Mikrozustände im geteilten Kasten

- welches Teilchen ist auf welcher Seite?

  z.B. 1+4 links, 2+3 rechts

  bessere Notation: $0 \hat{=}$ Teilchen links, $1 \hat{=}$ Teilchen rechts, Ziffern hintereinander

  z.B. 0110

Makrozustände

- wie viele Teilchen sind links, wieviele rechts?

  z.B. n Teilchen links ($\Rightarrow$ $4-n$ rechts), $0, 1, \ldots 4$

Makrozustand n	Mikrozustände	W
0	1111	1
1	0111, 1011, 1101, 1110	4
2	0011, 0101, 0110, 1001, 1010, 1100	6
3	0001, 0010, 0100, 1000	4
4	0000	1
		16

$W(n)$ = Zahl der Mikrozustände zu Makrozustand n

Beispiel: N Teilchen im geteilten Volumen

- Ziel: $W(n)$ bestimmen $\qquad n = 0, 1, 2, \ldots N$
- Mikrozustand zu einem Makrozustand n

  wähle n von den N Teilchen beliebig aus (die links sind)

  Wie viele Reihenfolgen der Auswahl gibt es?
- Antwort: $W(n) = \dfrac{N!}{n!\,(N-n)!} = \dbinom{N}{n}$ $\qquad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n)$

  Beweisskizze: Bringe $1 \ldots N$ in eine Reihenfolge (Permutation)
  wähle davon die ersten n

  Zahl der Möglichkeiten: N für 1. Kugel, $N-1$ für 2. Kugel, .. $N-n+1$
  zusammen $N(N-1)\cdots(N-n+1)$

  Teile durch Zahl der Vertauschungen von n Kugeln $P(n) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdots 1 = 6!$

$$\Rightarrow W(n) = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n!} = \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)\cdot(N-n)(N-n-1)\cdots 1}{n!\,(N-n)!} = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}$$

Hypothese des „molekularen Chaos"

$\Rightarrow$ alle Mikrozustände sind gleichwahrscheinlich

$\Rightarrow$ W.keit für Makrozustand $\sim$ # Mikrozustände $(n) = W(n)$

$$p(n) = \frac{W(n)}{\#\text{Mikrozustände}} = \frac{W(n)}{2^N}$$

im konkreten Beispiel # Mikrozustände $= 2^N$

Entropie S

- Maß für die Zahl der Mikrozustände eines Makrozustandes

$S(n) := k_B \ln W(n)$ $\qquad\qquad$ (($S = k \log W$))

Stirlingsche Formel

$$\ln x! \approx x \ln x - x + 1 \qquad (x \gg 1)$$

$$\Rightarrow \quad S(n) \approx k_B \left(N \ln N - n \ln n - (N-n) \ln (N-n) \right)$$