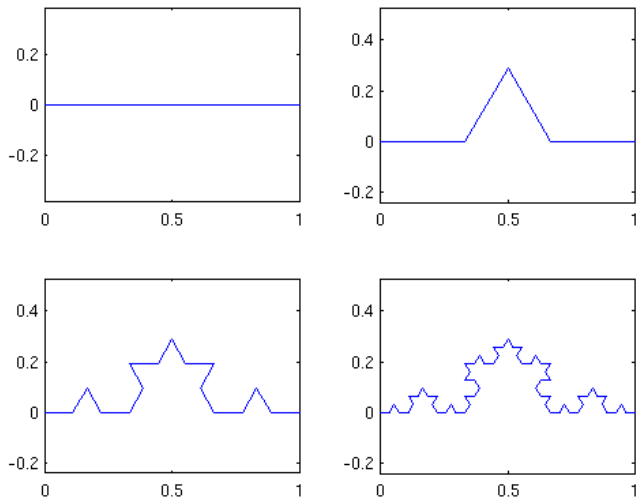
  geometrisches Objekt (Menge von Punkten), z.B. Kurve

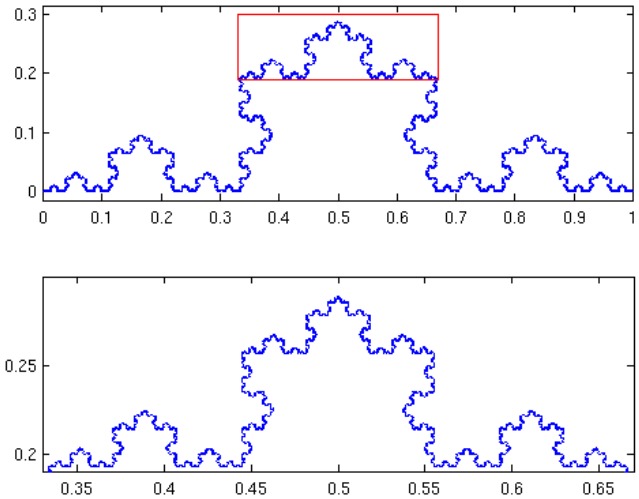
  mehr als 1d, weniger als 2d (oder andere Dimensionen)

  bei Vergrößerung immer wieder gleicher Aufbau (**selbstähnlich**)

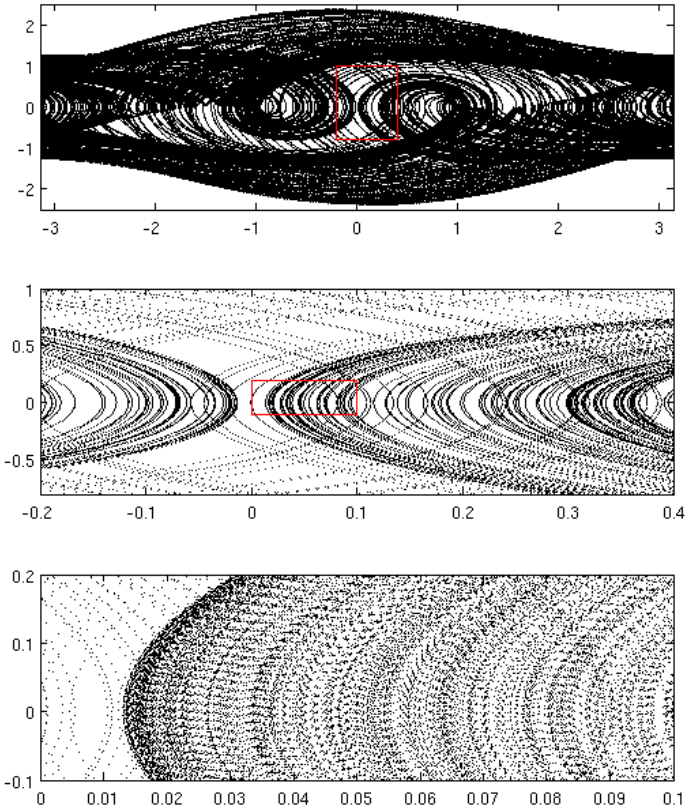
  Beispiele

  - Attraktor bei der Bäcker-Abbildung
  - Koch-Kurve





- Attraktor beim chaotischen Pendel



- **Seltsamer Attraktor** (**Strange Attractor**):

  Attraktor mit fraktaler Form

  entsteht bei Bewegungen in endlichem Phasenraum wenn
  - positive und negative Lyapunov-Exponenten (Stauchen in einer Richtung, Strecken in anderer)
  - Summe der Lyapunov-Exponenten negativ (insgesamt Stauchung)

  vorhersagbar
  - Bewegung landet beim Attraktor

  unvorhersagbar
  - Bewegung auf Attraktor hochkompliziert
  - welche Teilblätter in welcher Reihenfolge ?

- exponentiell von Anfangsbedingungen abhängig

chaotisches Pendel

- Zahl der Überschläge zwischen Richtungswechsel langfristig unvorhersagbar

chaotischer Duffing-Oszillator

- Zahl der Schwingungen bis zum Wechsel der Seite langfristig unvorhersagbar

Aufgaben

- Aufgabe 1
- Aufgabe 2
- Aufgabe 3
- Aufgabe 4
- Aufgabe 5
- Aufgabe 6
- Aufgabe 7
- Aufgabe 8
- Aufgabe 9
- Aufgabe 10
- Aufgabe 11
- Aufgabe 12
- Aufgabe 13
- Aufgabe 14
- Aufgabe 15
- Aufgabe 16
- Aufgabe 17
- Aufgabe 18
- Aufgabe 19
- Aufgabe 20
- Aufgabe 21
- Aufgabe 22
- Aufgabe 23
- Aufgabe 24
- Aufgabe 25
- Aufgabe 26
- Aufgabe 27
- Aufgabe 28
- Aufgabe 29
- Aufgabe 30

Aufgabe 1

- Eine alternde Diva will die Zeitdilatation ausnutzen, um dem Alter ein Schnippchen zu schlagen.

  a. Sie setzt sich in eine Concorde und fliegt mit doppelter Schallgeschwindigkeit (v = 2200 km/h) 2 Wochen um den Äquator. Wieviel jünger ist sie bei der Rückkehr als ihre vorher gleichalte Zwillingsschwester ?

  b. Enttäuscht von diesem Ergebnis bucht sie einen 4-monatigen Aufenthalt auf der Internationalen Raumstation ISS, die mit etwa 28000 km/h um die Erde rast. Wieviel hat das gebracht?

  c. Schliesslich wendet sie sich an den berühmten Raketenbauer Wolfram von Schwarz, dessen neuestes Modell es auf immerhin 90% Lichtgeschwindigkeit bringt. Hoffnungsvoll fliegt sie zum Alpha Centauri (Entfernung 4.3 Lichtjahre) und zurück und guckt verächtlich auf ihre Zwillingsschwester, die nun deutlich älter ist als sie. Wieviel?

- Hinweis 1: Welches System ist das Eigensystem? Definieren Sie dazu die zugehörigen Ereignisse!

- Hinweis 2: Verwenden Sie für die Berechnung der Zeitdifferenz bei sehr kleiner Geschwindigkeit (β := v/c << 1) folgende Näherungsformel

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

- Lösung

Aufgabe 2

- Ein Myon entstehe in einer Höhe von 12.3 km über der Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit von 99.9% der Lichtgeschwindigkeit.

  a. Nach welcher Zeit, gemessen am Boden, ist es unten angekommen? Wie lange hat es in seinem eigenen System dafür gebraucht?

  b. Welche Strecke hat das Myon in seinem System vom Entstehungsort bis zum Boden zurückgelegt? Wie groß ist also die Geschwindigkeit, mit dem ihm die Erde entgegenrast?

- Lösung

Aufgabe 3

- Im System S bewegen sich zwei Teilchen mit den Geschwindigkeiten 0.9c und -0.9c aufeinander zu. Wie groß ist die Geschwindigkeit von Teilchen 2 im System von Teilchen 1 (d.h. die Relativgeschwindigkeit)?
- Lösung

Aufgabe 4

- In der kosmischen Strahlung wurde ein Proton entdeckt, dass die ungeheure kinetische Energie von $3.0 \cdot 10^{20}$ eV hatte.

  a. Wieviel Wasser kann man damit um 1° C erwärmen? (Umrechnung: 1 eV = $3.83 \cdot 10^{-23}$ kcal)

  b. Wie groß waren γ und v dieses Protons (bei einer Protonen-Ruheenergie von 938 MeV)?

  c. Angenommen, das Proton kommt aus dem Zentrum der Milchstrasse, ungefähr 25000 Lichtjahre entfernt. Wie lange war es unterwegs in unserem und in seinem Ruhesystem?

