Beispiel „Radioaktiver Zerfall"

$\dot{y} = \lambda y \qquad (\lambda < 0) \qquad , \; y(0) = 1$

Lösung : $\quad y(t) = e^{\lambda t} \qquad (\lambda < 0 \,!)$

Bsp. Euler - Solver

Lösung : $\quad y(Nh) = (1 + h\lambda)^N \, y(0) \qquad (\lambda < 0 \,!)$

halten h fest und verändern λ zu $-\infty$

$h\lambda < -1$: y wechselt Vorzeichen mit jedem Schritt !

$h\lambda < -2 \quad \rightsquigarrow \quad 1 + h\lambda < -1 \quad \rightarrow \quad |y|$ wächst mit jedem Schritt !

Solver geht nicht mehr !

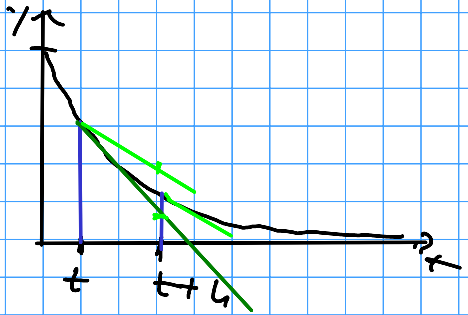
Ausweg : h sehr klein machen, wenn $|\lambda|$ sehr groß

Impliziter Eulersolver

Euler: $y(t+h) = y(t) + h\,\dot{y}(t) = y(t) + h\,f(t, y(t))$

Impliziter Euler:

$$y(t+h) = y(t) + h\,f(t+h, y(t+h)) \qquad (*)$$



Bsp: $\dot{y} = \lambda y$, also $f(t, y(t)) = \lambda y(t)$

$(*) \rightsquigarrow \quad y(t+h) = y(t) + \lambda h\, y(t+h)$

$\Rightarrow \quad y(t+h) = \dfrac{1}{1-\lambda h}\, y(t)$

λ sehr klein, z.B. $\lambda = -1000$, $h = 0.01$

Van-der-Pol-Oszillator

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$ steif für großes $\mu \geq 0$

$$\ddot{x} = \mu(1-x^2)\dot{x} - x$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ \mu(1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{pmatrix}}_{f(t,y)}$$

$$J(t,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2\mu y_2 y_1 - 1 & \mu(1-y_1^2) \end{pmatrix}$$