Berechnung von u als Addition von Geschwindigkeiten:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \qquad u' = -u$$

$$= \frac{-u+v}{1-\frac{uv}{c^2}} \quad \Rightarrow \text{ nach } u \text{ auflösen}$$

u in (1) einsetzen und nach m_v auflösen

$$\Rightarrow \quad m_v = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, m = \gamma\, m$$

Bezeichnungen:

Ruhemasse m_0, relativistische Masse m

$$m = \gamma \cdot m_0$$

Herleitung:

$$u = \frac{-u+v}{1-\frac{uv}{c^2}} \qquad \Big| \cdot \left(1-\frac{uv}{c^2}\right)$$

$$u - \frac{u^2 v}{c^2} = -u + v$$

$$\frac{v}{c^2}u^2 - 2u + v = 0 \qquad \Big| \cdot \frac{c^2}{v}$$

$$u^2 - \frac{2c^2}{v}u + c^2 = 0$$

$$u = \frac{c^2}{v} \pm \sqrt{\frac{c^4}{v^2} - c^2}$$

$$= \frac{c^2}{v}\left(1 \overset{(+)}{-} \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$u < v$, daher "$-$"

in (1) einsetzen:

$$m_v v = (m_v + m)u = (m_v + m)\frac{c^2}{v}\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$\frac{v^2}{c^2} m_v = (m_v + m)\left(1 - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)$$

$$\beta^2 m_v = (m_v + m)\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

$$\left(\beta^2 - 1 + \sqrt{1-\beta^2}\right) m_v = m\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)$$

$$\overset{\shortparallel}{\left(\sqrt{1-\beta^2} - \sqrt{1-\beta^2}^{\,2}\right) m_v}$$

$$\overset{\shortparallel}{\sqrt{1-\beta^2}\left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right) m_v} \qquad \Big| : (1-\sqrt{\ })$$

$$\sqrt{1-\beta^2}\, m_v = m$$

$$\Rightarrow \quad m_v = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\, m = \gamma m$$

Impuls

$$p = m \cdot v = \gamma m_0 v$$

Kraft

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m_0 v)$$

$$= m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

$$= m_0 \gamma^3 \frac{dv}{dt} = m_0 \gamma^3 a$$

Energie

$$dE_{kin} = F\,dx = m_0 \gamma^3 \frac{dv}{dt} dx$$

$$= m_0 \gamma^3 v\,dv$$

$$E_{kin} = \int_0^v m_0 \gamma^3 v' dv' = m_0 \int_0^v \frac{v'}{\sqrt{1-v'^2/c^2}^{\,3}}\, dv'$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 (\gamma - 1)$$

Näherung für $\frac{v}{c} \ll 1$

$$\gamma = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)\right)^{-1/2}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x} \quad (|x| \ll 1)$$

$$\approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

$$\Rightarrow E_{kin} \approx m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Ruheenergie $E_0 = m_0 c^2$

$$\boxed{E = E_0 + E_{kin} = \gamma m_0 c^2 = m c^2}$$

	nicht-rel.	relativistisch
v		
p	$m_0 v$	$m_0 \gamma v$
E_{kin}	$\frac{1}{2} m_0 v^2$	$m_0 c^2 (\gamma - 1)$