- Hinweis:

  1 kcal ("Kilo-Calorie") ist die Energiemenge, die man benötigt, um 1 kg Wasser um 1 Grad zu erwärmen.

- Lösung

Aufgabe 5

- Masse-Energie-Äquivalenz:

  a. Ein größeres Kernkraftwerk leistet 1000 MW . Wieviel Masse an Brennmaterial wird pro Jahr umgesetzt?

  b. Die Sonne strahlt mit einer Leuchtkraft von $3.8 \cdot 10^{26}$ W. Wieviel Masse verliert sie dadurch pro Sekunde? Wie lange hielte sie das durch, wenn die Kernfusion gleichmäßig bis zum völligen Verbrauch weiterliefe? ($m_{Sonne} = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg)

- Lösung

Aufgabe 6

- Eine Natriumdampf-Niederdrucklampe von 100 W emittiert Licht der Wellenlänge λ = 590 nm. Ihr Wirkungsgrad beträgt 20%. Wieviele Photonen strahlt sie pro Sekunde ab?
- Lösung

Aufgabe 7

- Welche Wellenlänge darf das bestrahlende Licht höchstens haben, damit beim lichtelektrischen Effekt Elektronen freigesetzt werden

  a. bei Cäsium mit einer Austrittsarbeit $W_A = 2.14$ eV?

  b. bei Platin mit einer Austrittsarbeit $W_A = 5.32$ eV?

- Lösung

Aufgabe 8

- Röntgenlicht der Energie 56 keV wird an einer Graphitprobe gestreut. Welche Wellenlänge hat die in 85° gestreute Strahlung?
- Lösung

Aufgabe 9

- Wie groß ist die Wellenlänge von Elektronen, die eine Spannung von 1 kV bzw. 100 kV durchlaufen haben?
- Lösung

Aufgabe 10

- Um die innere Struktur eines Kerns mit einem Durchmesser von $2 \cdot 10^{-15}$ m zu untersuchen, bestimmt man den Ort eines Protons im Kern mit einer Genauigkeit von 1/10 des Kerndurchmessers. Wie groß ist dann seine Geschwindigkeitsunschärfe?

- Hinweis:

  Benutzen Sie die Protonenmasse

  $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27}$ kg

- Lösung

Aufgabe 11

- Wie groß ist die Bindungsenergie des innersten Elektrons beim Cäsium-Atom (Kernladung Z = 55), wenn man den Effekt der äußeren Elektronen näherungsweise vernachlässigt?
- Lösung

Aufgabe 12

- In Weltall beobachtet man häufig riesige Wolken atomaren Wasserstoffs - sogenannte H-II-Regionen -, die in einem charakteristischen Rot mit einer Wellenlänge von 656.3 nm leuchten. Welchem Übergang des H-Atoms entspricht dieses Licht?

- Lösung

Aufgabe 13

- Beschreiben Sie alle Zustände des Wasserstoff-Atoms zur Hauptquantenzahl n=4 durch Angabe ihrer Quantenzahlen. Wie viele Zustände sind es? Welche Energien haben sie?
- Lösung

Aufgabe 14

- Schätzen Sie die Größe der magnetischen Induktion B, die in einem Kernspintomographen benötigt wird, wenn man mit Radiofrequenzen von 100 MHz arbeiten will.
- Hinweise:

  Energie eines magnetischen Moments μ im Magnetfeld B:

  $E = - \vec{\mu}\,\vec{B}$

  magnetisches Moment eines Protons:

  $\mu_P = - g_I\, e/m_P\, \vec{S}$

  mit $g_I = 5.586$

- Lösung

Aufgabe 15

- Stellen Sie die Termschema auf von C (6 Elektronen) und F (9 Elektronen). Können Sie daraus Vorhersagen machen über das chemische Grundverhalten dieser Elemente?
- Lösung

Aufgabe 16

- Wir betrachten einen Helium-Neon-Laser mit einer Wellenlänge von 550 nm.

  a. Wie groß ist das Verhältnis der Besetzungszahlen des oberen und unteren Niveaus bei Zimmertemperatur T = 300 K?

  b. Bei welcher Temperatur ist das Verhältnis der Besetzungszahlen 1/2?

  c. Durch den Pumpprozess wurde eine Inversion mit einem Besetzungsverhältnis von 3:1 erzeugt. Welche Temperatur ergibt sich formal, wenn man die Boltzmannverteilung auch hier zugrundelegt?

- Lösung

Aufgabe 17

- Der Abstand zum Mond wird sehr genau bestimmt, indem die Zeit gemessen wird, die ein Laserstrahl braucht, um von der Erde zu einem Reflektor auf dem Mond und zurück zu gelangen.

  a. Die Genauigkeit dieser Messung beträgt inzwischen 15 cm. Welche Genauigkeit hat also die zugrundeliegende Zeitmessung?

  b. Der Laser bildet auf dem Mond einen Punkt von etwa 3 km Durchmesser. Wie groß ist der Öffnungswinkel des Lasers? Verwenden Sie einen mittleren Mondabstand R = 384000 km.

- Lösung

Aufgabe 18

- Berechnen Sie die Dichte des Atomkerns unter der Annahme, dass er kugelförmig ist. Wie groß wäre die Masse eines Golfballs (Durchmesser 3 cm), der nur aus Kernmaterie besteht (Neutronenstern-Materie)?
- Lösung

Aufgabe 19

- Es stellt sich heraus, dass das Fläschchen mit 2.71 g KCl in der Chemie-Sammlung radioaktiv ist mit einer konstanten Zerfalllsrate von 4490 Bq. Ursache ist das radioaktive Isotop ^{40}K, das 1.17% des natürlichen Kaliums ausmacht. Wie groß ist seine Halbwertszeit?
- Hinweis:

  Ein Mol eines Stoffes enthält $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ Teilchen (Moleküle)

  Die Masse eines Mols (**Molmasse**) von KCl beträgt

  $M_{KCl} = 74.6$ g/mol
- Lösung

Aufgabe 20

- Ein (lebender) Baumstamm hat eine natürliche ^{14}C-Aktivität von 15.3 Zerfällen pro Minute und Gramm. In einer alten Feuerstelle findet man ein Stück Holzkohle von 5 g und einer Aktivität von 63 Zerfällen/Minute. Wie alt ist es?

- Lösung

Aufgabe 21

- Die Hiroshima-Bombe hatte eine Sprengwirkung von etwa 13000 Tonnen TNT, wobei die Explosion einer Tonne TNT etwa $4.2 \cdot 10^9$ J freisetzt. Welche Masse ^{235}U wurde dabei gespalten?
- Lösung

Aufgabe 22

- Bestimmen Sie die Wurzel aus dem mittleren Geschwindigkeitsquadrat der Moleküle N_2, H_2O und CO_2 bei Normalbedingungen (p = 1.01325 bar, T = 273.15K).
- Tafelwerte:

  Boltzmann-Konstante: $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23}$ J/K

  atomare Masseneinheit: $m_u = 1.661 \cdot 10^{-27}$ kg

  relative Massenzahlen:
  - $M_{N_2} = 28$
  - $M_{H_2O} = 18$
  - $M_{CO_2} = 44$
- Lösung

Aufgabe 23

- Wie groß ist die Teilchendichte eines idealen Gases bei einer Temperatur von T = 300 K und einem Druck von 1 bar? Wie groß ist die entsprechende (Massen-)Dichte für Stickstoff?
- Lösung

Aufgabe 24

- Eine bestimmte chemische Reaktion finde statt, wenn die Gasmoleküle eine Aktivierungsenergie von mindestens 1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J haben. Die Masse eines Gasmoleküls betrage $4.65 \cdot 10^{-26}$ kg. Welcher Bruchteil der Moleküle nimmt bei einer Temperatur von T_1 = 300 K bzw. T_2 = 900 K an der Reaktion teil?

