Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}(t, \vec{y})$$
$$\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

(t_0 meistens 0)

Beispiel für nicht-Lipschitz-f

$$\dot{y} = \sqrt{y}, \quad y(0) = 0$$

1. $f(t,y) = \sqrt{y}$ ist stetig (für $y \geq 0$)
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ ist bei 0 nicht beschränkt!

$\Rightarrow$ Peano ok, Picard-Lindelöf nicht

3. a) $y(t) = \frac{1}{4}t^2 \Rightarrow \dot{y} = \frac{1}{2}t = \sqrt{y}$ ✓

   b) $y(t) = 0$ ✓

Differentialgleichungen höherer Ordnung

Beispiel: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$

Trick: $\dot{x}$ als Variable einführen

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{y}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 y_1 \end{pmatrix}}_{\vec{f}(t, \vec{y})}$$

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Euler-Verfahren

Nähere Ableitung durch Differenzenquotienten

$$\dot{y}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \approx \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \qquad (h \text{ klein})$$

$$\Rightarrow y(t+h) = y(t) + h\cdot \dot{y}(t) = y(t) + h\, f(t, y(t)) \qquad (*)$$

Bsp: $\dot{y} = -\lambda y \qquad y(0) = 1 \qquad \lambda = 0.1$

$$y(t+h) \overset{(*)}{=} y(t) + h(-\lambda y(t)) = (1-h\lambda)\, y(t) \qquad (**)$$

Lösung schrittweise:

$y(0)$ bekannt (y_0)

$$y(h) \overset{(**)}{=} (1-h\lambda)\, y(0)$$

$$y(2h) = (1-h\lambda)\, y(h) = (1-h\lambda)(1-h\lambda)\, y(0) = (1-h\lambda)^2\, y(0)$$

$$y(Nh) \overset{\vdots}{=} (1-h\lambda)^N\, y(0)$$

Euler-Verfahren

$$k = f(t, y(t)) \rightsquigarrow y(t+h) = y(t) + h \cdot k$$

Heun-Verfahren

$$y(t+h) = y(t) + h \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$k_1 = f(t, y(t)) \quad , \quad k_2 = f(t+h, y(t+h)) \approx f(t+h, y(t) + h k_1)$$

im Beispiel: $f(t,y) = -\lambda y$

$$k_1 = -\lambda y$$

$$k_2 = -\lambda(y + h k_1) = -\lambda (y + h(-\lambda y)) = -\lambda y (1 - \lambda h)$$

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot \frac{1}{2} (-\lambda y)(1 + (1 - \lambda h))$$

$$= y \left(1 + h\left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}\right) + h^2 \frac{1}{2} (-\lambda)(-\lambda)\right)$$

$$= \left(1 - \lambda h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2\right) y(t)$$

Genauigkeit des Heun-Verfahrens

$$\dot{y} = f$$

1. Näherung mit Taylorreihe

$$y(t+h) = y(t) + h\,\dot{y}(t) + \tfrac{1}{2}h^2\,\ddot{y}(t)\ [+ O(h^3)]$$

$$= y + hf + \tfrac{1}{2}h^2\dot{f} = y + hf + \tfrac{1}{2}h^2(f_t + f_y f)$$

$t \to f(t, y(t))$ mit Abkürzungen $\frac{\partial f}{\partial t}(t,y) =: f_t$, $\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) =: f_y$

$$\dot{f}(t, y(t)) = f_t + f_y\dot{y} = f_t + f_y \cdot f$$

2. Näherung mit Heun-Verfahren

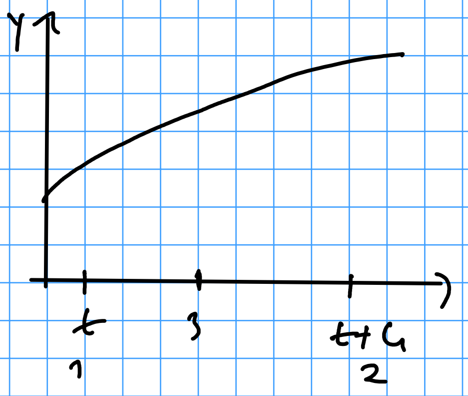
$$y(t+h) = y(t) + \tfrac{h}{2}k_1 + \tfrac{h}{2}k_2 = y + \tfrac{h}{2}f + \tfrac{h}{2}f(t+h, y+hf)$$

$$f(t+h, y+hf) = f + h\Big(f_t + f_y \cdot \big(\underset{\downarrow\, f}{\dot{y}} + \underbrace{h\dot{f}}_{\hookrightarrow O(h^2)}\big)\Big)$$

$$\Rightarrow y(t+h) = y + \tfrac{h}{2}f + \tfrac{h}{2}(f + h f_t + h f_y f)$$

$$= y + hf + \tfrac{h^2}{2}(f_t + f_y f) = \checkmark$$

Runge-Kutta-Verfahren



$$f(t + a_i h,$$

$$a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = 1 \quad , \quad a_3 = 0{,}4$$

$$k_1 = f(t + a_1 h, \; y)$$

$$k_2 = f(t + a_2 h, \; y + h \cdot b_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(t + a_3 h, \; y + h(b_{31} k_1 + b_{32} k_2))$$

Gesamtsteigung: $\quad k = c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3$

$$y(t+h) = y(t) + h \cdot k$$

Heun als Runge-Kutta-Verfahren

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad b_{21} = 1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}, \quad c_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{2} \end{array}$$

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

$$k_1 = f(t, y)$$

$$k_2 = f\left(t + \tfrac{1}{2}h,\ y + h \cdot \tfrac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t + \tfrac{1}{2}h,\ y + h\left(0 \cdot k_1 + \tfrac{1}{2}k_2\right)\right)$$

$$k_4 = f\left(t + 1 \cdot h,\ y + h\left(0 \cdot k_1 + 0 k_2 + 1 k_3\right)\right)$$

$$k = \tfrac{1}{6}k_1 + \tfrac{1}{3}k_2 + \tfrac{1}{3}k_3 + \tfrac{1}{6}k_4$$

$$y(t+h) = y(t) + hk$$