Satz

Ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte, Eigenvektoren unterscheiden sich um Transformationsmatrix U

Beweis

$Ax = \lambda x$ ggb., aufführen $B = UAU^{-1}$

$$\Rightarrow B(Ux) = UAU^{-1} \cdot Ux$$

$$= UAx$$

$$= \lambda (Ux) \quad \text{qed}$$

Analytische Berechnung von Eigenwerten + -vektoren

$$Ax = \lambda x = \lambda \cdot \mathbb{1} x$$

$$(A - \lambda \mathbb{1})\, x = 0$$

$$\det | A - \lambda \mathbb{1} | = 0$$

Beispiel B

$$\left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(4-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = 4.4142 \qquad \lambda_2 = 1.5858$$

1. Eigenvektor

$$(B - \lambda_1 \mathbb{1})\, \vec{x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2.4142 & -1 \\ -1 & -0.4142 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wähle $x = 1$

$$-2.4142\, \underset{1}{x} - 1 \cdot y = 0$$

$\Rightarrow y$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2.4142 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{normieren}} x_1 = \begin{pmatrix} 0.3827 \\ -0.9239 \end{pmatrix}$$

QR-Verfahren

- Idee:

$$A' = U^T A U$$

mit geschickten U (orthogonalen)

- Verfahren

1. suche QR-Zerlegung von A

$$A_0 = A = Q_0 R_0$$

2. vertausche $Q_0 R_0$

$$A_1 = R_0 Q_0$$

3. wiederholen bis Fehler klein genug

$\Rightarrow$ Eigenwerte in Diagonale von A_N

$\Rightarrow$ Eigenvektoren als Spalten von $U = Q_0 \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_N$

A_0 und A_1 sind ähnlich

$$A_0 = QR \Rightarrow R = Q^T A_0$$

$$A_1 = RQ = Q^T A_0 Q$$

Verallgemeinertes Eigenwertproblem (VEP)

$(AB)^T = B^T A^T$

gegeben 2 $n\times n$ - Matrizen A, B

gesucht λ und $x \neq 0$ mit

$$Ax = \lambda Bx$$

wichtiger Spezialfall: A, B symmetrisch, B positiv und nicht singulär („Massenmatrix")

Lösen durch Zurückführen auf normales EP:

- Cholesky-Zerlegung $B = L \cdot L^T$

$$(L^{-1} A (L^{-1})^T)\,\underbrace{(L^T x)}_{} \qquad \underbrace{(L^{-1})^T (L^T}_{1} x) = L^{-1} A x = L^{-1} \cdot \lambda B x$$

$$= \lambda \underbrace{L^{-1} L}_{1} \cdot L^T x = \lambda (L^T x)$$

Vorgehen:

1. EP lösen von $L^{-1} A (L^{-1})^T \rightarrow \lambda, x$
2. λ ist Eigenwert beim VEP
3. $(L^{-1})^T x$ ist Eigenvektor des VEP

Anwendung auf Schwingungsprobleme

DGL: $M\ddot{x} + Cx = 0$

M Massenmatrix, symmetrisch, positiv, normalerweise nicht singulär

C Steifigkeitsmatrix, symmetrisch, positiv

Ansatz $\quad x(t) = \hat{x} \cdot e^{i\omega t}$

$$\dot{x} = \hat{x} \cdot i\omega e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = \hat{x}\,(i\omega)^2 e^{i\omega t} = -\omega^2 \hat{x}\, e^{i\omega t}$$

Einsetzen: $\quad M(-\omega^2 \hat{x})e^{i\omega t} + C\hat{x}e^{i\omega t} = 0 \quad \big|\cdot e^{-i\omega t}$

$$C\hat{x} = \omega^2 M \hat{x} \qquad Ax = \lambda B x$$