- Benutzen Sie die folgenden Werte :
  - erf(3.590) = $1 - 3.829 \cdot 10^{-7}$
  - erf(6.218) = $1 - 1.443 \cdot 10^{-18}$

- Lösung

Aufgabe 25

- Erstellen Sie für N = 6 Teilchen im geteilten Kasten eine Tabelle der Makrozustände, die jeweils die zugehörigen Mikrozustände angibt, sowie die Werte von W(n), p(n) und S(n).
- Lösung

Aufgabe 26

- Wie stark nimmt die Entropie zu, wenn sich die Verteilung der Teilchen von zunächst 45% auf einer Seite zu 50% auf beiden Seiten ausgleicht, bei einer Gesamtzahl von $N = 6 \cdot 10^{23}$?
- Hinweis: Verwenden Sie die Stirling-Formel.
- Lösung

Aufgabe 27

- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer eines Fadenpendels von 80 cm Länge
  a. bei einer Anfangsauslenkung $\varphi_0 = \pi/2$
  b. bei einer Anfangsgeschwindigkeit der Pendelmasse $v_0 = 3$ m/s.
- Hinweis:

  Verwenden Sie die Näherung

  $$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$$

- Lösung

Aufgabe 28

- Experimentieren Sie mit dem Applet des Fadenpendels bei ω_0 = 1.0 1/s, um die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Anfangsamplitude φ_0 zu bestimmen.

  a. Machen Sie mehrere Messungen und tragen Sie Ihre Ergebnisse graphisch auf.

  b. Für nicht zu große Auslenkungen kann die Schwingungsdauer quadratisch genähert werden als

  $$T(\varphi_0) \approx \frac{2\pi}{\omega_0} + b\varphi_0^2$$

  Bestimmen Sie den Parameter b aus Ihren Messwerten und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe 27.

- Hinweis:

  Zur Umrechnung von ω auf T könnte folgende Näherungsformel nützlich sein

  $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$$

- Lösung

Aufgabe 29

- Untersuchen Sie das Verhalten des angeregten Pendels, beschrieben (nach leichter Vereinfachung) durch die Gleichung

  Verwenden Sie dazu die Applets

  Mathematisches Pendel mit Anregung

  Chaotisches Pendel im Phasenraum

  Poincare-Schnitt beim chaotischen Pendel

  Versuchen Sie, Bereiche mit Periodenverdopplung und Chaos ausfindig zu machen. Halten Sie dazu Werte von λ und ω_{ext} fest (z.B. auf $\lambda = 0.5$, $\omega_{ext} = 0.667$) und variieren Sie A.

- Lösung

Aufgabe 30

- Experimentieren Sie mit dem Applet Anfangsbedingungen beim chaotischen Pendel.

  a. Bestimmen Sie den Lyapunov-Exponenten für Änderungen des Anfangswinkels. Verwenden Sie die Parameterwerte
     - $\lambda = 0.5$
     - $\omega_{ext} = 0.667$
     - $A = 1.22$

  b. Wie lange kann man den Winkel maximal vorhersagen bei einer relativen Messgenauigkeit von 10^{-7} (≙ 0.1") oder von 10^{-15} (Genauigkeit von Rechner-Werten)?

- Lösung

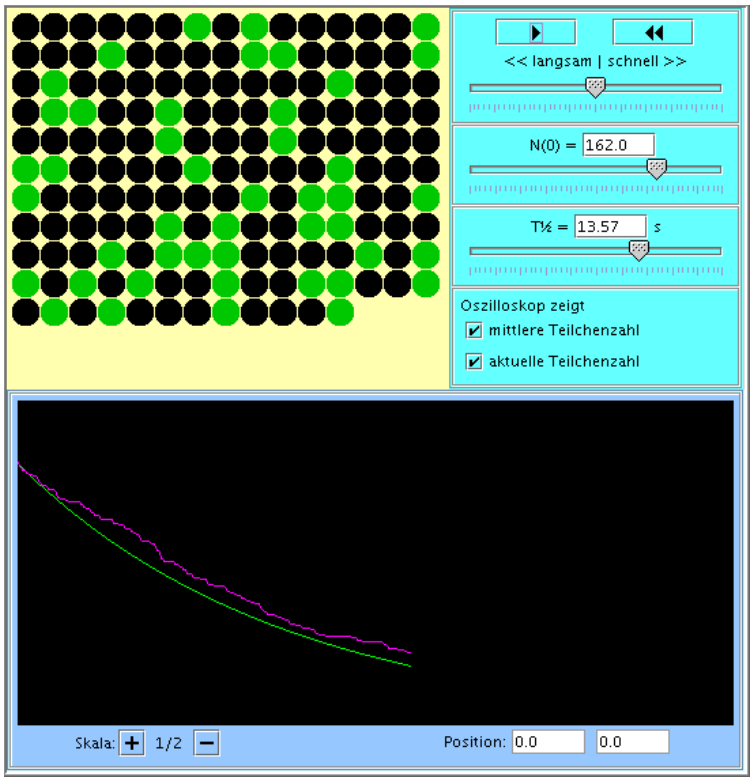
Anhang

- Applets
- Literatur
- Nachweise

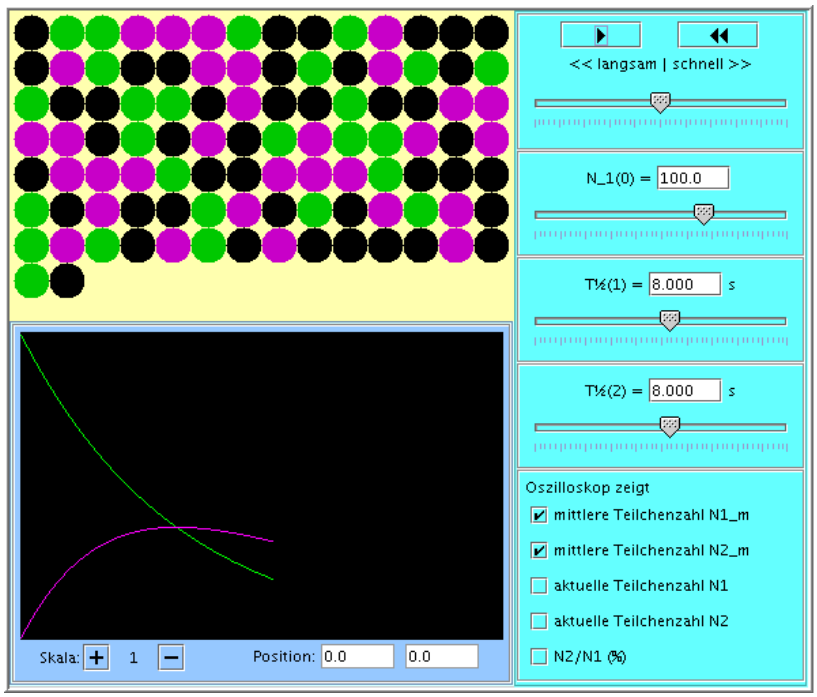
Applets

- Radioaktiver Zerfall
- Radioaktives Gleichgewicht
- Radioaktive Zerfallsketten
- Mathematisches Pendel
- Mathematisches Pendel im Phasenraum
- Mathematisches Pendel mit Anregung
- Chaotisches Pendel im Phasenraum
- Poincare-Schnitt beim chaotischen Pendel
- Anfangsbedingungen beim chaotischen Pendel

