

Interpolation durch Polynome

Beispiel: $N = 3$ Messwerte (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$

\Rightarrow Polynom P vom Grad 2

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \text{gesucht } a_0, a_1, a_2$$

Einfügen der Messwerte:

$$P(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$$

$$P(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2$$

$$P(x_3) = a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3$$

lineares Gleichungssystem für a_0, a_1, a_2

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{Vandermonde-Matrix}}$

Kubische Splines

N Punkte (x_i, y_i) $i=1, \dots, N$

$$P_k(x) = a_k x^3 + b_k x^2 + c_k x + d_k \quad k=1, \dots, N-1$$

Bedingungen

$$P_k(x_k) = y_k \quad k=1, \dots, N-1$$

$$P_k(x_{k+1}) = y_{k+1} \quad k=1, \dots, N-1$$

$$P'_k(x_{k+1}) = P'_{k+1}(x_{k+1}) \quad k=1, \dots, N-2$$

$$P''_k(x_{k+1}) = P''_{k+1}(x_{k+1}) \quad k=1, \dots, N-2$$

$$\Rightarrow 4N - 6$$

Bedingungen

Koeffizienten: $4 \cdot (N-1) = 4N - 4 \Rightarrow$ wir brauchen noch 2 Gleichungen
(bei x_1, x_N)

Bestimmen der Koeffizienten

naiv: $(4N-4) \times (4N-4)$ - Matrix

$$\text{LU-Zerleg: } O(N^3) = O((4N)^3) = 64 O(N^3)$$

geschickt: M_k seien bekannt $\Rightarrow P_k(x)$ ist klar

$$P_k(x_k) = \frac{1}{h_k} (0 + h_k \cdot h_k^2 \gamma_k + 0 + 0) = \gamma_k$$

$$(\underset{\downarrow}{\xi_k} = x_k - x_k = 0)$$