Lineare Ausgleichsrechnung

$$A \cdot x = b \quad (1)$$

$A = m \times n$-Matrix, $b = m$-Vektor, $x = n$-Vektor

$n < m$

$\Rightarrow$ überbestimmt

$\Rightarrow$ Es gibt (i. A.) kein x, das (1) erfüllt.

gesucht ist x mit kleinstem Fehler.

$r := Ax - b$ $\qquad r_2^2 := r_1^2 + r_2^2 + \ldots r_m^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \vec{r}^T \cdot \vec{r}$

$$= (Ax - b)^T \cdot (Ax - b) \rightarrow \text{minimal}$$

Bsp: $n = 1$, $m = 1$

$$r_2^2 = (ax - b)^2 = a^2 x^2 - 2abx + b^2$$

$$(r_2^2)' = 2a^2 x - 2ab \overset{!}{=} 0$$

$$a^2 x = ab$$

im Allgemeinen:

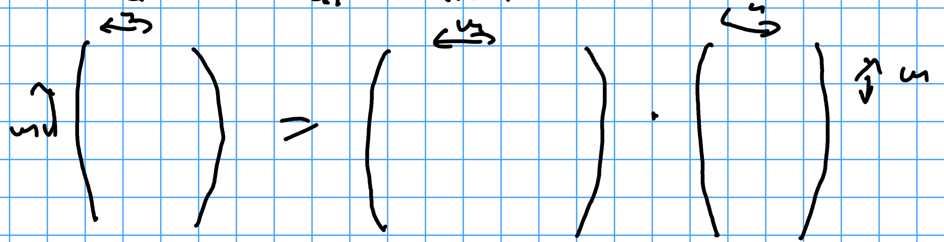
$$\underbrace{(\underset{n \times m}{A^T} \underset{m \times n}{A})}_{n \times n} x = \underbrace{\underset{n \times m}{A^T} \underset{m \times 1}{b}}_{n \times 1}$$

Normalengleichung

QR – Zerlegung

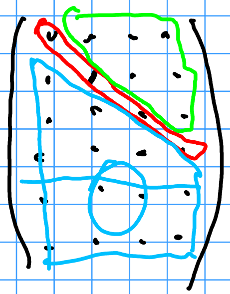
$A = Q \cdot R$ mit 1.) Q ist orthogonal 2.) R ist obere Dreiecksmatrix

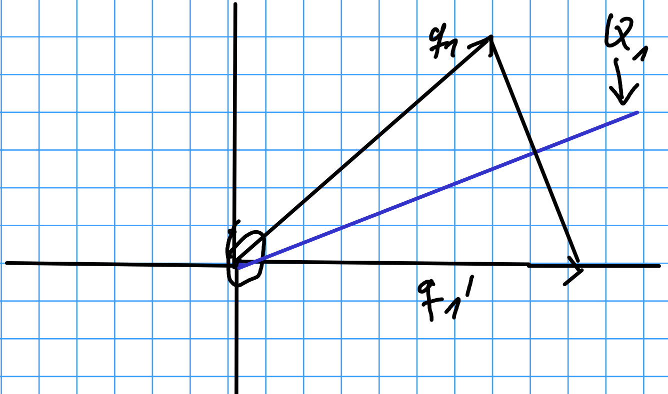
$m \times n \qquad m \times m \cdot m \times n$



Wie findet man Q, R ? $[Q,R] = qr(A)$

1. $Q^T \cdot Q = 1$

2. 



$q_1 = 1$ Spalte von A

$$q_1' = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Q_1: Householder-Matrix

Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$Ax \approx b \qquad A = Q \cdot R$

$\Rightarrow \quad QRx \approx b \qquad | \; Q^T \cdot$

$\underbrace{Q^T Q}_{1} R x \approx Q^T b$

$\underset{n\times n}{R} \; \underset{n\times 1}{x} \approx \underbrace{Q^T b}_{m\times 1} \qquad R = \begin{array}{c} \\ n \\ m-n \end{array} \begin{array}{c} n \\ \begin{pmatrix} R_1 \\ \hline 0 \end{pmatrix} \end{array}$

$\begin{array}{c} n \\ m-n \end{array} \begin{pmatrix} R_1 x \\ \hline 0 \cdot x \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} b_1 \\ \hline b_2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} n \\ m-n \end{array}$

$R_1 x = b_1 \quad \rightarrow$ Rückwärtssubstitution $\rightsquigarrow x$

$0 \cdot x = b_2 \quad \rightarrow$ Fehlerterm

Behauptung: Dieses x ist das Optimale!

Lösung der Normalengleichung mit QR-Zerlegung

Bem.: Die Lösung x von $R_1 x = b_1$ erfüllt die Normalengleichung $A^T A x = A^T b$

Beweis:

$$A = Q \cdot R \quad , \quad R = \begin{pmatrix} R_1 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\left((AB)^T = B^T \cdot A^T \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
A^T A x &= (QR)^T (QR) x = R^T Q^T Q R x \\
&= R^T R x \\
&= (R_1^T \,\vdots\, 0^T) \begin{pmatrix} R_1 \\ \hdashline 0 \end{pmatrix} x = R_1^T R_1 x \\
&= R_1^T b_1 \qquad = (R_1^T \,;\, 0^T) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \hdashline b_2 \end{pmatrix} \\
&= R^T Q^T b \qquad = (QR)^T b \\
&= A^T b \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$