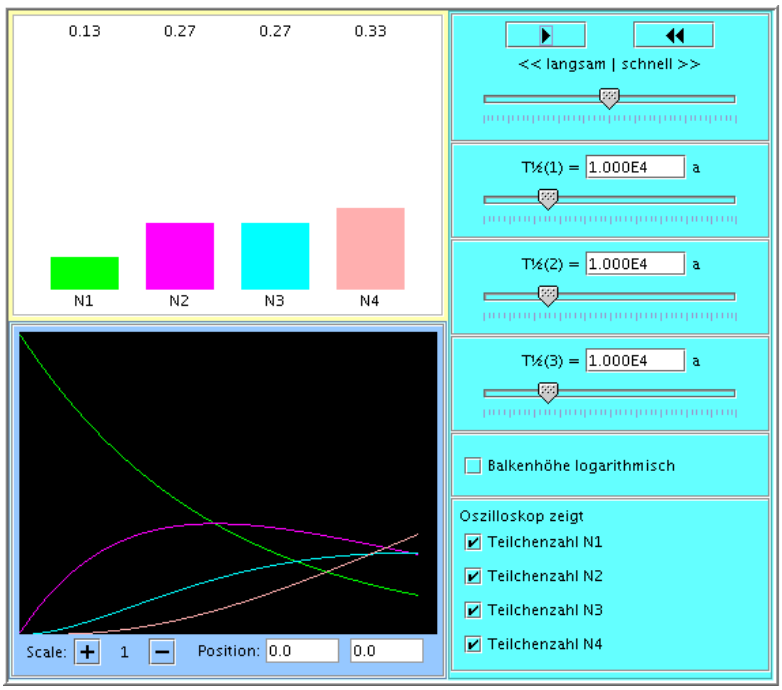
Radioaktiver Zerfall



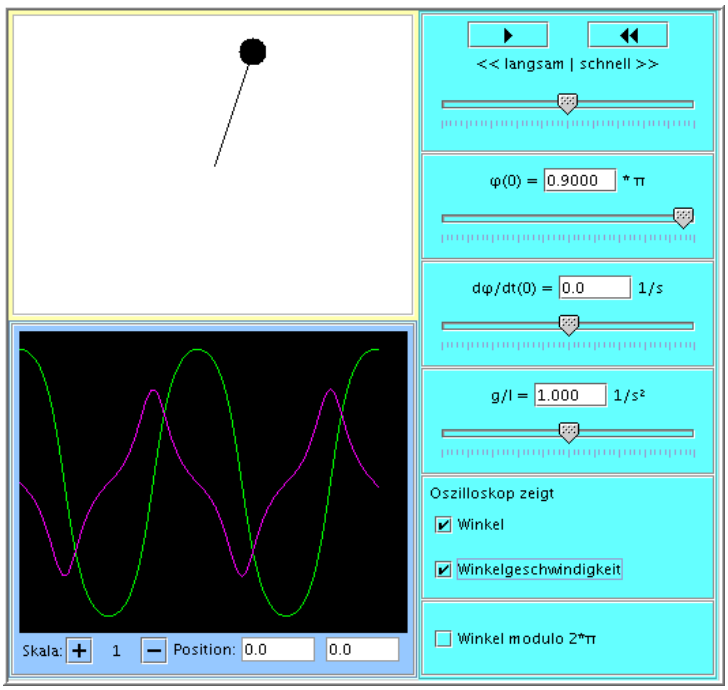
Radioaktives Gleichgewicht



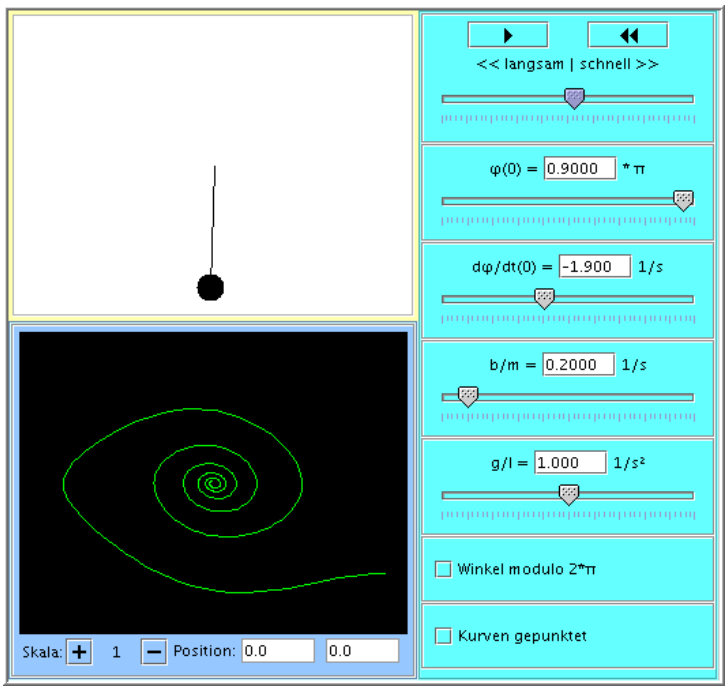
Radioaktive Zerfallsketten



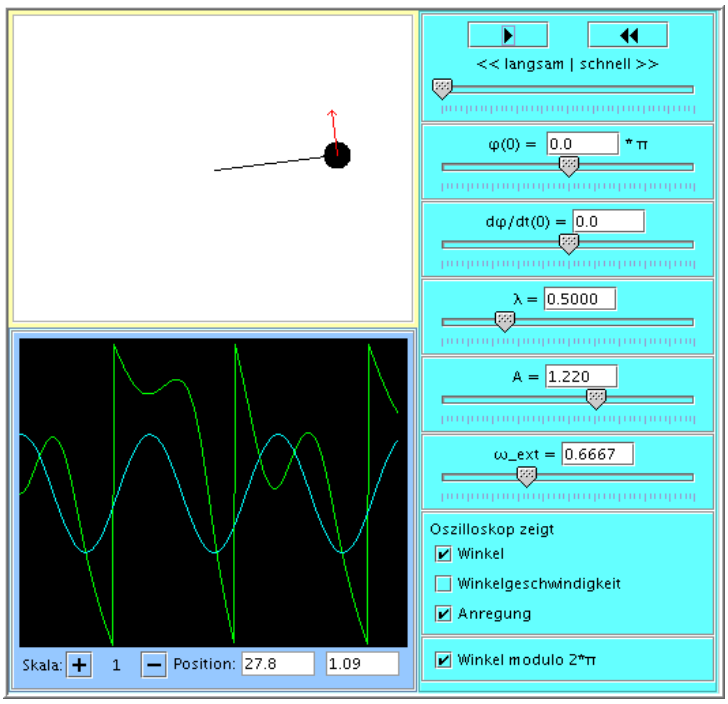
Mathematisches Pendel



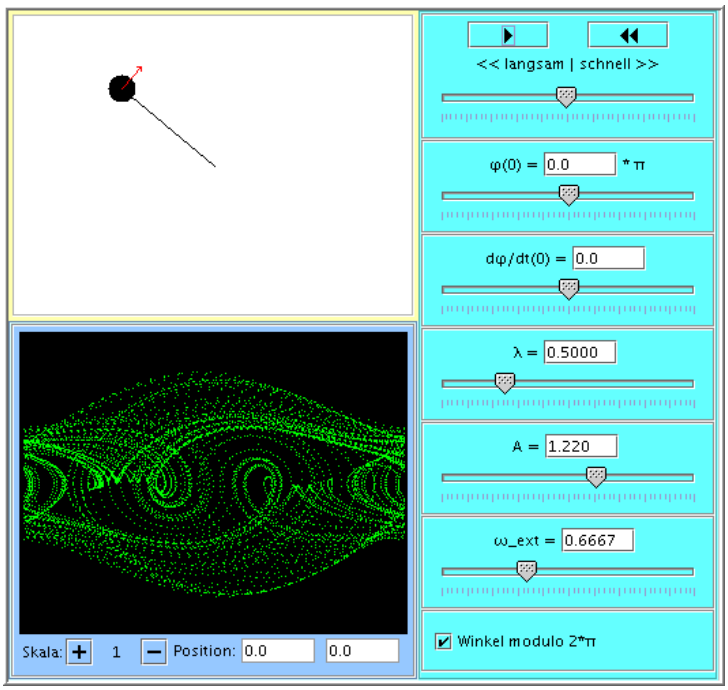
Mathematisches Pendel im Phasenraum



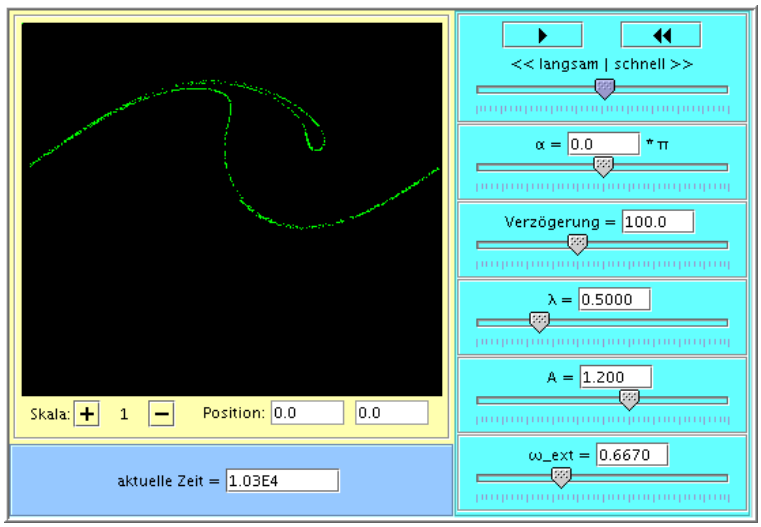
Mathematisches Pendel mit Anregung



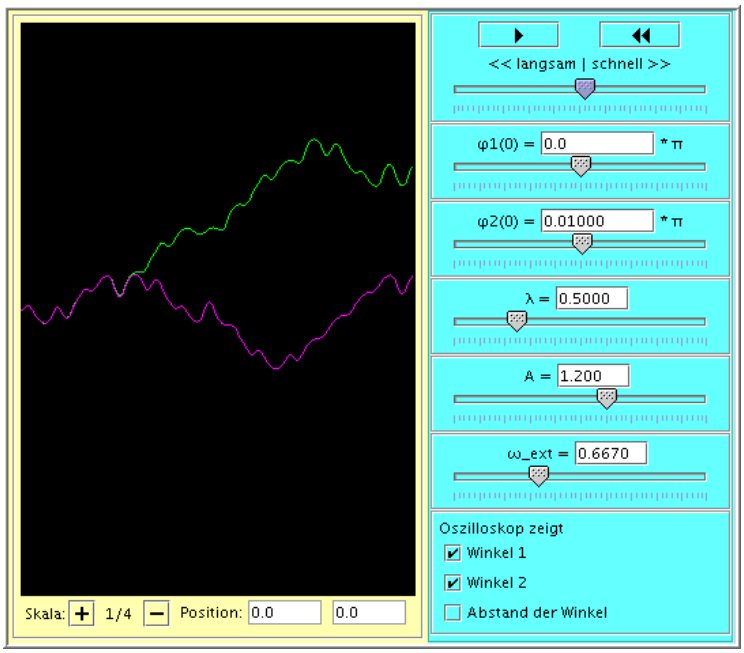
Chaotisches Pendel im Phasenraum



Poincare-Schnitt beim chaotischen Pendel



Anfangsbedingungen beim chaotischen Pendel



Literatur

1. Hering, Martin, Stohrer: Physik für Ingenieure
   Springer, 8. Aufl. 2002 , ISBN: 3-540-42964-6

2. Stöcker (Hrsg): Taschenbuch der Physik mit Multiplattform-CD-ROM
   Verlag Harri Deutsch, 5. Aufl. 2004, ISBN 3-8171-1721-3

3. Bauer, Benenson, Westfall: cliXX Physik
   Verlag Harri Deutsch, Version 2.1, 2004, ISBN 3-8171-1719-1

4. Halliday, Resnick, Walker: Fundamentals of Physics Extended
   Wiley, 5th Edition 1997, ISBN 0-471-10559-7

5. H. Pietschmann: Quantenmechanik verstehen
   Springer 2003, ISBN 3-540-42977-8

6. A. Zeilinger: Einsteins Schleier - Die neue Welt der Quantenphysik
   Beck 2003, ISBN 3-406-50281-4

7. S. Arroyo Camejo: Skurrile Quantenwelt
   Springer 2006, ISBN 3-540-29720-0

8. Turtur: Prüfungstrainer Physik
   Teubner 2007, ISBN: 978-3-8351-0137-1

9. Hänsel, Neumann: Physik - Mechanik und Wärmelehre
   Spektrum Akademischer Verlag 1993, ISBN 3-86025-046-9

10. R.Sexl, H.Sexl: Weiße Zwerge - schwarze Löcher
    rororo 1975, ISBN 3-499-27014-5

11. S. H. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos
    Perseus Books 1994, ISBN 0-201-54344-3

12. F.-J. Elmer: The Pendulum Lab
    http://monet.physik.unibas.ch/~elmer/pendulum/index.html

13. B. Fraser: The Nonlinear Lab
    http://www.apmaths.uwo.ca/~bfraser/index.html

14. G.L.Baker, J.P.Gollub: Chaotic Dynamics : An Introduction
    Cambridge University Press, 2. Aufl. 1996, ISBN: 0521471060

15. Kapitaniak: Chaos for Engineers
    Springer, 2. Auflage 2000, ISBN 3-540-66574-9

Nachweise

- Bilder:
  - Bild 13 basiert auf dem Bild Double-slit experiment results Tanamura 2.jpg aus der freien Mediendatenbank Wikimedia Commons und steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation. Der Urheber des Bildes ist Dr. Tanamura.
  - Bild 18 basiert auf dem Bild Atomic orbitals spdf m-eigenstates mpositive.png aus der freien Mediendatenbank Wikimedia Commons und steht unter der Creative-Commons-Lizenz BY-SA 4.0 für freie Dokumentation. Der Urheber des Bildes ist User:Geek3.
  - Bild 20 basiert auf dem Bild MRI head side.jpg aus der freien Mediendatenbank Wikimedia Commons und steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation. Der Urheber des Bildes ist User:TheBrain.
  - Bild 21 basiert auf dem Artikel Periodensystem aus der freien Enzyklopädie Wikipedia und steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation.
