Euler-Lagrange-Gleichungen

1. Variablen q_i, kartesische Koordinaten der Massen $\vec{x}_j$ mit q_i ausdrücken
2. kinetische Energie T und potenzielle Energie V mit q_i ausdrücken

$$L := T - V \qquad \text{Lagrange-Funktion}$$

3. ggf. zusätzliche äußere Kräfte $\vec{F}_j$ auf q_i umrechnen

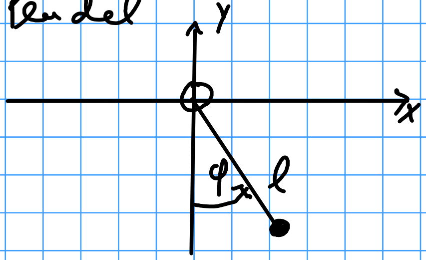
$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial q_j}$$

4. Berechnen der Bewegungsgleichungen aus den Euler-Lagrange-Gln:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Einfaches Beispiel

Pendel



$$q_1 = \varphi \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} l \sin\varphi \\ -l\cos\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}} = l \begin{pmatrix} \dot\varphi \cos\varphi \\ \dot\varphi \sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)$$

$$= \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2$$

$$V = mgy = -mgl\cos\varphi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot\varphi^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \dot\varphi \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = m l^2 \ddot\varphi$$

E-L-Gl.
$$m l^2 \ddot\varphi + mgl\sin\varphi = 0 \quad \Big| : m l^2$$

$$\boxed{\ddot\varphi + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0}$$