

Fehlermaße

x genau, \tilde{x} Näherungswert

absoluter Fehler: $\varepsilon_{abs}(x) = |x - \tilde{x}|$

relativer Fehler ($x \neq 0$): $\varepsilon_{rel}(x) = \frac{|x - \tilde{x}|}{|x|}$

relativer Fehler von $10^{-4} \hat{=}$ 4 signifikante Stelle

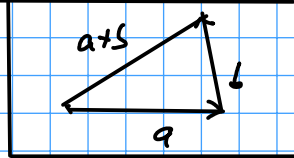
absoluter Fehler bei der Addition:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{abs}(x+y) &= |x+y - (\tilde{x} + \tilde{y})| = |(x - \tilde{x}) + (y - \tilde{y})| \\ &\leq |x - \tilde{x}| + |y - \tilde{y}| = \varepsilon_{abs}(x) + \varepsilon_{abs}(y)\end{aligned}$$

relativer Fehler bei der Multiplikation:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rel}(xy) &= \frac{|xy - \tilde{x}\tilde{y}|}{|xy|} = \frac{|(x - \tilde{x})y + \tilde{x}(y - \tilde{y})|}{|x| |y|} \leq \frac{|x - \tilde{x}| |y|}{|x| |y|} + \frac{|\tilde{x}| |y - \tilde{y}|}{|x| |y|} \\ &= \varepsilon_{rel}(x) + \frac{|\tilde{x}|}{|x|} \varepsilon_{rel}(y) \approx \varepsilon_{rel}(x) + \varepsilon_{rel}(y)\end{aligned}$$

Dreiecks-Ungleichung
 $|a+b| \leq |a| + |b|$



relativer Fehler bei der Addition:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{rel}}(x+y) &= \frac{|x+y - \tilde{x} - \tilde{y}|}{|x+y|} \leq \frac{|x - \tilde{x}|}{|x+y|} + \frac{|y - \tilde{y}|}{|x+y|} \\ &= \frac{|x - \tilde{x}| |x|}{|x+y| |x|} + \frac{|y - \tilde{y}| |y|}{|x+y| |y|} = \frac{|x|}{|x+y|} \varepsilon_{\text{rel}}(x) + \frac{|y|}{|x+y|} \varepsilon_{\text{rel}}(y)\end{aligned}$$

Fall 1: x, y beide > 0 : $\varepsilon_{\text{rel}}(x+y) \leq \varepsilon_{\text{rel}}(x) + \varepsilon_{\text{rel}}(y)$

Fall 2: x, y verschiedene Vorzeichen, insbesondere $|x+y| \ll 1$

$\Rightarrow \frac{|x|}{|x+y|} \gg 1$! $\Rightarrow \varepsilon_{\text{rel}}(x+y)$ meist groß!

Bsp: $x = 1000$, $y = -999$ $\varepsilon_{\text{rel}} \approx 10^{-3}$

$$\frac{|x|}{|x+y|} = \frac{1000}{1} = 1000 \Rightarrow \varepsilon_{\text{rel}}(x+y) \approx 2$$