  - Bild 33 basiert auf der Chart of Nuclides des National Nuclear Data Center (USA), mit freundlicher Genehmigung des National Nuclear Data Center.
  - Bild 37 basiert auf dem Bild Nuclear power plant pwr diagram de.png aus der freien Mediendatenbank Wikimedia Commons und steht unter der GNU-Lizenz für freie Dokumentation. Der Urheber des Bildes ist User:San Jose.

Lösung von Aufgabe 1

- Grundlegendes Problem:

  Die Rakete hat auf dem Rundflug bzw. Hin- und Rückflug verschiedenes v (Richtung!) → kein Inertialsystem

  Analyse i. F. für Teil c (für a/b schwierig, Ergebnis stimmt aber auch da)

  Lösung: Hin- und Rückflug jeweils einzeln betrachten

  Ereignisse für den Hinflug:
  - E_1: Rakete startet auf der Erde
  - E_2: Rakete landet bei Alpha Centauri

  Damit klar: System R (Rakete) ist das Eigensystem, nicht System E (Erde)

  Effekt auf Hin- und Rückflug gleich groß, kann also mit der gleichen Formel erledigt werden

- Berechnung der Zeitdifferenz:

  Effekt der Zeitdilatation

$$\Delta t_E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Delta t_R$$

  Zeitunterschied zwischen Erde und Raumschiff daher

$$\begin{aligned} t_{\text{diff}} &= \Delta t_E - \Delta t_R \\ &= \Delta t_E - \Delta t_E\sqrt{1-\beta^2} \\ &= \Delta t_E\left(1-\sqrt{1-\beta^2}\right) \end{aligned}$$

  Für $\beta << 1$ gilt die Näherungsformel

$$\begin{aligned} \sqrt{1-\beta^2} &\approx 1-\frac{1}{2}\beta^2 \\ \Rightarrow \quad t_{\text{diff}} &\approx \Delta t_E\left(1-(1-\frac{1}{2}\beta^2)\right) \\ &= \frac{1}{2}\beta^2\Delta t_E \end{aligned}$$

- Damit:

  a. im Jumbo mit Näherungsformel:

     $\beta = 2.038 \cdot 10^{-6}$

     $\Rightarrow t_{\text{diff}} = 2.513\ \mu s$

  b. das gleiche für die ISS:

     $\beta = 2.594 \cdot 10^{-5}$

     $\Rightarrow t_{\text{diff}} = 3.489$ ms (Monat zu 30 Tagen)

  c. zunächst die Reisezeit von der Erde aus:

     $t_E = 2 \cdot 4.3\ a/0.9 = 9.556\ a$

     Damit (direkt, ohne die Näherungsformel):

     $t_{\text{diff}} = 5.390\ a$

Lösung von Aufgabe 2

a. Vergleich der Zeiten:

im Erdsystem:

$t_{Erde} = h_{Erde} / v_{Myon} = 41.041\ \mu s$

im Eigensystem:

$t_{Myon} = t_{Erde} \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = 1.8350\ \mu s$

b. im Eigensystem des Myons:

Strecke bis zum Boden ist verkürzt:

$h_{Myon} = h_{Erde} \cdot \sqrt{1-(v/c)^2} = 0.54994\ km$

Daher ist die Geschwindigkeit, mit der die Erde auf das Myon zurast:

$v = h_{Myon} / t_{Myon} = 0.999 \cdot 300000\ km/s$

also genauso groß wie im Erdsystem (mit anderem Vorzeichen natürlich)

Lösung von Aufgabe 3

- Zum System S', in dem Teilchen 1 ruht, bewegt sich System S mit 0.9c, In diesem wiederum Teilchen 2 mit 0.9c. Die Additionsformel liefert also:
  - $u_{rel} = (u' + v) / (1 + u'v/c^2) = 0.9945\ c$
- Insbesondere ist die Relativgeschwindigkeit kleiner als c.

