Beispiele für Differentialgleichungen

$$\frac{dN}{dt} = \dot{N} = N'$$

(DGL / ODE)

1. Radioaktiver Zerfall

   $N(t)$ Kerne, Zerfallskonstante λ

   $$\dot{N} = -\lambda N$$

2. Radioaktive Zerfallskette

   Teilchensorte 1: $N_1(t)$, λ_1

   Zerfallsprodukt 2: $N_2(t)$, λ_2

   $$\dot{N}_1 = -\lambda_1 N_1$$

   $$\dot{N}_2 = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2$$

3. Angeregte Schwingung mit Dämpfung

   $$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = A\cos(\omega t) =: F(t)$$

Lösungsverfahren von Euler

Idee:

$$\dot N(t) = \lim_{h\to 0} \frac{N(t+h)-N(t)}{h} \overset{\text{kleines } h}{\approx} \frac{N(t+h)-N(t)}{h}$$

im Beispiel 1:

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = -\lambda N(t)$$

$$\Rightarrow \quad N(t+h) = N(t) - \lambda h N(t)$$

$$N(t+h) = (1-h\lambda) N(t) \qquad (*)$$

$t=0$: $N(0) = N_0$

$t=h$: $N(h) = (1-h\lambda) N(0) = (1-h\lambda) N_0$

$t=2h$: $N(2h) = (1-h\lambda) N(h) = (1-h\lambda)^2 N_0$

$\vdots$

$t=(n\cdot)h$: $N(nh) = (1-h\lambda)^n N_0$

Lösungsverfahren in Matlab

Anfangswertproblem:

$$\vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y})$$

$$\vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

Lösen mit "ode solver"

in der Regel: ode45

falls zu langsam: ode15s

immer noch: Experten fragen

Aufruf: [t, y] = ode45(f, [0, tend], y0)

Beispiel-DGLs in Matlab

1.) $y' = \underbrace{-\lambda y}_{f(t,y)}$

$y_0 = 10000$

$\lambda = 0.1$

2.) $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda_1 y_1 \\ \lambda_1 y_1 - \lambda_2 y_2 \end{pmatrix}}_{\vec{f}(t,\vec{y})}$

Rezept:

1. DGL nach höchster Ableitung auflösen
2.* $f(t,y)$ definieren
3. Parameter tend, y_0 definieren
4. ode45 aufrufen

* s.u.

3.) Beispiel 3

$$\ddot{x} = \frac{A}{m}\cos(\omega t) - \frac{b}{m}\dot{x} - \frac{c}{m}x$$

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y}\,' = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \frac{A}{m}\cos(\omega t) - \frac{b}{m}\dot{x} - \frac{c}{m}x \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ \frac{A}{m}\cos(\omega t) - \frac{b}{m}y_2 - \frac{c}{m}y_1 \end{pmatrix}}_{\vec{f}(t,\vec{y})}$$

Rezept:

2. $f(t,y)$ definieren

2a. Zustandsvektor y definieren

2b. Ableitung von y berechnen und mit Komponenten von y ausdrücken