

Beispiel für Gaußsches Algorithmus

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & \text{R12} \\ 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & -5 & \text{R13} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & -\frac{32}{5} & \text{R15} \end{array}$$

Rückwärts substitutionen:

$$\frac{16}{5} x_3 = -\frac{32}{5} \Rightarrow x_3 = -2$$

$$-\frac{5}{2} x_2 - \frac{1}{2}(-2) = 1 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$2x_1 - 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) = 4 \Rightarrow x_1 = 3$$

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{16}{5} \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = A$$

L-U-Zerlegung von A

$$Ax = c$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$Ax = \underbrace{L(Ux)}_y = c$$

$$Ly = c \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 112 & 1 & 0 \\ -32 & 75 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

$$Ux = y$$

\Rightarrow Rückwärts-Substitution

$\Rightarrow x$

Vorwärts-Substitution:

$$1 \cdot y_1 = 1 \quad \Rightarrow y_1 = 1$$

$$112 \cdot 1 + y_2 = 2.5 \quad \Rightarrow y_2 = 2$$

$$-32 \cdot 1 + 75 \cdot 2 + y_3 = 0.3 \quad \Rightarrow y_3 = -1$$

Spezialfall : A ist symmetrisch und positiv ($(\forall x) Ax \geq 0$)

$$A = L \cdot L^T$$

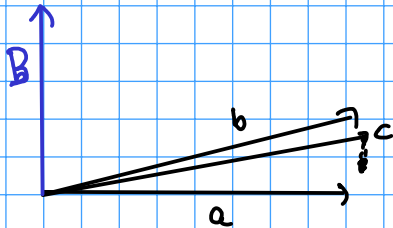
Cholesky - Zerlegung

Zahl der Schritte

$$\begin{aligned} \text{LU-Zerlegung} &: 2N(N-1) + 2(N-1)(N-2) + \dots + 2 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 2 \sum_{k=1}^N k(k-1) = \frac{2}{3} N(N+1)^2 = \frac{2}{3} N^3 + O(N^2) \end{aligned}$$

$$\text{Rückwärts-Substitution: } 1 + 3 + 5 + \dots + (2N-1) = N^2$$

$$\text{Vorwärts-Substitution: } N^2 - N$$



LU-Zerlegung mit Spalten - Pivotisierung

Vertauschung von Zeile 1 und Zeile 3

$$A = PA$$

Verfahren:

1. Schritt $\rightarrow P_1$, 2. Schritt $\rightarrow P_2, \dots, P_{N-1}$

Spaltenvertauschung $P = P_{m-1} \cdot P_{m-2} \cdot \dots \cdot P_2 \cdot P_1$

$$L \cdot U = PA$$

Vorsicht: Elemente von L vertauschen!

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P_2 z.B. 2/4

Gleichungssystem lösen

$$Ax = b \quad | P.$$

$$\Rightarrow PAx = Pb$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ LUx = \\ \parallel \end{matrix} \quad \begin{matrix} \\ b_1 \end{matrix}$$

Permutationsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$