Lösung von Aufgabe 4

a. Proton-Energie:

$E = 3.0 \cdot 10^{20}$ eV = 11.49 cal

das heisst, das Proton hatte genug Energie, um 11.49 g Wasser um ein Grad zu erwärmen

b. Geschwindigkeit des Protons:

Zunächst γ:

$E = E_0 + E_{kin} = E_0\,\gamma$

$\Rightarrow \gamma = 1 + E_{kin}/E_0 = 3.198 \cdot 10^{11}$

Zur Berechnung von β = v/c müssen wir wieder die Näherungsformel anwenden:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \Rightarrow \quad \beta &= \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \\ &\approx 1-\frac{1}{2\gamma^2} \\ \Rightarrow \quad 1-\beta &= \frac{1}{2\gamma^2} = 4.888 \cdot 10^{-24} \end{aligned}$$

c. Da v ≈ c, war es in unserem System t_{Erde} 25000 Jahre unterwegs. Im Eigensystem ist das

$t_0 = t_{Erde}/\gamma = 2.467$ s

Lösung von Aufgabe 5

a. Massenverbrauch pro Zeit:

$\dot{m} = P/c^2$

$= 1000\ \text{MW} / (2.998 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2$

$= 1.113 \cdot 10^{-8}\ \text{kg/s}$

$= 0.3511\ \text{kg/a}$

b. analog:

$\dot{m} = 3.8 \cdot 10^{26}\ \text{W} / (2.998 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2 = 4.228 \cdot 10^9\ \text{kg/s}$

$T = m_{Sonne} / \dot{m} = 1.492 \cdot 10^{13}\ \text{a}$

Lösung von Aufgabe 6

- Energie eines Photons:

  $E = h\,f = h\,c\,/\,\lambda = 3.367 \cdot 10^{-19}$ J

- Anzahl $\dot{N}$ emittierter Photonen pro Sekunde bei Stahlungsleistung P = 20 W:

  $\dot{N} = P/E = 5.940 \cdot 10^{19}$ Photonen/s

Lösung von Aufgabe 7

- Energie des Photons muss größer als die Austrittsarbeit sein:

  $E_{ph} = h\,c / \lambda > W_A$

  $\Rightarrow \lambda < hc / W_A$

a. Cäsium:

   $W_A = 2.14$ eV, 1 eV = $1.602 \cdot 10^{-19}$ J

   $\Rightarrow \lambda < 580$ nm (gelbes Licht)

b. Platin:

   $W_A = 5.32$ eV

   $\Rightarrow \lambda < 233$ nm (UV-Licht)

Lösung von Aufgabe 8

- Wellenlänge der einfallenden Strahlung:

  $\lambda = hc/E = 22.14$ pm

- Verschiebung durch den Compton-Effekt:

  $\Delta\lambda = h/(mc)\ (1 - \cos\varphi) = 2.215$ pm

  mit $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ kg

  $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 24.36$ pm

Lösung von Aufgabe 9

- Energie E = 1 keV

  $E = 1/2\ m\ v^2 = p^2 / (2m)$

  $\Rightarrow p = \sqrt{2mE} = 1.708 \cdot 10^{-23}$ kg m/s

  $\lambda = h/p = 3.879 \cdot 10^{-11}$m

  Test: $v = p/m = 1.875 \cdot 10^7$ m/s = 6.256% c → nicht-relativistische Rechnung ist noch ok.

- Energie E = 100 keV

  $E = 1/2\ m\ v^2 = p^2 / (2m)$

  $\Rightarrow p = \sqrt{2mE} = 1.708 \cdot 10^{-22}$ kg m/s

  $\lambda = h/p = 3.879 \cdot 10^{-12}$m

  Test: $v = p/m = 1.875 \cdot 10^8$ m/s = 62.56% c → relativistische Rechnung nötig!

- relativistische Rechnung für E = 100 keV:

$$
\begin{aligned}
E_{kin} &= E - E_0 = (\gamma - 1)mc^2 = 1.602 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \\
\Rightarrow \quad \gamma &= 1 + \frac{E_{kin}}{mc^2} = 1.1957 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
\Rightarrow \quad \beta &= \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 0.5482 \\
\Rightarrow \quad p &= \gamma m v = \gamma m c \beta = 1.790 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg\,m/s} \\
\Rightarrow \quad \lambda &= \frac{h}{p} = 3.702 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Lösung von Aufgabe 10

a. nichtrelativistisch:

$\Delta p = h/(4\pi\ \Delta x)$

$\Rightarrow \Delta v = h/(4\pi\ m\ \Delta x) = 1.58 \cdot 10^8$ m/s = 52.6% c

relativistisch rechnen!

b. relativistisch:

Berücksichtigt man beim Impuls den relativistischen Massenzuwachs, erhält man

$$\Delta p = m_0 \gamma v = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{h}{4\pi \Delta x}$$

was man problemlos nach v auflösen kann. Eigentlich interessiert aber eher β = v / c, also kann man etwas eleganter schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \beta c}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{h}{4\pi \Delta x} \\ \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{h}{4\pi m_0 c \Delta x} = 0.5256 =: a \\ \Rightarrow \quad \beta &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2+1}} = 0.4653 \end{aligned}$$

Kernphysik ist immer relativistisch!

Lösung von Aufgabe 11

- Beim H-Atom : -13.6 eV

  Energie $\sim Z^2$, also

  E_{Cs} = - 41.1 keV

Lösung von Aufgabe 12

- Aus der Wellenlänge erhält man die Energie des Übergangs, die man mit den Energien der Übergänge des H-Atoms vergleichen muss:

$$
\begin{aligned}
E = hf = \frac{hc}{\lambda} &= E_0\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \\
\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) &= -\frac{hc}{\lambda E_0} = 0.1389
\end{aligned}
$$

- Ausprobieren einiger Werte für n und m liefert

  m = 2, n = 3

- Hinweis: Dass die Werte u. U. nicht ganz stimmen, kann an zu ungenauen Werten für die physikalischen Konstanten liegen. Verwenden Sie Werte aus einer genaueren Tabelle! Ein zweiter Grund liegt darin, dass die Energieniveaus des H-Atoms gegenüber unserer Theorie leicht verschoben sind, z. B. durch relativistische Effekte.

Lösung von Aufgabe 13

- Für n = 4 gibt es für die Drehimpulsquantenzahl l die Möglichkeiten l = 0, 1, 2, 3. Dafür jeweils:

l	m	m_s	Anzahl
0	0	±1/2	2
1	-1, 0, 1	±1/2	6
2	-2, -1, 0, 1, 2	±1/2	10
3	-3,- 2,-1,0,1,2,3	±1/2	14

- Gesamtanzahl der Zustände:

  Anzahl = 32 = 2 n^2

- Energie:

  $E_4 = E_0 \cdot 1/16 = -13.6\ eV/16 = -0.85\ eV$

Lösung von Aufgabe 14

- Energie des magnetischen Moments des Protons im Magnetfeld:

$$E = -g_I \frac{e}{m_P} \vec{S}\vec{B}$$

- Spin-Zustände spalten auf in Niveaus $S_Z = \pm \hbar/2$ parallel und antiparallel zum Magnetfeld. Der Energie-Unterschied beträgt:

$$\Delta E = g_I \frac{e}{m_P} \hbar B$$

- Diese Energie soll gerade durch die Radiowellen aufgebracht werden:

$$\begin{aligned} \Delta E &= hf = \hbar 2\pi f \\ \Rightarrow \quad B &= 2\pi f \frac{m_P}{e g_I} = 1.175 \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{As}^2} = 1.175 \, \mathrm{T} \quad (\mathrm{Tesla}) \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 15

- Termschemata

  C: $1s^2\ 2s^2\ 2p^2$

  F: $1s^2\ 2s^2\ 2p^5$

- Fluor fehlt in der äußersten Schale ein Elektron

  → nimmt leicht ein Elektron auf (Halogen)

- Kohlenstoff: 4 Elektronen in der äußeren Schale, 4 fehlen

  → geht vielfältige Verbindungen ein

Lösung von Aufgabe 16

a. Die Energiedifferenz der Niveaus ergibt sich aus der Wellenlänge zu

$\Delta E = h\,f = h\,c/\lambda = 3.612 \cdot 10^{-19}$ J

Mit der Boltzmann-Verteilung

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}}$$

bestimmen wir:

