

LU-Zerlegung

$$L \cdot U = P A$$

$$P A x = P b$$

"

$$L U x = P b$$

$\underbrace{L U}_Y$

$$\Rightarrow y \quad (\text{Vorwärtssubstitution})$$

$$U x = y$$

$$\Rightarrow x \quad (\text{Rückwärtssubstitution})$$

A): Genauigkeit immer noch schlecht (jedenfalls manchmal)

Rechenregeln

- Lösen $Ax = b$ unmöglich $\Rightarrow x_*$

- Residuum $r := b - Ax_*$

Vektor, es interessiert $|r|$

- Fehler $e := x - x_*$

$$e_{\text{rel}} := \frac{|x - x_*|}{|x|}$$

Konditionszahl einer nicht-singulären Matrix

$$\text{cond}(A) := \frac{M(A)}{m(A)} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Eigenschaften der Konditionszahl:

— $\text{cond}(A) \geq 1$

— $\text{cond}(\lambda A) = \text{cond}(A) \quad (\lambda \neq 0)$

— $D = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \Rightarrow \text{cond}(D) = \frac{\max |d_i|}{\min |d_i|}$

Satz

Sei A eine nicht-singuläre $n \times n$ -Matrix
und b ein n -elementiger Spaltenvektor.

Für das Gleichungssystem

$$A \cdot x = b$$

sei x_* eine Näherungslösung mit dem
Residuum r . Dann gilt:

$$\frac{|x - x_*|}{|x|} \leq \text{cond}(A) \frac{|r|}{|b|}$$

$$|A b| \leq \|A\| \cdot |b|$$

Beweis

$$Ax = b \quad (1)$$

$$Ax_* = b - r \quad (2)$$

$$(1) - (2)$$

$$Ax - Ax_* = r \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1}A(x - x_*) = x - x_* = A^{-1}r$$

$$|x - x_*| = |A^{-1}r| \quad (kl.)$$

$$\begin{aligned} |x - x_*| \cdot |b| &= |A^{-1}r| \cdot |Ax| \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot |r| \cdot \|A\| \cdot |x| \end{aligned}$$

$$\frac{|x - x_*|}{|x|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \frac{|r|}{|b|}$$

$$= \text{cond}(A) \cdot \frac{|r|}{|b|} \quad \text{qed.}$$

Faustregel Genauigkeit

- A sei $N \times N$ -Matrix \Rightarrow LU-Zerlegung $\sim N^3$ Schritte $= N_S$
Dsp $N=1000$: 10^9 Operationen

- Rechengenauigkeit $\varepsilon = 10^{-16}$ (Fehler pro Schritt)

- Theorie: schlimmstenfalls addieren sich die Fehler

\Rightarrow Gesamtfehler $N_S \cdot \varepsilon$ (10^{-7} , 7 Dezimalen)

- Statistik: Fehler addieren oder subtrahieren sich "zufällig"

Zufallspfad ("Random Walk")

\Rightarrow Gesamtfehler $\sqrt{N_S} \cdot \varepsilon$

(im Beispiel: $10^{-16} \cdot 10^{4.5}$ (11-12 Dezimalen))

rel.
 \Rightarrow Fehler des Residuums

- dazu $\text{cond}(A)$

(im Dsp: $\text{cond}(A) = 10^4 \Rightarrow 7-8$ Dez.)