$\Rightarrow \Delta E/(k_B\,T) = 87.18$

$\Rightarrow N_2/N_1 = 1.378 \cdot 10^{-38}$

b. Auflösen nach der Temperatur:

$$\begin{aligned} T &= -\frac{\Delta E}{k_B \ln(N_2/N_1)} \\ &= 3.773 \cdot 10^4\,\mathrm{K} \end{aligned}$$

c. gleiche Formel mit $N_2/N_1 = 3$ ergibt

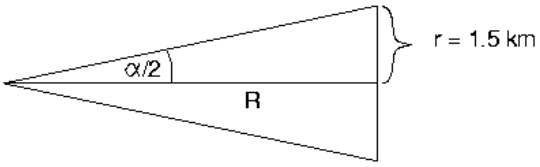
$T = -2.381 \cdot 10^4$ K

Lösung von Aufgabe 17

a. Aus s = c t erhält man die Zeitungenauigkeit

$\Delta t = \Delta s/c = 5 \cdot 10^{-10}$ s = 0.5 ns

b. Der Skizze



entnimmt man

$\tan \alpha/2 = r/R$

Also mit r = 1.5 km

$\alpha = 7.8 \cdot 10^{-6} \triangleq 0.00045° = 1.6''$

Lösung von Aufgabe 18

- Für einen Kern der Massenzahl A gilt

  $m \approx A\, m_u$

  $V \approx 4/3\, \pi\, R^3 = 4/3\, \pi\, R_0^3\, A$

  $\Rightarrow\ \rho = 3/(4\pi)\, m_u/R_0^3 = 2.3 \cdot 10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$

- Masse des Balls bei Radius r = 1.5 cm:

  $$\begin{aligned} m &= \rho\, V \\ &= \rho\, 4/3\, \pi\, r^3 \\ &= 3.25 \cdot 10^{12}\ \mathrm{kg} \\ &\approx 3\ \text{Mrd. t} \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 19

- Zunächst bestimmen wir die Anzahl N der ^{40}K-Atome in der Probe:

  Zahl der Mole

  $n_{KCl} = m / M_{KCl} = 3.63 \cdot 10^{-2}$ mol

  Zahl der KCl-Moleküle:

  $N_{KCl} = N_A\, n_{KCl} = 2.19 \cdot 10^{22}$

  Zahl der 40K-Atome:

  $N = 1.17/100\, N_{KCl} = 2.56 \cdot 10^{20}$

- Damit erhält man die Zerfallskonstante λ aus dem radioaktiven Zerfallsgesetz:

  $A = -dN/dt = \lambda N$

  $\Rightarrow \quad \lambda = A / N = 1.75 \cdot 10^{-17}$ 1/s

- Daher beträgt die Halbwertszeit

  $T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda$
  $= 3.95 \cdot 10^{16}$ s
  $= 1.25 \cdot 10^{9}$ a

Lösung von Aufgabe 20

- Aus dem Zerfallsgesetz ergibt sich die Aktivität heute, nach einer Zeit t_0:
  - $A(t_0) = A_0\, e^{-\lambda\, t_0}$

    $\Rightarrow \quad t_0 = 1/\lambda \ln(A_0/A(t_0))$
- Wir ersetzen die Zerfallskonstante durch $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2}$ und erhalten

  $t_0 = 1/(\ln 2)\, T_{1/2} \ln(A_0/A(t_0))$
- Die Aktivität eines Gramms der Holzkohle beträgt

  $A(t_0) = 63.0/5\ 1/\text{min} = 12.6/\text{min}$,
- eingesetzt liefert das

  $t_0 = 1605\ \text{a}$

Lösung von Aufgabe 21

- Energie der Bombe:

  $E_{Bombe} = 13000\ 4.2 \cdot 10^{9}\ J = 5.46 \cdot 10^{13}\ J$

- Energie eines Zerfalls:

  $E_1 = 200\ MeV = 3.2 \cdot 10^{-11}\ J$

- Daher Zahl N der Zerfälle:

  $N = E_{Bombe}/E_1 = 1.7 \cdot 10^{24}$

- Masse m_U eines ^{235}U

  $m_U \approx 235\ m_u = 3.9 \cdot 10^{-25}\ kg$

- Daher Gesamtmasse m des gespaltenen ^{235}U:

  $m = N\ m_U = 0.66\ kg$

Lösung von Aufgabe 22

- mittleres Geschwindigkeitsquadrat:

  $1/2\ m\ \overline{v^2} = 3/2\ k_B\ T$

  $\Rightarrow \quad \overline{v^2} = 3\ k_B\ T\ /\ m = 3\ k_B\ T\ /\ (M_{rel}\ m_u)$

- Damit:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\overline{v^2}_{N_2}} &= 493.3\,\mathrm{m/s} \\
\sqrt{\overline{v^2}_{H_2O}} &= 615.2\,\mathrm{m/s} \\
\sqrt{\overline{v^2}_{CO_2}} &= 393.5\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 23

- Aus der Gasgleichung

  $$p\,V = N\,k_B\,T$$

  erhält man die Teilchendichte

  $$\frac{N}{V} = \frac{p}{k_B T} = 2.414 \cdot 10^{25}\,\frac{1}{\mathrm{m}^3}$$

- Mit der Masse eines Stickstoffmoleküls

  $$m_{N_2} = 28\,m_u = 4.651 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$$

  ist die Massendichte daher

  $$\rho = \frac{m}{V} = m_{N_2}\frac{N}{V} = 1.123\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Lösung von Aufgabe 24

- benötigte Mindestgeschwindigkeit v_0:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}mv_0^2 &= E_0 \\ \Rightarrow \quad v_0 &= \sqrt{2E_0/m} = 2624.9\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

- Anteil q_T bei Temperatur T:

$$\begin{aligned} q_T &= \int_{v_0}^{\infty} f(v)dv \\ &= 1 - N(v_0) \end{aligned}$$

- Berechnung der Hilfsgröße x_1:

$$x_1 = \sqrt{\frac{mv_0^2}{2k_BT_1}} = 6.218$$

analog

$x_2 = 3.590$

- Mit den angegebenen Werten der Fehlerfunktion also

$$q_{T_1} = 1 - \mathrm{erf}(x_1) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}x_1e^{-x_1^2} = 1.144 \cdot 10^{-16}$$

ebenso

$q_{T_2} = 1.061 \cdot 10^{-5}$

- Der Anteil nimmt bei Erhöhung von 300 K auf 900 K um 10^{11} zu! Chemische Reaktionen sind sehr stark temperaturabhängig.

Lösung von Aufgabe 25

n	Mikrozustände	W	p	S [10^{-23} J/K]
0	111111	1	0.0156	0
1	111110, 111101, 111011, 110111, 101111, 011111	6	0.0938	2.474
2	111100, 111010, 110110, 101110, 011110, 111001, 110101, 101101, 011101, 110011, 101011, 011011, 100111, 010111, 001111	15	0.2344	3.740
3	111000, 110100, 101100, 011100, 110010, 101010, 011010, 100110, 010110, 001110, 110001, 101001, 011001, 100101, 010101, 001101, 100011, 010011, 001011, 000111	20	0.3125	4.137
4	110000, 101000, 011000, 100100, 010100, 001100, 100010, 010010, 001010, 000110, 100001, 010001, 001001, 000101, 000011	15	0.2344	3.740
5	100000, 010000, 001000, 000100, 000010, 000001	6	0.0938	2.474
6	000000	1	0.0156	0

Lösung von Aufgabe 26

- Die Entropie ist allgemein

$$S(n) = k_B(N \ln N - n \ln n - (N-n)\ln(N-n))$$

- Für n_1 = 0.45*N erhält man

$$\begin{aligned} S(n_1) &= k_B(N \ln N - 0.45N \ln(0.45N) - 0.55N \ln(0.55N)) \\ &= Nk_B(-0.45 \ln 0.45 - 0.55 \ln 0.55) \\ &= 0.6881 Nk_B \end{aligned}$$

- Analog ist für n_2 = 0.5 N

$$S(n_2) = Nk_B \ln 2 = 0.6931 Nk_B$$

- Die gesamte Entropiedifferenz ist also

$$\Delta S = S(n_2) - S(n_1) = 0.04150 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Lösung von Aufgabe 27

a. Anfangsauslenkung gegeben:

Die Bewegungsgleichung des Pendels

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\varphi) = 0$$

wird mit der angegebenen Näherung zu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi - \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi^3 = 0$$

Dies ist die Duffing-Gleichung mit μ = 1 und

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 3.502\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die genäherte Frequenz-Amplituden-Beziehung ergibt somit

$$\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{8}\varphi_0^2\right) = 2.912\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Die entsprechende Schwingungsdauer beträgt somit

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.158\,\mathrm{s}$$

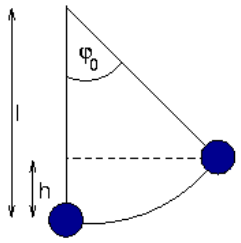
b. Anfangsgeschwindigkeit gegeben:

Zunächst wird die Amplitude φ_0 aus der Energieerhaltung bestimmt

Energie am Anfang

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Energie bei maximaler Auslenkung



$$E = mgh = mgl(1 - \cos(\varphi_0))$$

Gleichsetzen liefert

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_0) &= 1 - \frac{v_0^2}{2gl} \\ \Rightarrow \quad \varphi_0 &= 1.13 \mathrel{\hat{=}} 64.75^\circ \end{aligned}$$

Die Schwingungsdauer folgt damit wie in a. zu

T = 1.957 s

Lösung von Aufgabe 28

a. Messungen:

Tricks zur Verbesserung der Genauigkeit:

- Periode über mehrere Schwingungen messen und dividieren
- bei kleinen Amplituden Oszilloskop-Skala anpassen

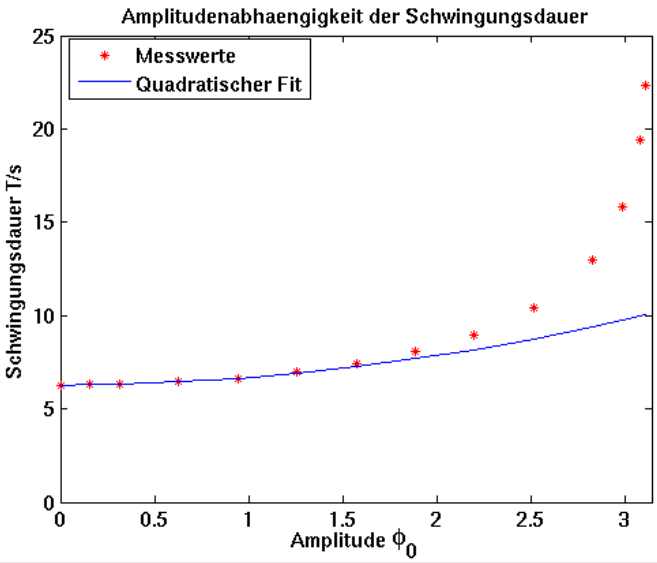
Für $\varphi_0 \to 0.0$ ist harmonische Näherung exakt, daher

$$T(\varphi_0) = 2\pi/\omega_0$$

Messwerte für $\omega_0 = 1.0/s$

φ_0/π	T/s
0.0	6.28
0.05	6.30
0.1	6.32
0.2	6.45
0.3	6.65
0.4	6.96
0.5	7.43
0.6	8.07
0.7	8.97
0.8	10.4
0.9	13.0
0.95	15.8
0.98	19.4
0.99	22.3

graphisch



b. Quadratischer Fit:

quadratische Näherung für kleine φ_0:

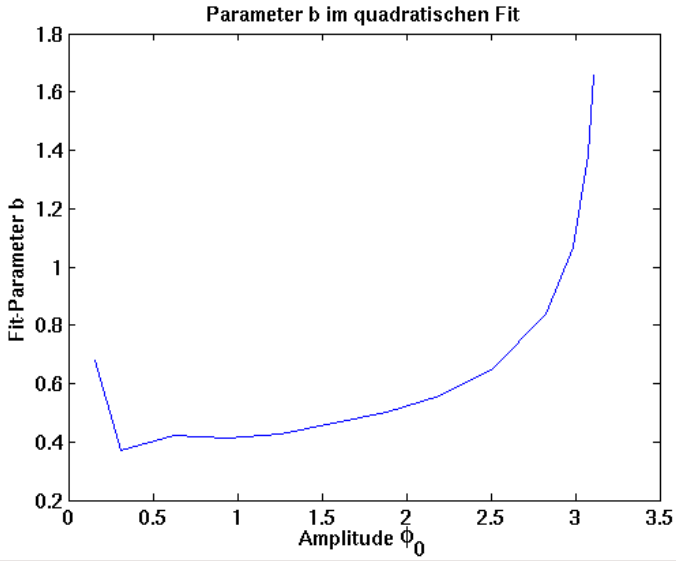
$$T(\varphi_0) \approx 2\pi/\omega_0 + a\,\varphi_0 + b\,\varphi_0^2$$

Wegen $T(\varphi_0) = T(-\varphi_0)$ ist $a = 0$.

b ergibt sich als Grenzwert

$$b = \lim_{\varphi \to 0} \frac{T(\varphi) - T(0)}{\varphi^2}$$

aus den Daten ergibt sich



Werte bei ganz kleinen φ schlecht wegen Rundungsproblemen. Ansonsten:

b ≈ 0.4

Nach Aufgabe 26 ist die Kreisfrequenz bei nicht zu großer Anfangsauslenkung

$$\omega^2 \approx \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{8}\varphi_0^2\right)$$

Die Schwingungsdauer beträgt daher

$$\begin{aligned} T(\varphi_0) &= \frac{2\pi}{\omega(\varphi_0)} \\ &\approx \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{8}\varphi_0^2}} \\ &\approx \frac{2\pi}{\omega_0} \left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2\right) \end{aligned}$$

Daher ist der Parameter b

$$b = \frac{\pi}{8\omega_0} = 0.3927s$$

in guter Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert.

Lösung von Aufgabe 29

- Tips zur Vorgehensweise:

  am besten im Poincareschnitt-Applet Zahl der Punkte zählen

  Zahl der Einschwingpunkte, die nicht angezeigt werden, zur Kontrolle höher setzen

  in kritischen Fällen ganz hohe Verzögerung (Geduld!)

  bei unerwartetem Ergebnis (z.B. Periode 3) im Orts- und Phasenraum Ergebnis studieren

- einige Messwerte bei den Standardwerten

A	Verhalten
1.0	Periode 1
1.05	Periode 1
1.06	Periode 1
1.07	Periode 2
1.10	Periode 3
1.12	Periode 3
1.14	Periode 3
1.15	chaotisch
1.20	chaotisch
1.25	chaotisch
1.28	chaotisch?
1.29	Periode 2
1.30	Periode 1
1.35	Periode 1
1.45	Periode 2
1.47	Periode 4
1.48	Periode 8
1.49	Periode 2
1.50	chaotisch
1.75	chaotisch
2.00	chaotisch

- Bemerkungen:

  Periode 3 ist ungewöhnlich

  Bei A = 1.28 kurze Linie im Phasendiagramm
  - Chaos oder hohe Periode ?
  - im Rahmen der Genauigkeit des Applets nicht sicher zu sagen

  auch bei größeren Anregungen Regionen ohne Chaos

Lösung von Aufgabe 30

a. Bestimmung des Lyapunov-Exponenten:

Für eine kleine Änderung $d\varphi_0$ der Anfangsauslenkung ergibt sich der Fehler d zu

$$d = d\varphi_0 \, e^{\lambda t}$$

Der Lyapunov-Exponent ist daher

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \frac{d}{d\varphi_0}$$

im Grenzwert kleiner $d\varphi_0$.

Zu gegebenem $d\varphi_0$ (bei $\varphi_0 = 0$) wird die Zeit t gemessen, bis der Abstand der Winkel gerade d = 0.2 beträgt. Berechnung der zugehörigen λ-Werte liefert

$d\varphi_0$	t	λ
10^{-5}	85.0	0.1165
10^{-6}	94.5	0.1292
10^{-7}	123	0.1180
10^{-8}	150.5	0.1117
10^{-9}	161.5	0.1184
10^{-10}	173.5	0.1234
10^{-11}	231	0.1027
10^{-12}	256	0.1016
10^{-13}	268	0.1057
$1.1 \cdot 10^{-14}$	295	0.1035

im Rahmen der Genauigkeit kann man daher den Lyapunov-Exponenten abschätzen zu

$\lambda = 0.10$

b. Vorhersage-Horizont:

T_H erhält man aus

$$T_H = -\frac{\ln(\epsilon)}{\lambda}$$

mit dem Wert für λ zu

$T_H(10^{-7}) = 161$

$T_H(10^{-15}) = 345$